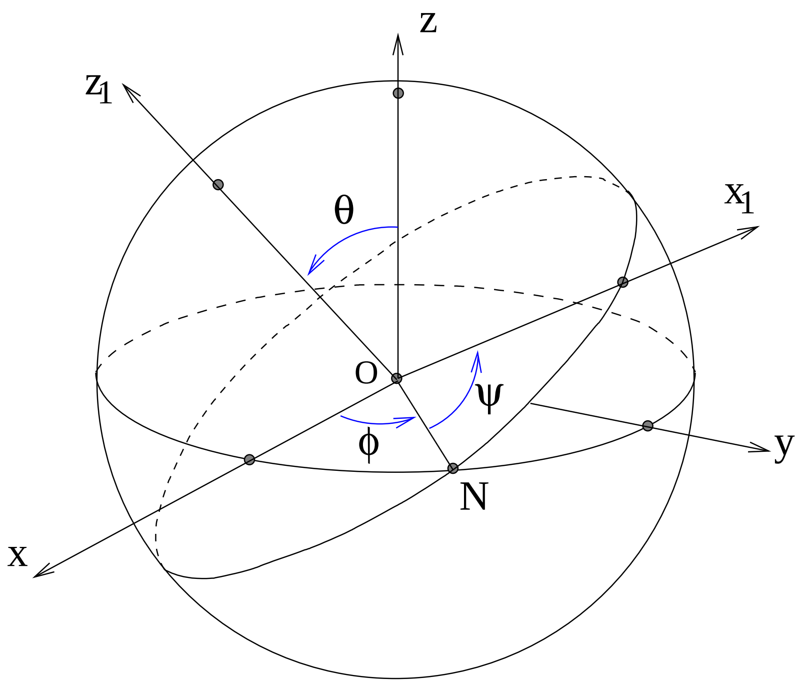
ASTRONOMIA SFERYCZNA

I rok studiów astronomii, stopień I

Kompilacja i opracowanie Tadeusz J. Jopek

(Ad Usum Internum)



Poznań AD 9 czerwca 2011

Spis treści

Rozdział 1

Położenia ciał na sferze niebieskiej

Streszczenie. Kierunki do ciał niebieskich można określać również przy założeniu, że ciała te znajdują się na sferze o promieniu równym jedności. Geometria sfery jest geometrią na zakrzywionej powierzchni dwuwymiarowej i w wielu przypadkach różni się od euklidesowej geometrii na płaszczyźnie. Elementami sfery wykorzystywanymi w astronomii są koła wielkie i skonstruowane z ich pomocą dwukąty i trójkąty sferyczne. W geometrii na sferze koła wielkie pełnią rolę analogiczną do prostych w planimetrii. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym jest zawsza większa od π. Na sferze mogą istnieć trójkąty, w których wszystkie kąty są kątami prostymi. Elementy trójkąta sferycznego spełniają kilka grup równań pozwalających na rozwiązywanie wielu zagadnień z zakresu astronomii sferycznej. Do najczęściej wykorzystywanych wzorów należą wzory sinusów i cosinusów. Problemy rozwiązywane w ramach trygonometrii sferycznej dają się także ująć w formaliźmie wektorowym.
Położenie ciała na sferze ustalone jest z pomocą dwóch kątów, azymutalnego ψ i polarnego θ. Każdy układ współrzędnych sferycznych wymaga określenia bieguna układu, względem którego mierzony jest kąt θ, oraz koła wielkiego pełniącego rolę płaszczyzny odniesienia, służącej jako początek rachuby dwuściennego kąta ψ.
W astronomii wykorzystywane są najróżniejsze układy współrzędnych, stąd konieczna jest umiejętność przeliczania współrzędnych pomiędzy dwoma układami. Transformacje współrzędnych dokonuje się drogą rozwiązania odpowiedniego trójkąta sferycznego albo za pomocą macierzy obrotu, w szczególności z wykorzystaniem kątów Eulera.

Słowa kluczowe: sfera niebieska, koło małe, koło wielkie, bieguny koła wielkiego, kąt sferyczny, dwukąt sferyczny, trójkąt paralaktyczny, nadmiar sferyczny, współrzędne sferyczne, współrzędne prostokątne, triada ortogonalna, transformacje współrzędnych, kąty Eulera. [a]

[a] [Modyfikowano AD 2011, luty, 28]

1.1 Triada ortogonalna

Stwierdzenie, że wektor $\mathbf{r}$ opisuje położenie ciała niebieskiego oznacza, że do naszej dyspozycji są trzy składowe (x, y, z), czyli trzy liczby wyznaczone względem triady $\mathbf{R}$. Na piśmie wyrażamy to stwierdzenie za pomocą zapisu

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Umawiamy się, że otaczająca nas przestrzeń jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową, że w tej przestrzeni kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) rozpięty na trójce wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. [1] Tę trójkę możemy połączyć w formie wektora blokowego $\mathbf{R}$ nazywanego triadą o strukturze identycznej z macierzą 3×3

$$\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \tag{1.2}$$

Stąd lementami triady są cosinusy kierunkowe wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ponieważ pomiędzy wersorami $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ zachodzą znane zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{k} \times \mathbf{i} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i} \times \mathbf{j} \\ \\ \mathbf{i}^T\mathbf{i} &= \mathbf{j}^T\mathbf{j} = \mathbf{k}^T\mathbf{k} = 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

stąd, skoro transpozycja triady $\mathbf{R}$ ma postać

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \\ \mathbf{j}^T \\ \mathbf{k}^T \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

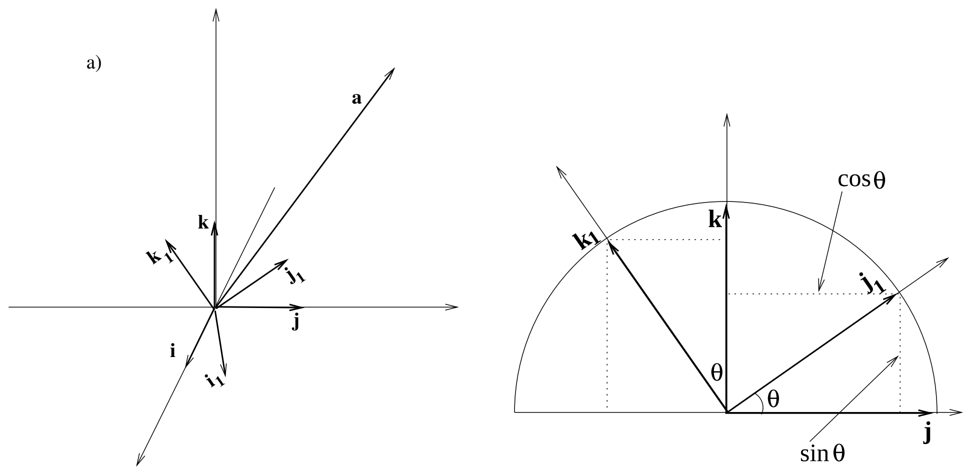
iloczyn

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T\mathbf{i} & \mathbf{i}^T\mathbf{j} & \mathbf{i}^T\mathbf{k} \\ \mathbf{j}^T\mathbf{i} & \mathbf{j}^T\mathbf{j} & \mathbf{j}^T\mathbf{k} \\ \mathbf{k}^T\mathbf{i} & \mathbf{k}^T\mathbf{j} & \mathbf{k}^T\mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{1.5}$$

gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową. Zatem, równanie to pociąga $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, czyli triada $\mathbf{R}$ zdefiniowana równaniem 1.2 jest macierzą ortogonalną. ↱

---

[1] A w jaki sposób ustalono orientację trójki wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$? Pytanie to wykracza poza ramy tego wykładu, bowiem pośrednio dotyczy spraw ostatecznych podobnie jak pytanie — czy najpierw było jajo, czy kura? Ponieważ astronomia nie zajmuje się takimi problemami, dlatego poprzestajemy na tym, że elementy tej trójki są, jakimś cudem znanymi, cosinusami kierunkowymi prostych, wzdłuż których leżą wersory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.



Rysunek 1.1: a) Wektor $\mathbf{a}$ może mieć składowe określone wzgledem wielu trójek wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. b) Związki pomiędzy elementami triad różniących się obrotem wokół jednej osi pokrywającej się z wersorem $\mathbf{i}$. Wersor $\mathbf{j}_1$ można otrzymać za pośrednictwem wersorów $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ odkładając w kierunku $\mathbf{j}$ odcinek o długości $cos\theta$ po czym w kierunku $\mathbf{k}$ odcinek $\sin\theta$.

1.2 Wektorowe transformacje współrzędnych sferycznych

1.2.1 Macierze obrotów i lustrzanych odbić

Współrzędne wektora $\mathbf{a}$ mogą być określone względem dowolnych układów współrzędnych, czyli innymi słowy względem dowolnych triad, np. $\mathbf{R}$ i $\mathbf{P}$. Niech $[a_1, a_2, a_3]$ bądą współrzędnymi wektora $\mathbf{a}$ względem triady $\mathbf{R}$, czyli

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Jeśli $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ są współrzędnymi wektora $\mathbf{a}$ względem triady $\mathbf{P}$, to podobnie piszemy

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Mnożąc lewostronnie równania (1.6) i (1.7) przez $\mathbf{R}^T$ widzimy, że

$$\mathbf{R}^T\mathbf{a} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T\mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Wynika stąd, że transformacja składowych $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ w składowe $[a_1, a_2, a_3]$ może być dokonana za pośrednictwem iloczynu macierzy $\mathbf{R}^T\mathbf{P}$. Transformacja odwrotna, czyli $(\mathbf{R}^T\mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{R}$, co jest to konsekwencją ortogonalności obu macierzy $\mathbf{R}$ i $\mathbf{P}$.
Wyprowadzimy teraz formuły odpowiadające pewnej konkretnej transformacji współrzędnych. Interesuje nas przeliczenie współrzędnych z układu zdefiniowanego prostokątną

triadą $\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ do układu współrzędnych danego triadą $\mathbf{R}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1]$, ale niech będzie, że transformacja $\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}$ ma postać

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= \mathbf{i} \\
\mathbf{j}_1 &= (\cos\theta)\mathbf{j} + (\sin\theta)\mathbf{k} \\
\mathbf{k}_1 &= (-\sin\theta)\mathbf{j} + (\cos\theta)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

co oznacza, że oba układy różnią się jedynie o dodatni obrót o kąt θ wokół osi $\mathbf{i}$. A w postaci dogodniejszej do umacierzowienia zapisu będzie

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{i}_1 = & 1\mathbf{i} & +0\mathbf{j} & +0\mathbf{k} \\
\mathbf{j}_1 = & 0\mathbf{i} & +(\cos\theta)\mathbf{j} & +(\sin\theta)\mathbf{k} \\
\mathbf{k}_1 = & 0\mathbf{i} & +(-\sin\theta)\mathbf{j} & +(\cos\theta)\mathbf{k}
\end{array}$$

Zatem, zgodnie z definicją triady, triadę $\mathbf{R}_1$ możemy określić jako iloczyn macierzowy

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Analogicznie jak w równaniu (1.8), transformacji składowych wektora wyznaczonych względem $\mathbf{R}$ do składowych podanych względem triady $\mathbf{R}_1$ możemy dokonać za pomocą macierzy $\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}$, czyli

$$\mathbf{R}_1{}^T\mathbf{R} = \left[\mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right]^T \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Mamy zatem następujący wniosek. Jeśli nowy układ współrzędnych uzyskano w wyniku obrotu wokół osi x o dodatni kąt θ,to transformacja współrzędnych (składowych) wektora $[x, y, z]^T$ do nowych współrzędnych $[x_1, y_1, z_1]^T$ może być dokonana za pomocą formuły

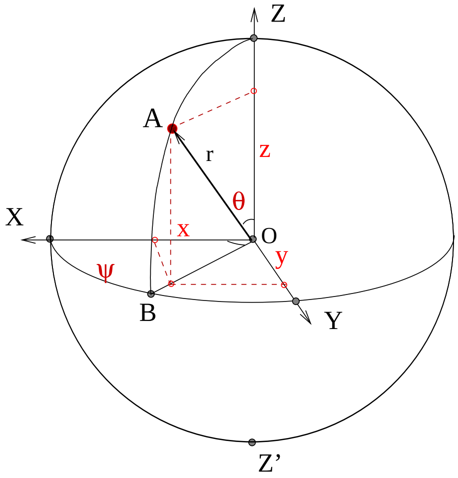
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

gdzie

$$\mathbf{p}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Analogiczne formuły można wyprowadzić dla układów różniących się obrotami o dodatni kąt θ wokół osi y i z. Odpowiednie macierze transformacyjne oznaczone jako $\mathbf{q}(\theta)$ i $\mathbf{r}(\theta)$ mają postać

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.11}$$



Rysunek 1.2: Współrzędne sferyczne (ψ, θ) i odpowiadające im współrzedne prostokątne (x, y, z) punktu A położonego na sferze o promieniu $r = 1$.

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

W przypadku gdy układy współrzędnych różnią się dwoma lub trzema obrotami, macierz transformacji współrzędnych wyznaczona jest jako iloczyn dwóch lub trzech macierzy odpowiadająych pojedynczym obrotom.

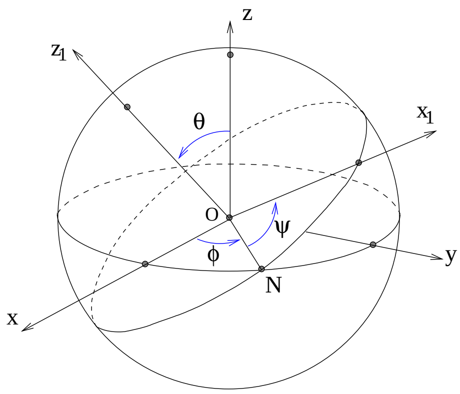
Macierz transformacyjna dla układów różniących się skrętnością (przypadek układów lewo i prawoskrętnych) jest macierzą modyfikującą jedynie współrzędną y-ową (lustrzane odbicie względem płaszczyzny $x - z$), ma ona postać

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

W praktyce możemy napotkać przypadek takich układów, dla których korzystnym będzie zastosowanie macierzy $\mathbf{M}_x$, pozwalającej na lustrzane odbicie względem płaszczyzny $y - z$ czyli na zmianę znaku współrzędnej x-owej.

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

W celu praktycznego zastosowania formuł podanych wyżej musimy dysponować wzorami umożliwiającymi transformację współrzędnych sferycznych do współrzędnych prostokątnych i odwrotnie. Jeśli na sferze jednostkowej, dane są sferyczne współrzędne (ψ, κ) położenia ciała niebieskiego A, (rysunek 1.2), gdzie ψ jest współrzędną azymutalną a $\kappa = 90° - \theta$ jest dopełnieniem do $90°$ odległości biegunowej θ, to odpowiadające



Rysunek 1.3: Ilustracja kątów Eulera. Układy współrzędnych o wspólnym początku, można transformować jeden w drugi za pomocą trzech obrotów o kąty Eulera.

im prostokątne składowe (x, y, z) wersora położenia wyliczamy za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} x &= \cos\psi\cos\kappa \\ y &= \sin\psi\cos\kappa \\ z &= \sin\kappa \end{aligned} \tag{1.15}$$

Zależności odwrotne mają postać

$$\begin{aligned} \kappa &= \arcsin z \\ \psi &= \arctan \tfrac{y}{x} \end{aligned} \tag{1.16}$$

przy czym w celu ustalenia właściwej ćwiartki kąta ψ musimy zastosować stosowną procedurę normującą. ↱

1.2.2 Transformacja współrzędnych z wykorzystaniem kątów Eulera.

Za pomocą macierzy podanych wyżej możemy z powodzeniem przeliczać współrzędne pomiędzy dowolnymi układami. W zależności od potrzeby, formuły transformacyjne będą złożeniami obrotów w okół osi X, Y, Z. Jednak przy takim podejściu dla każdego przypadku, kolejność obrotów musimy odgadnąć sami.

Ale możliwe jest inne podejście, w którym wzajemna orientacja dwóch układów współrzędnych określona jest za pomocą tzw. *kątów Eulera*, natomiast transformacja składa się z trzech obrotów względem osi w ustalonej, zawsze takiej samej kolejności.

Na rysunku 1.3 widzimy dwa prostokątne układy współrzędnych zorientowane względem siebie tak, że żadna para osi tych układów nie jest do siebie wzajemnie równoległa, płaszczyzny $X-Y$ tych układów przecinają się wzdłóż kierunku ON. Jest to najbardziej ogólny przypadek jeśli chodzi o orientację układów.

Kąty Eulera. Na rysunku 1.3 zaznaczono trzy kąty Eulera wykorzystywane do transformacji współrzędnych wyznaczonych względem obu układów, są to:

- kąt θ zawarty pomiędzy osiami Z i Z_1 obu układów,
- kąt ϕ zawarty pomiędzy osią X i linią ON przecięcia płaszczyzn $X - Y$ obu układów,
- kąt ψ pomiędzy osią X_1 i linią ON, liczony jako dodatni od linii ON do osi X_1.

Transformacja współrzędnych $[x, y, z]^T$ we współrzędne $[x_1, y_1, z_1]^T$, co łatwo odczytać z rysunku 1.3, jest złożeniem trzech obrotów

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{r}(\psi)\mathbf{p}(\theta)\mathbf{r}(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

A zatem jeśli tylko mamy do dyspozycji kąty Eulera określające wzajemną orientację dwóch dowolnych układów współrzędnych kartezjańskich, to transformacja pomiędzy współrzędnymi podanymi względem tych układów zawsze będzie miała postać równania (1.17).

Literatura polecana. Czytelnikom zainteresowanym pogłębieniem znajomości formalizmu wektorowo macierzowego do transformacji współrzędnych (i nie tylko) odsyłamy do podręcznika [3]. Tym, którzy do przemiany współrzędnych pragnęliby stosować rachunek krakowianowy polecamy stosowne rozdziały podręczników [1] i [2].

Rozdział 2

Elementy geometrii sferycznej

2.1 Obiekty geometryczne na sferze

Sfera.
Sfera jest to powierzchnia, której punkty są jednakowo odległe od punktu zwanego środkiem sfery. Jeśli w środku sfery umieścimy początek układu współrzędnych, to dla punktów położonych na sferze jednostkowej będzie

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = 1$$

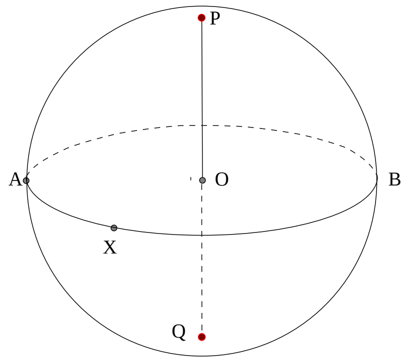
Sfera jest powierzchnią dwuwymiarowa, skończoną ale nieograniczoną. Geometria sferyczna jest geometrią na powierzchni zakrzywionej, jest to geometria dwuwymiarowa znacznie różniąca się od euklidesowej geometrii na płaszczyźnie. W szczególności, na sferze nie istnieją linie proste, ich rolę grają okręgi tradycyjnie zwane kołami wielkimi.

Koło wielkie.
Każde przecięcie sfery płaszczyzną jest okręgiem. Przecięcie sfery płaszczyzną przechodzącą przez środek sfery jest *kołem wielkim*, np. koło AX z rysunku 2.1. Promień koła wielkiego jest równy promieniowi sfery, a wektory $\mathbf{r}$ opisujące położenia punktów koła wielkiego spełniają równanie

$$\mathbf{n}^T\mathbf{r} = 0 \tag{2.1}$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem definiującym jeden z biegunów koła wielkiego. Końce średnicy prostopadłej do koła wielkiego sfery nazywamy biegunami tego koła. Na rysunku 2.1 *biegunami koła wielkiego* AX są punkty P i Q, punkty położone diametralnie. Zauważmy, że dowolne koło wielkie przechodzące przez jeden z biegunów P, musi także przechodzić przez drugi biegun Q.

Dwa punkty sfery, które nie są punktami diametralnymi jak np. A i X, wyznaczają koło wielkie jednoznacznie, bowiem łącznie ze środkiem sfery (punktem O) jednoznacznie określają płaszczyznę, której przecięcie ze sferą jest kołem wielkim. Na punktach A, X rozpięte są dwa łuki, mniejszy z nich nazywany *linią geodezyjną*, jest najkrótszą



Rysunek 2.1: Ilustracja elementów sfery: O jest środkiem sfery, okrąg przechodzący przez punkty A, X, B tradycyjnie nazwany jest kołem wielkim. Punkty P i Q są biegunami koła wielkiego AXB.

krzywą jaką można na sferze połączyć punkty A i X. Linie geodezyjne, (zwane też odległościami sferycznymi) pełnią na sferze rolę analogiczną jak linie proste w geometrii euklidesowej.

Ponieważ promień sfery $r = 1$, długość łuku koła wielkiego równa jest kątowi w radianach[1] jaki ten łuk rozpina względem środka sfery.

Dwukąt sferyczny.
W wyniku przecięcia tej samej sfery dwoma kołami wielkimi wyznaczone zostaną cztery obszary (powierzchnie) zwane *dwukątami sferycznymi* (rysunek 2.2-a). Dwukąty przeciwległe są parami przystające. Dwukąt sferyczny określony jest kątem sferycznym, np. kątem A na rysunku 2.2-a. Kąt ten jest równy kątowi płaskiemu (liniowemu) określonemu przez płaszczyzny, na których leżą koła wielkie tworzące dany dwukąt. Półokręgi tych kół wielkich nazywamy bokami dwukąta. Na danej sferze, boki wszystkich dwukątów są równe i mają długość πr, gdzie r jest promieniem sfery. [2] Pole pwierzchni dwukąta sferycznego można obliczyć ze wzoru

$$S = 2r^2 A$$

gdzie A jest kątem dwukąta wyrażonym w radianach.

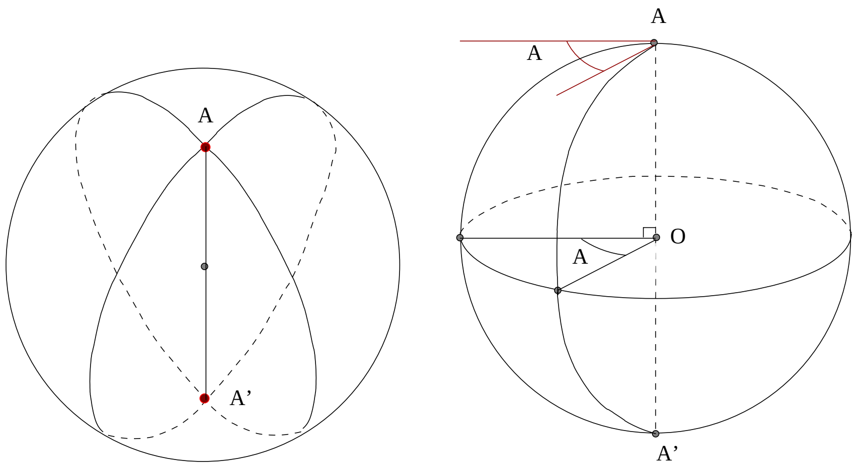
Kąt pomiędzy płaszczyznami kół wielkich często jest nazywany kątem sferycznym. O kącie sferycznym można też powiedzieć, że jest to kąt pomiędzy stycznymi wystawionymi w punkcie wzajemnego przecięcia się kół wielkich (patrz rysunek 2.2-b).

Trójkąt sferyczny.
Trzy koła wielkie nie przecinające się w jednej parze punktów diametralnych tworzą na sferze osiem obszarów zwanych *trójkątami sferycznymi* (rysunek 2.3-a). Znając elementy jednego z nich (czyli trzy boki i trzy kąty sferyczne, np. łuki a, b, c kół wielkich i kąty wewnętrzne A, B, C), łatwo wyznaczyć elementy wszystkich pozostałych trójkątów. Dlatego zwykle rozpartuje się zależności pomiędzy elementami tylko jednego trójkąta, któ-

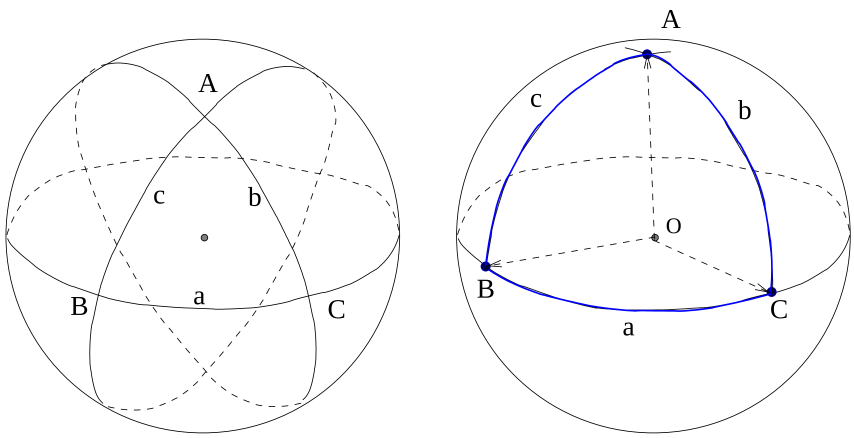
[1]Oprócz radianów można oczywiście używać innych miar kąta.
[2]Ze względu na dość częste nieporozumienia, warto zapamiętać, że dwukąt sferyczny (podobie trójkąt sferyczny) jest fragmentem powierzchni sfery, a nie kątem.

rego wszystkie boki są krótsze od połowy obwodu koła wielkiego. Taki trójkąt sferyczny nosi nazwę *trójkąta paralaktycznego* lub *trójkąta eulerowskiego*.

Boki trójkąta sferycznego tradycyjnie oznaczane są małymi literami, a ich długości mierzone są za pomocą płaskich kątów *kąta trójściennego* $OABC$, np. na rysunku 2.3 $c = \measuredangle AOB$. Wewnętrzne kąty przy wierzchołkach trójkąta oznaczane dużymi literami A, B, C mierzone są kątami dwuściennymi (kątami sferycznymi) tego samego kąta trójściennego.

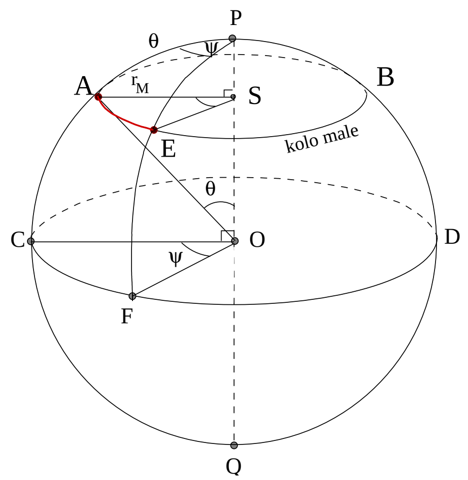


Rysunek 2.2: Dwukąty sferyczne: a) cztery dwukąty powstają w wyniku przecięcia sfery dwoma kołami wielkimi; b) dwukąty sferyczne są w pełni opisane przez promień sfery i kąt sferyczny A.



Rysunek 2.3: Trójkąty sferyczne: a) osiem trójkątów sferycznych można otrzymać z przecięcia trzech kół wielkich; b) Trójkąt paralaktyczny A,B,C rozpięty na trzech wektorach jednostkowych. Elementy trójkąta to kąty wierzchołkowe (kąty sferyczne) A, B, C i naprzeciw nich położone boki a, b, c. Zarówno kąty jak i boki mierzone są w jednostkach kątowych.

Trójkąty sferyczne eulerowskie mają pewne własności wspólne z trójkątami płaskimi, np. dowolny bok trójkąta jest mniejszy od sumy, ale większy od różnicy dwóch boków pozostałych. Jednak mamy też między nimi istotne różnice, np. w trójkącie sferycznym suma kątów wewnętrznych nie jest stała, bowiem przyjmuje wartości z przedziału



Rysunek 2.4: Elementy sfery: koło małe AEB. Jest ono odległe o kąt θ od swego bieguna P. Wycinek AE koła małego opiera się ramionach AS i ES rozwartych o kąt ψ. Długość wycinka wynosi $AE = \psi \sin\theta$.

przedziału

$$\pi < s = A + B + C < 3\pi$$

Trójkąt płaski posiada tylko jeden kąt prosty, trójkąt sferyczny niekoniecznie, może mieć ich dwa a nawet trzy. Różnica

$$s - \pi = \varepsilon$$

nazywanajest *nadmiarem sferycznym*.

Pole powierzchni trójkąta sferycznego dane jest z pomocą formuły

$$S = r^2\varepsilon$$

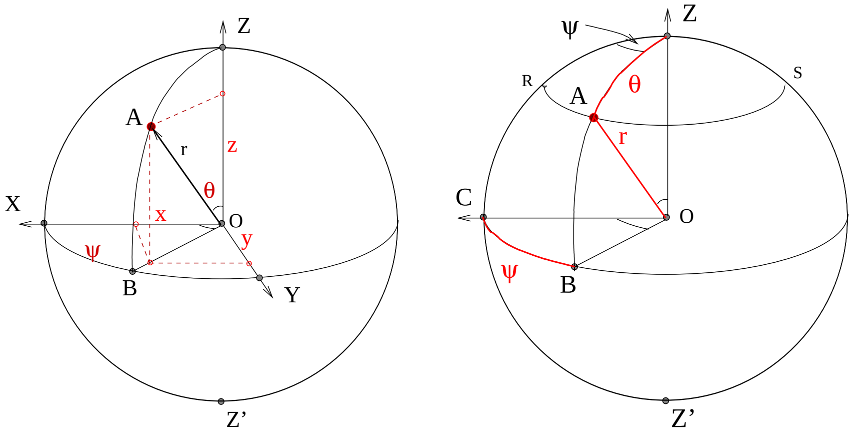
gdzie r jest promieniem sfery wyrażonym w radianach.

Koło małe.
Ślad przecięcia sfery płaszczyzną nie przechodzącą przez środek sfery jest okręgiem, tradycyjnie zwanym *kołem małym*. Jego biegunami są punkty skrajne średnicy sfery wystawionej prostopadle do płaszczyzny koła małego.

Promień koła małego jest zawsze mniejszy od promienia sfery. Na rysunku 2.4 widzimy koło małe AEB, równoległe doń koło wielkie CFD oraz ich wspólne w tym przypadku bieguny P i Q.
Wyprowadzimy formułę na długość łuku koła małego, często stosowaną w dalszej części wykładu. Niech r_M będzie promieniem koła małego, łuk $AP = \theta$ jest miarą odległości koła małego od bieguna P. Z trójkąta płaskiego AOS wynika

$$\begin{aligned} AS &= AO \cdot \sin AOS \\ r_M &= \sin\theta \end{aligned} \tag{2.2}$$

Punkt E koła małego połączmy z biegunem P łukiem koła wielkiego i powstały łuk przedłużmy do przecięcia z kołem CD w punkcie F. Jeśli kąt sferyczny APE oznaczymy



Rysunek 2.5: Sferyczne współrzędne biegunowe (ψ, θ) punktu A. Współrzędna polarna θ określa kątową odległość punktu A od bieguna Z układu współrzednych. Współrzędna azymutalna ψ jest kątem dwuściennym. Ustala ona kątową odległość płaszczyzny południka, w którym leży punkt A, od płaszczyzny południka ZX. Południk ZX wybrano jako początek rachuby współrzędnej azymutalnej.

przez ψ, to mamy także, że $COF = \psi$. A ponieważ odcinki AS i CO są do siebie równoległe, podobnie ES i FO mamy jeszcze, że kąt $ASE = \psi$.

Zatem długość łuku AE koła małego wynosi

$$AE = r_M \cdot ASE = \psi \sin \theta \tag{2.3}$$

2.2 Sferyczne współrzędne biegunowe

W celu ustalenia położenia punktu na sferze, można wykorzystać różne układy współrzędnych. Przykładowo, weźmy prawoskrętny prostokątny zbiór osi kartezjańskich $Oxyz$, określonych trójką wersorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ o początkach w środku O sfery jednostkowej. Dodatnie kierunki tych osi przecinają sferę w punktach X, Y, Z, natomiast koła wielkie XY, ZX położone są w płaszczyznach xOy i zOx, odpowiednio, patrz (rysunek 2.5).

Obierzmy na sferze punkt $A(xyz)$, wówczas. dla sfery jednostkowej prawdziwy jest związek

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{2.4}$$

Czyli jedna z prostokątnych współrzędnych x, y, z punktu A jest zbyteczna, co oznacza, że w celu ustalenia położenia ciała niebieskiego, tzn. kierunku do tego ciała, wystarczy posłużyć się dwoma liczbami.

Obok współrzędnych prostokątnych, w praktyce astronomicznej wygodnie jest stosować współrzędne biegunowe (r, θ, ψ) jako bliższe naszemu intuicyjnemu wyczuciu kierunku. Zgodnie z tradycyjną definicją (patrz rysunek 2.5):

- $r = OA$ jest *współrzędną radialną* punktu A,
- θ jest *współrzędną polarną* punktu A, jest ona identyczna z kątem ZOA,
- ψ jest *współrzędną azymutalną* punktu A równą kątowi dwuściennemu pomiędzy płaszczyzną ZOA i płaszczyzną ZOX.

Ponieważ dla sfery jednostkowej promień sfery $r = 1$, zatem dwie współrzędne kątowe (ψ, θ) w pełni określają położenie ciała na sferze: kąt θ jest długością łuku ZA, natomiast ψ jest kątem sferycznym XZA.

W celu ustalenia położenia punktów na całej sferze, wystarczy jeśli współrzędne (ψ, θ) przyjmą wartości należące do dziedziny

$$\begin{aligned} &0 \leq \theta \leq \pi \\ &0 \leq \psi \leq 2\pi \end{aligned} \tag{2.5}$$

Z układem współrzędnych sferycznych niekiedy wiąże się siatkę współrzędnych, która definiowana jest następująco:

- dla $\theta = const$, krzywe siatki są małymi kołami o biegunach w Z, Z', równoleżniki,
- dla $\psi = const$, krzywe siatki są półkolami wielkimi przecinającymi się w biegunach Z, Z', południki.

Podsumujmy: w celu zdefiniowania jakiegokolwiek układu współrzędnych sferycznych musimy (patrz rysunek 2.5):

- dokonać wyboru bieguna Z układu, względem którego mierzona będzie współrzędna — kąt polarny θ,
- dokonać wyboru koła wielkiego ZX pełniącego rolę płaszczyzny odniesienia, względem której mierzony będzie dwuścienny kąt azymutalny ψ.
- ustalić skrętność układu,
- podać jednostki miary i dziedzinę wartości kątów θ i ψ.

Wszystkie sferyczne astronomiczne układy współrzędnych są konstruowane w taki sposób. Różnią się doborem bieguna i koła odniesienia, można wśród nich napotkać zarówno układy lewoskrętne jak i prawoskrętne, często zamiast kąta polarnego brane jest jego dopełnienie $(\pi/2 - \theta)$, natomiast wartości kątów podawane są w stopniach albo w jednostkach czasu.

Poza tymi różnicami astronomiczne układy współrzędnych zawsze stanowią realizacje sferycznych współrzędnych biegunowych (ψ, θ) omówionych powyżej.

2.3 Współrzędne prostokątne punktów na sferze

Pomimo nieodłącznego nadmiaru (patrz równanie (2.4)), w astronomii sferycznej warto stosować współrzędne kartezjańskie. Ujęte w postaci uporządkowanych trójek współrzędne te, pozwalają nadać równaniom elegancką i uniwersalną wektorową formę.

Jeśli $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są jednostkowymi wektorami o własnościach określonych równaniami (1.3), jeśli wzdłuż tych wersorów zorientowano dodatnie kierunki osi x, y, z, wówczas zgodnie z równaniem (1.1) położenie punktu $A(x, y, z)$ na sferze (rysunek 2.5) określone jest za pomocą wektora położenia $\mathbf{r}_A$

$$\mathbf{r}_A = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} \tag{2.6}$$

gdzie składowe (x, y, z) są cosinusami kierunkowymi odcinka OA, obliczonymi odpowiednio, względem osi X, Y, Z, patrz rysunek 2.5

$$\begin{aligned} x &= \cos XA \\ y &= \cos YA \\ z &= \cos ZA \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pomiędzy współrzędnymi x, y, z oraz współrzędnymi sferycznymi ψ, θ tego samego punktu A mamy znane związki

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\psi \\ y &= \sin\theta\sin\psi \\ z &= \cos\theta \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dowolny problem w astronomii sferycznej można rozwiązać za pomocą metod trygonometrii sferyczej i współrzędnych sferycznych. W czasach przedkomputerowych pozwalało to na uzyskiwanie rozwiązań oszczędnych pod względem obliczeniowym. Obecnie dawne i nowe problemy rozwiązujemy stosując bardziej ogólne podejście wektorowe. Jednak ponieważ astronomia jest nauką, w której dane obserwacyjne mają inną rangę niż to ma miejsce np. w fizyce, w pewnych wypadkach znajomość metod redukcyjnych jakimi kiedyś posługiwali się astronomowie jest niezbędna, by przykładowo, obserwacje komety pochodzące z odległych epok wykorzystać razem z obserwacjami współczesnymi.

Rozdział 3

Elementy trygonometrii sferycznej

3.1 Podstawowe wzory trygonometrii sferycznej

Wyprowadzimy często wykorzystywane przez astronomów związki pomiędzy elementami trójkąta paralaktycznego. Nasze podejście będzie bardziej współczesne: skorzystamy z zależności wektorowych, przy czym składowe wektorów wyrazimy poprzez współrzędne sferyczne za pomocą formuł (2.8). Niech ABC będzie trójkątem sferycznym (rysunek 3.1). Jak widać jest on rozpięty na trzech wektorach jednostkowych $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$. Wybierzmy układ współrzędnych (ψ, θ) o biegunie w punkcie A, łuk AB obierzmy za koło wielkie odniesienia miary współrzędnej azymutalnej ψ. Po tych ustaleniach: położenie punktu B określone jest przez $(\theta = c,\ \psi = 0)$, położenie punktu C przez $(\theta = b, \psi = A)$. A zgodnie z równaniami (2.8) składowe wektorów położeń punktów B i C, wynoszą

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= (\sin c, 0, \cos c) \\ \mathbf{r}_C &= (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Kąt między $\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ jest równy długości boku BC trójkąta sferycznego A, B, C, a ponieważ są to wektory jednostkowe, ich iloczyn skalarny wynosi

$$\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C = \cos a$$

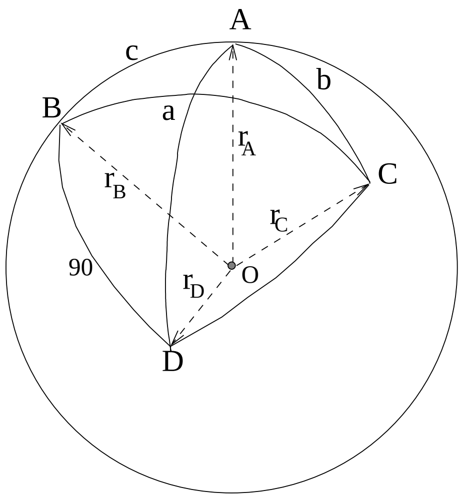
Podstawiając za $\mathbf{r}_B$ i $\mathbf{r}_C$ prawe strony równań (3.1) otrzymamy

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{3.2}$$

Jest to jedna z najbardziej podstawowych formuł trygonometrii sferycznej nazywana *wzorem cosinusów*.[1]

Za pomocą tej formuły, drogą odpowiednich przekształceń, można otrzymać dalsze wzory. Jednak bardziej bezpośrednio, dwa z nich uzyskamy badając wektor $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$. Ponieważ kąt między wersorami $\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ równy jest łukowi BC, ich iloczyn wektorowy jest

[1] Komplet wzorów postaci (3.2) daje się otrzymać np. poprzez cykliczną permutację symboli abcABC.



Rysunek 3.1: Trójkąt paralaktyczny ABC rozpięty na trójce wektorów jednostkowych $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$. Wektor $\mathbf{r}_D$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$.

wektorem o długości $\sin a$ skierowanym ku punktowi D położonemu o $90°$ zarówno od C i B. Jak widzimy na rysunku 3.1, punkt D jest biegunem boku BC trójkąta sferycznego A, B, C. myśl tego co powiedziano, mamy więc

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \sin a\ \mathbf{r}_D \tag{3.3}$$

gdzie $\mathbf{r}_D$ jest wektorem jednostkowym punktu D, Z pomocą równań (3.1) lewą stronę równania wektorowego (3.3) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \quad & (\sin b \cos c \sin A, \\ & \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ & -\sin b \sin c \sin A)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Jak widzimy na rysunku 3.1, sferyczne współrzędne punktu D wynoszą $(\psi = BAD, \theta = AD)$, zatem korzystając z formuł (2.8) prawą stronę równania (3.3) możemy wyrazić jako

$$\sin a\ \mathbf{r}_D = \sin a(\sin AD \cos BAD, \sin AD \sin BAD, \cos AD) \tag{3.5}$$

Moglibyśmy teraz porównać odpowiednie składowe w równaniach (3.4) i (3.5), jednak warto przedtem pozbyć się sinusów i cosinusów kątów AD i BAD.

Dokonamy tego za pomocą związków między elementami trójkąta ABC. W tym celu popatrzmy na trójkąt sferyczny BAD. Skoro D jest biegunem koła wielkiego BC, to łuk $BD = 90°$ i jest prostopadły do koła BC. Stąd kąt sferyczny $ABD = 90° + B$ i w trójkącie sferycznym BAD ze wzóru cosinusów mamy

$$\begin{aligned}&\cos AD = \cos 90° \cos c + \sin 90° \sin c \cos(90° + B) \\ &\cos AD = -\sin c \sin B\end{aligned}$$

Podstawiając ten rezultat do składowej z-towej w równaniu (3.5), porównując ją ze składową z-tową z równania (3.4) otrzymamy

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

Biorąc iloczyn wektorowy dla innej pary wektorów, równanie to można uzupełnić o dodatkowy człon, i w tej pełnej postaci nosi ono nazwę *wzoru sinusów*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{3.6}$$

Równości (3.6) wykorzystamy do wyprowadzenia kolejnych wzorów trygonometrii sferycznej. W trójkącie sferycznym BAD z rysunku 3.1, dla boku AD i kąta wierzchołkowego ADB na mocy wzoru sinusów będzie

$$\frac{\sin(90° + B)}{\sin AD} = \frac{\sin BAD}{\sin 90°}$$

$$\sin AD \sin BAD = \sin(90° + B) = \cos B$$

Kładąc ten rezultat do y-kowej składowej równania (3.5), przyrównując ją ze składową y-ową równania (3.4) otrzymujemy ważny wzór zwany *wzorem pięcioelementowym*

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \tag{3.7}$$

Pozostałe pięć wzorów typu (3.7) otrzymamy dzięki odpowiednim permutacjom symboli w trójkącie sferycznym ABC. Np. zmieniając w ciągu symboli $aBbcbcA$ rolę B z C oraz b z c dostaniemy następny wzór pięcioelementowy

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \tag{3.8}$$

Z wektorowego równania (3.3) nie otrzymamy już żadnych nowych formuł. Ostatni ważny wzór trygonometrii sterycznej tzw. *wzór cotangensowy* (czteroczęściowy) można wydedukować ze wzorów cosinusów i sinusów. W tym celu stosujmy wzór cosinusów do boków b i c trójkąta ABC (rysunek 3.1), mamy

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}$$

Eliminując $\cos c$ w pierwszym równaniu za pomocą prawej strony drugiego równania, podstawiając za $\sin c$ odpowiednie wyrażenie ze wzoru sinusów dostaniemy

$$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \left[\frac{\sin b \sin C}{\sin B}\right] \cos B$$

a po podzieleniu obu stron przez $\sin b$, będzie

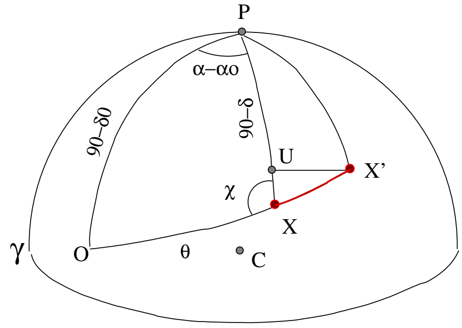
$$\cot b = \cos^2 a \cot b + \cos a \sin a \cos C + \sin a \sin C \cot B$$

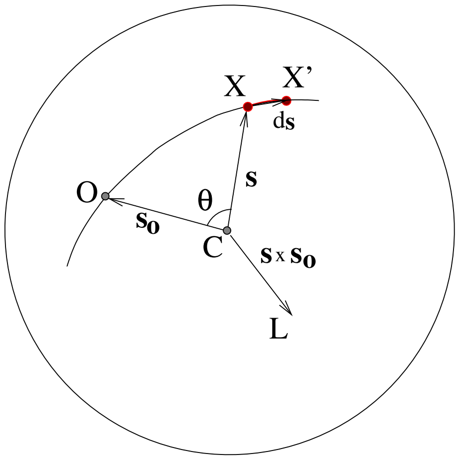
$$\sin^2 a \cot b = \sin a(\cos a \cos C + \sin C \cot B)$$

Dzieląc w ostatnim równaniu obie strony przez $\sin a$ otrzymujemy ostatecznie

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \tag{3.9}$$

Istnieje komplet sześciu takich wzorów, można go wypisać odpowiednio permutując symbole w trójkącie sferycznym ABC.





Rysunek 3.2: Małe przesunięcie na sferze niebieskiej. a) Ciało niebieskie uległo drobnemu przesunięciu z punktu X do X', wzdłuż koła wielkiego OX. b) wersja wektorowa małego przesunięcia.

3.2 Dodatek A. Małe przesunięcie na sferze

W wielu problemach astronomii sferycznej mamy do czynienia z niewielkimi zmianami położeń ciał niebieskich (tzw. małe przesunięcie). odatkiPrzyczyny zmian bywają różne, natomiast same zmiany niemal zawsze przebiegają w taki sam sposób, dlatego warto zapoznać się ze standardowym opisem małego przesunięcia.

Wielkość przesunięcia może być różna, m.in. jest zależna od położenia obiektu, ale zawsze przesunięcie odbywa się po kole wielkim łączącym dany obiekt z jakimś ustalonym punktem sfery, wspólnym dla wszystkich obiektów. Np. małe przesunięcie zwane paralaksą roczną, ma miejsce zawsze wzdłuż koła wielkiego zawierającego kierunki ku Słońca i do danego ciała niebieskiego, przesunięcie zwane aberacją dobową, przebiega po kole wielkim rozpiętym na kierunku do danego ciała i na kierunku do punktu wschodu horyzontu miejsca obserwacji. Wszystkie tego typu przesunięcia można traktować jako szczególne przypadki ogólniejszego małego przesunięcia opisanego poniżej.

Przyjmijmy, że np. kierunek do gwiazdy $X(\alpha, \delta)$ z rysunku 3.2a, uległ niewielkiemu przesunięciu do punktu X', oraz że odbyło się to wzdłuż koła wielkiego łączącego X z punktem $O(\alpha_0, \delta_0)$. Oznaczmy łuk OX przez θ a łuk XX' przez $d\theta$. Załóżmy, że $d\theta$ jest małym kątem dodatnim. Niech dalej będzie, że przesunięcie $d\theta$ da się wyrazić za pomocą formułki

$$XX' = d\theta = k \ \sin\theta \tag{3.10}$$

gdzie k jest stałą dodatnią lub ujemną niezależną od obranej gwiazdy, co zresztą nie jest aż tak ważne dla dalszego wywodu. W ten sposób umówiliśmy się, że interesujemy się przesunięciami, których wielkość dla danego k, zależy jedynie od odległości obiektu od pewnego punktu wspólnego O.

Niech będzie, że punkt X' ma współrzędne $(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$. Poszukamy wyrażeń pozwalających na obliczenie przyrostów $d\alpha, d\delta$ spowodowanych małym przesunieciem

$d\theta$. W celu znalezienia takich związków, konstruujemy na sferze obiekt geometryczny, najlepiej taki, który ma znane własności matematyczne (np. trójkąt), i którego elementy będą miały związek z występującymi w naszym problemie wielkościami: $d\alpha, d\delta, d\theta \ldots$.

Poprowadźmy koło małe o biegunie w P, przechodzące przez X', przecinające PX w punkcie U. Możemy zatem utworzyć trójkąt UXX', dla którego poszukamy wyrażeń na niektóre jego elementy.

Ponieważ $\Upsilon PX = \alpha$, $\Upsilon PX' = \alpha + d\alpha$ mamy, że kąt $UPX = d\alpha$. Skoro $PX' = PU = 90° - (\delta + d\delta)$, stąd z równania (2.3), z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu bok UX' wynosi

$$UX' = d\alpha \sin(90° - (\delta + d\delta)) = d\alpha \cos(\delta + d\delta) \approx d\alpha \cos\delta$$

Drugi bok $UX = d\delta$, bowiem $PX = 90° - \delta$.

Poszukamy teraz wyrażeń na długości tych boków, przy czym chcemy by występowały w nich wielkości możliwie bezpośrednio związane z parametrami opisującymi małe przesunięcie. Oznaczmy kąt sferyczny OXP przez χ, wówczas $UXX' = 180° - \chi$. Ze względu na bardzo małe rozmiary w stosunku do promienia sfery, trójkąt UXX'[2] w przybliżeniu można traktować jako trójkąt płaski, o kącie prostym w wierzchołku U. Dla takiego przybliżenia, mamy

$$\begin{aligned} UX &= XX' \cos(180° - \chi) = -XX' \cos\chi \\ UX' &= XX' \sin(180° - \chi) = XX' \sin\chi \end{aligned}$$

Kładąc za UX' i UX rezultaty uzyskane wcześniej, biorąc również pod uwagę równanie (3.10) mamy, że

$$\begin{aligned} \cos\delta\ d\alpha &= k \sin\theta \sin\chi \\ d\delta &= -k \sin\theta \cos\chi \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pozostaje nam jeszcze wyeliminowanie kątów θ i χ z pomocą wyrażeń, w których występują wyłącznie wielkości znane tzn. k, α_0, δ_0. W tym celu popatrzmy na rysunek 3.2a, na trójkąt sferyczny OPX. Mamy tu, że $\Upsilon PO = \alpha_0$ co pociąga $OPX = \alpha - \alpha_0$. Dalej mamy $PX = 90° - \delta$, $PO = 90° - \delta_0$, $OX = \theta$ oraz $OXP = \chi$. Stosując do trójkąta OPX wzor sinusów (3.6) i wzór pięcioelementowy (3.8) otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin\theta \sin\chi &= \sin(90° - \delta_0) \sin(\alpha - \alpha_0) \\ \sin\theta \cos\chi &= \cos(90° - \delta_0) \sin(90° - \delta) - \sin(90° - \delta_0) \cos(90° - \delta) \cos(\alpha - \alpha_0) \end{aligned}$$

Podstawiając prawe strony tych wyrażeń do równań (3.11) ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = d\alpha &= k \sec\delta \cos\delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \\ \delta' - \delta = d\delta &= k(\sin\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos\delta \sin\delta_0) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aby te równania zastosować w jakimś konkretnym przypadku np. do opisu skutków zjawiska refrakcji, wystarczy położyć odpowiednią wartość k oraz współrzędne (α_0, δ_0) punktu O.

[2] Uwaga, nie jest to trójkąt sferyczny!

Opis małego przesunięcia dany równaniami (3.12) można również otrzymać w formie wektorowej. Niech s będzie wersorem położenia punktu X a s_0 będzie wersorem położenia punktu O (rysunek 3.2b). Ponieważ są to wektory jednostkowe stąd wektor $\mathrm{s} \times \mathrm{s}_0$ ma długość $\sin\theta$, i skierowany jest do punktu L na sferze, odległego o $90°$ zarówno od O jak i od X. Punkt L jest więc biegunem koła wielkiego OX.

Niech kierunek do punktu X' opisuje wektor $\mathrm{s} + d\mathrm{s}$. By określić położenie punktu X'musimy policzyć składowe wektora $d\mathrm{s}$ i w tym celu szukamy zależności, w których ten wektor występuje.[3] Ponieważ iloczyn skalarny $\mathrm{s} \cdot \mathrm{s} = 1$, różniczkując to wyrażenie dostaniemy

$$\mathrm{s} \cdot d\mathrm{s} = 0 \tag{3.13}$$

Wynika stąd, że wektor $d\mathrm{s}$ jest prostopadły do s, a skoro przesunięcie odbywa się wzdłuż łuku OX, to wektor $d\mathrm{s}$ jest także prostopadły do wektora $\mathrm{s} \times \mathrm{s}_0$. Korzystając z reguły prawej dłoni można przekonać się, że $d\mathrm{s}$ skierowany jest zgodnie z kierunkiem wektora $\mathrm{s} \times (\mathrm{s} \times \mathrm{s}_0)$. Można też pokazać, że długość tego iloczynu wektorowego równa się $\sin\theta$. Stąd wektorowy odpowiednik równania (3.10) ma postać

$$d\mathrm{s} = \mathrm{s}' - \mathrm{s} = k\, \mathrm{s} \times (\mathrm{s} \times \mathrm{s}_0) \tag{3.14}$$

Równanie to jest bardziej ogólne niż równanie (3.12), bowiem dotyczy ono dowolnego układu współrzędnych, nie tylko układu równikowego. ↱

3.3 Dodatek B. Dygresja na temat małych kątów

Analizując teoretyczne problemy na sferze, wygodnie jest wyrażać kąty w radianach. Kiedy jednak wykorzystujemy rezultaty analiz, opłaca się stosować inne miary kątów, np. małe kąty takie jak kąt paralaksy najczęściej podane są w sekundach łuku.

Na podstawie znanej definicji mamy w przybliżeniu

$$1 \;\; rad = 57°17'45'' = 206265'' \tag{3.15}$$

Radiany wykorzystywane są w *przybliżeniach małych kątów*, tzn. jeśli wartości małych kątów są podane w radianach, wówczas dopuszczalne są nasępujące przybliżenia niektórych funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \\ \tan\theta &\approx \theta \end{aligned} \tag{3.16}$$

Z równań (3.15), (3.16) wynika, że

$$\sin 1'' = \frac{1}{206265} \tag{3.17}$$

[3] Wymaga to wyczucia, czyli nosa i dlatego najczęściej stosowaną metodą rozwiązywania takich problemów jest metoda prób i błędów.

Wyrażenie to znakomicie nadaje się do zamiamy radianów na sekundy łuku. Np. jeśli zapis θ'' oznacza liczbę sekund w małym kącie θ, to

$$\sin\theta \approx \theta \approx \frac{\theta''}{206265} = \theta'' \sin 1''$$

Jak pamiętamy, równania (3.12) na zmiany współrzędnych w rezultacie małego przesunięcia są dokładne tylko do rzędu pierwszego, dlatego stosując je należy liczyć się z błędem ε wynoszącym w radianach

$$\varepsilon = O(k^2) = O((k'' \sin 1'')^2)$$

W sekundach łuku ε wynosi [4]

$$\varepsilon'' = O(k''^2 \sin 1'')$$

Daje to pożyteczną formułę na oszacowanie dokładności. Np. dla przemieszczeń na sferze o wartości $1''$ błąd formuły pierwszego przybliżenia jest rzędu $5 \cdot 10^{-6}$ sekundy łuku, co jest do zaniedbania niemal w każdym przypadku. Dla przesunięć o wielkości $15''$ błąd ten wynosi około $0.001''$ co jest jeszcze poniżej precyzji wielu współczesnych teleskopów astrometrycznych. Ale dla przesunięć rzędu jednej minuty łuku błędy wynoszą około $0.02''$ co wyraźnie przekracza precyzję współczesnych obserwacji optycznych i radiowych. Formuły pierwszego rzędu są bardzo przydatne, ale trzeba je stosować z rozwagą i to ilościową.

Przypuśćmy, że wykorzystując równania (3.12) stosowano sekundy łuku. Dla jasności umawiamy się, że k jest w radianach a zapis k'' oznacza tą samą wielkość podaną w sekundach łuku. Ponieważ stosujemy ten sam współczynnik zamiany jednostek do obu stron równań (3.12), $d\alpha$ i $d\delta$ otrzymamy od razu w sekundach zastępując k przez k''. Stąd jeśli wyrazimy parametr k w sekundach łuku, równania (3.12) w jednostkach praktycznych przyjmą postać

$$\begin{aligned} d\alpha^s &= \tfrac{1}{15} k'' \sec\delta \cos\delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \\ d\delta'' &= k''(\sin\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos\delta \sin\delta_0) \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.4 Dodatek C. Zadania

1. Podaj definicje następujących pojęć: sfera niebieska, koło wielkie, koło małe, dwukąt sferyczny, trójkąt sferyczny, nadmiar sferyczny, kat sferyczny, kąt dwuścienny, kąt trójścienny.

2. Wykonaj pełne wyprowadzenie równań (3.4) i (3.9).

3. Drogą przestawień symboli $abcABC$ wypisz pozostałe wzory cosinusów, wzory pięcioelementowe oraz wzory cotangensowe, tak by otrzymać komplet podstawowych formuł trygonometrii sferycznej.

[4] Kwadrat sinusa zniknął gdyż trzeba było podzielić poprzednie wyrażenie przez $\sin 1''$.

4. Wykonaj pełne wyprowadzenie równań (3.12).

5. Pokaż, że długość wektora $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0)$ wynosi $\sin\theta$.

6. Podaj lepsze przybliżenie zależności (3.15).

7. Udowodnij równość (3.17).

8. Pokaż, że wartość kąta sferycznego na sferze jednostkowej równa się odległości na powierzchni sfery pomiędzy biegunami kół wielkich tworzących ten kąt.

9. Dla każdego trójkąta sferycznego ABC można zdefiniować tzw. trójkąt biegunowy $A'B'C'$. Mianowicie: A' jest biegunem boku BC tak, że $AA' < 90°$. B' i C' definiuje się podobnie. Pokaż, że boki i kąty obydwu trójkątów związane są wzorami

$$
\begin{aligned}
A' &= 180° - a \qquad & a' &= 180° - A \\
B' &= 180° - b \qquad & b' &= 180° - B \\
C' &= 180° - c \qquad & c' &= 180° - C
\end{aligned}
$$

Rozdział 4

Astronomiczne układy współrzędnych

Streszczenie. W astronomii wykorzystywane są przeróżne układy współrzędnych sferycznych jak i opdowiadające im układy kartezjańskie. Najważniejszy układ astronomicznych współrzędnych sferycznych to układ równikowy z parą kątów (α, δ), rektascensja i deklinacja.
Najprostszym do zrealizowania w praktyce jest układ współrzędnych horyzontalnych z azymutem i odległością zenitalną (A, z). Biegunem układu jest zenit miejsca obserwacji, podstawowym kołem azymutalnym jest południk miejscowy. Układ współrzędnych godzinnych $(\mathcal{H}, \delta)$ realizowany jest za pomocą montażu teleskopu umożliwiającego śledzenie ruchu dobowego sfery. Układ godzinny definiują biegun świata i południk miejscowy. Współrzędne horyzontalne i godzinne nie są dogodne do katalogowania położeń ciał niebieskich, są bowiem zależne od czasu. Do katalogowania położeń doskonale nadaje się układ równikowy (α, δ). Ale w dynamice ciał Układu Słonecznego wygodniej jest korzystywać z układu ekliptycznego (λ, β), którego kierunkiem biegunowym jest kierunek na biegun ekliptyki a punkt równonocy wiosennej Υ służy do definiowania początku rachuby współrzędnej azymutalnej. W celu opisu świata gwiazd warto posłużyć się układem galaktycznym (l, b), w którym północny biegun Galaktyki oraz punkt na równiku galaktycznym identyczny z obrazem rzutu centrum Galaktyki na równik, stanowią elementy definiujące ten układ współrzędnych.
Pomiędzy wszystkimi układami można dokonać transformacji współrzędnych. Stosowne wzory transformacyjne dają się wyprowadzić w rezultacie rozwiązania trójkąta sferycznego, którego bokami i kątami są współrzędne sferyczne obiektu wyrażone w obu układach, oraz parametry definiujące jeden układ względem drugiego. Można też stosować podejście wektorowe, w którym transformacja współrzędnych realizowana jest jako złożenie od jednego do trzech obrotów.
Szczególną rolę w obserwacjach astronomicznych odgrywa czas. Istnieje kilka sposobów pomiaru czasu określanych mianem skal czasu. Podstawową rolę pełnią skala czasu słonecznego średniego oraz skala czasu gwiazdowego. Są to skale lokalne (tzn. zależne od miejsca obserwacji), które definiuje się jako kąt godzinny fikcyjnego słońca średniego (czas słoneczny) oraz kąt godzinny punktu barana (czas gwiazdowy). Wyróżniono skalę czasu słonecznego obserwowanego w Greenwich, nazwano ją czasem uniwersalnym UT.
Słowa kluczowe: układ współrzędnych horyzontalnych, godzinnych, równikowych, ekliptycznych, galaktycznych, średni czas słoneczny, czs gwiazdowy, równanie czasu, czas uniwersalny, czas strefowy. [a] ↱

[a][Modyfikowano AD 2011, marzec, 21]

4.1 Układy współrzędnych wykorzystywane w astronomii

Umówiliśmy się, że sfera niebieska to sfera o promieniu jednostkowym. O jej środku powiedzieliśmy jedynie tyle, że jest tam gdzie znajduje się obserwator, np. na powierzchni Ziemi. Skoro tak to w dowolnym miejscu gdzie znajduje się obserwator da się rozpiąć sferę niebieską i skojarzyć z nią jakiś układ współrzędnych. Dlatego mówimy o:

- sferze niebieskiej *topocentrycznej* czyli o środku na powierzchni Ziemi,
- sferze niebieskiej *geocentrycznej* o środku w centrum Ziemi,
- sferze niebieskiej *heliocentrycznej* o środku w centrum Słońca,
- sferze niebieskiej *lunocentrycznej* o środku w centrum Księżyca,
- etc.

Z każdą z tych sfer da się związać cały legion układów współrzędnych sferycznych, ale w praktyce najczęściej wykorzystywanymi są:

- układ horyzontalny,
- układ godzinny,
- układ ekliptyczny,
- układ galaktyczny.

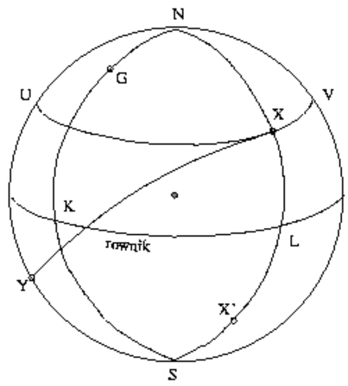
Każdy układ współrzędnych sferycznych możne być zastąpiony przez jego prostokątny ekwiwalent (odpowiednio lewo lub prawo skrętny). W astronomii mamy zatem do dyspozycji bardzo wiele najrozmaitszych układów współrzędnych, wykorzystywanych zależnie od potrzeby, a w celu ułatwienia astronomom współpracy koniecznym jest wprowadzenie pewnych standardów. ↱

4.2 Współrzędne sferyczne na powierzchni Ziemi

Zanim omówimy podstawowe astyronomiczne układy współrzędnych służące do określania kierunków do ciał niebieskich, przypomnimy sobie układ współrzędnych służący do ustalenia położenia obserwatora na powierzchni Ziemi.

W pierwszym przybliżeniu bryłę ziemską można traktować jako kulę wirującą w tempie jednego obrotu na dobę wokół ustalonej osi obrotu. Oś ta przecina ziemską powierzchnię w *biegunach geograficznych* N i S (rysunek 5.4). Koło wielkie, którego biegunami są punkty N i S nosi nazwę *równika*. Półkola wielkie prostopadłe do równika przecinające się w punktach N i S nazwamy *południkami długości*, lub krótko południkami.

Punkt N w naturalny sposób narzuca się jako biegun sferycznego układu współrzędnych do określania położenia punktów na powierzchni Ziemi, czyli na sferze o środku w centrum masy Ziemi. Wówczas odległość sferyczna dowolnego punktu na powierzchni Ziemi od bieguna N, stanowi miarę współrzędnej biegunowej θ definiowanego układu. Współrzędna azymutalna ψ tego układu będzie określona je;sli dokonamy wyboru koła wielkiego, ustalającego początek rachuby tej współrzędnej. Moglibyśmy tu wybrać którekolwiek z kół przechodzących przez bieguny N, S; ma ono rangę południka głównego



Rysunek 4.1: Układ współrzędnych sferycznych (λ, ϕ) na powierzchni Ziemi. Szerokość geograficzna ϕ punktu X równa jest łukowi XL. Długość geograficzna λ punktu X jest identyczna z kątem dwuściennym pomiędzy południkiem NG (południk Greenwich) a południkiem NX, na którym leży punkt X.

(zerowego) i na rysunku 5.4 reprezentuje go półkole $NGKS$ Takiego wyboru z natury rzeczy arbitralnego, dokonano mocą międzynarodowej ugody w XIX stuleciu, kiedy to jako *południk zerowy* wybrano ten, który przechodził przez podstawowy pozycyjny teleskop Królewskiego Obserwatorium w Greenwich.

Zatem, położenie dowolnego punktu X na powierzchni Ziemi wyznaczone jest za pomocą łuku koła wielkiego NX i kąta sferycznego GNX. Sferyczne współrzędne punktu X, tradycyjnie oznaczane greckimi literami ϕ, λ — *szerokość* ϕ oraz *długość* λ — definiowane są z pomocą równań

$$\begin{aligned} \phi &= 90^\circ - NX \\ \lambda &= GNX \end{aligned} \tag{4.1}$$

Łuk NX nazywany bywa odległością biegunową punktu X.

Rozciągnijmy łuk NX do pełnego południka przecinającego równik w punkcie L, jest jasne, że wszystkie punkty na tym samym południku mają jednakową długość λ. Poprowadźmy małe koło UXV tak by również jego biegunami były punkty N i S. Wszystkie punkty leżące na takim kole małym (zwanym *równoleżnikiem* szerokości) mają jednakową szerokość ϕ. Równoleżniki szerokości wraz z południkami długości tworzą na powierzchni Ziemi siatkę układu współrzędnych geograficznych.

Z równań (4.1) wynika, że punkty leżące powyżej równika mają szerokości dodatnie, zaś leżące poniżej ujemne. W przypadku długości, mocą tradycji, za dodatnie przyjmuje się długości punktów położonych na wschód od Greenwich. Mamy zatem następującą dziedzinę współrzędnych (λ, ϕ)

$$\begin{aligned} -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ \end{aligned} \tag{4.2}$$

Możemy jednak natrafić na inne ustalenia dotyczące współrzędnych ϕ, λ: np. λ liczona w kierunku wschodnim przyjmuje wartości z przedziału $0, 360$. Bywają i takie konwencje, w których obie współrzędne zawsze podawane są jako liczby dodatnie, którym w celu jednoznacznego określenia położenia towarzyszą litery N,S,W,E np. (52 N, 15 E) oznacza położenie punktu o szerokości 52 stopnie na północ od równika, i długości 15 stopni na wschód od Greenwich.

4.2.1 Wyznaczenie odległości pomiędzy punktami na sferze

Dysponując współrzędnymi sferycznymi punktów X i Y na powierzchni Ziemi, możemy obliczyć ich wzajemną odległość kątową i liniową. Niech będzie, że dane są punkty $X(\lambda, \phi)$ i $Y(\lambda', \phi')$. Odległość między nimi mierzona jest wzdłuż linii geodezyjnej, czyli wzdłuż boku XY trójkąta sferycznego NXY. W trójkącie tym znamy następujące elementy

$$
\begin{array}{ll}
NX = 90^\circ - \phi & NY = 90^\circ - \phi' \\
GNX = \lambda & YNG = -\lambda' \\
YNX = \lambda - \lambda' &
\end{array}
$$

Korzystając ze wzoru cosinusów (3.2) mamy

$$
\cos XY = \sin\phi \sin\phi' + \cos\phi \cos\phi' \cos(\lambda - \lambda') \tag{4.3}
$$

Odległość XY wyznaczona z tego wzoru za pomocą funkcji arcus cosinus wyrażona bédzie w jednostkach kątowych: w radianach, w stopniach. Chcąc przejść do jednostek liniowych (jednostek długości), trzeba znać rozmiary Ziemi i z ich pomocą dokonać odpowiedniej zamiany jednostek. Mierząc długość w *milach morskich* $(1\ rmmila = 1.855\ \mathrm{km})$ problem upraszcza się, bowiem jednostkę tę wybrano tak by łuk na powierzchni Ziemi o długości 1 mili morskiej odpowiadał kątowi $1'$ rozpiętemu względem środka Ziemi.

4.3 Układ współrzędnych równikowych

Astronomiczny układ współrzędnych sferycznych zdefiniowany w bardzo podobny do omówionego wyżej dla powierzchni Ziemi to *układ współrzędnych równikowych* (układ równikowy). [1] W układzie równikowym położenia obiektów określone są współrzędnymi deklinacja δ i rektascensja α. Współrzędne te mają bardzo pożądaną własność — ich wartości nie ulegają zmianie na skutek ruchu wirowego Ziemi. [2] Rysunek 4.7 ilustruje sferę niebieską wraz z umieszczoną w jej wnętrzu kulą ziemską. Przedłużenie osi obrotu Ziemi NS, przebija sferę niebieską w punktach P i Q. Noszą one nazwę północnego i południowego *bieguna świata* (bieguna niebieskiego). Natomiast, rozciągnięta w przestrzeni płaszczyzna równika ziemskiego przecina sferę niebieską wzdłuż koła wielkiego zwanego *równikiem świata* (równikiem niebieskim).

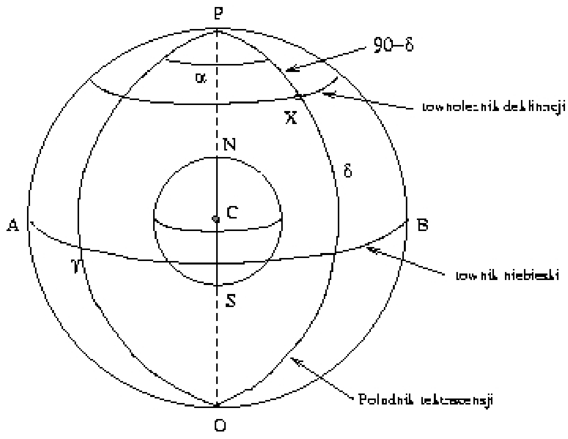
Siatkę współrzędnych deklinacji i rektascensji na sferze niebieskiej można narysować zupełnie analogicznie do siatki współrzędnych ziemskich. W szczególności mamy tu równoleżniki deklinacji czyli koła małe równoległe do równika niebieskiego, oraz południki rektascensji będące półkolami wielkimi przecinającymi się w biegunach niebieskich.

Dla dowolnego punktu X na sferze niebieskiej jego współrzędne równikowe definiujemy jako

$$
\begin{aligned}
\delta &= 90^\circ - PX \\
\alpha &= \Upsilon PX
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

[1] Pomimo wprowadzenia w roku 1991 drogą rezoluzji przez MUA nowych koncepcji astrometrycznych, jest to nadal najważniejszy układ współrzędnychwykorzystywany w astronomii.

[2] Wartości rektascensji i deklinacji ulegają zmianom z innych powodów, powiemy o nich na jednym z następnych wykładów.



Rysunek 4.2: Układ współrzędnych sferycznych równikowych (α, δ). Deklinacja δ jest miarą wysokości obiektu nad równikiem niebieskim, rektascensja α określa kątową odległość astronomicznego południka obiektu, od południka przechodzącego przez punkt równonocy wiosennej Υ. Dla obserwatora znajdującego się na północnym biegunie P świata, kierunek rachuby rektascensji jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Jest to kierunek zgodny z pozornym, rocznym ruchem Słońca na sferze.

gdzie Υ oznacza punkt na równiku niebieskim, pełni on rolę punktu zerowego miary rektascensji. Wybrano go drogą konwencji tak, by znajdował się możliwie blisko położenia Słońca w momencie równonocy wiosennej (około 21 marca), kiedy to Słońce przechodzi przez równik niebieski z półsfery południowej na półsferę północną. Dlatego punkt Υ nazywany jest *punktem równonocy*. Ponieważ w czasach kiedy zaproponowano tę konwencję punkt Υ położony był w gwiazdozbiorze Barana, nazwano go również *punktem barana*.

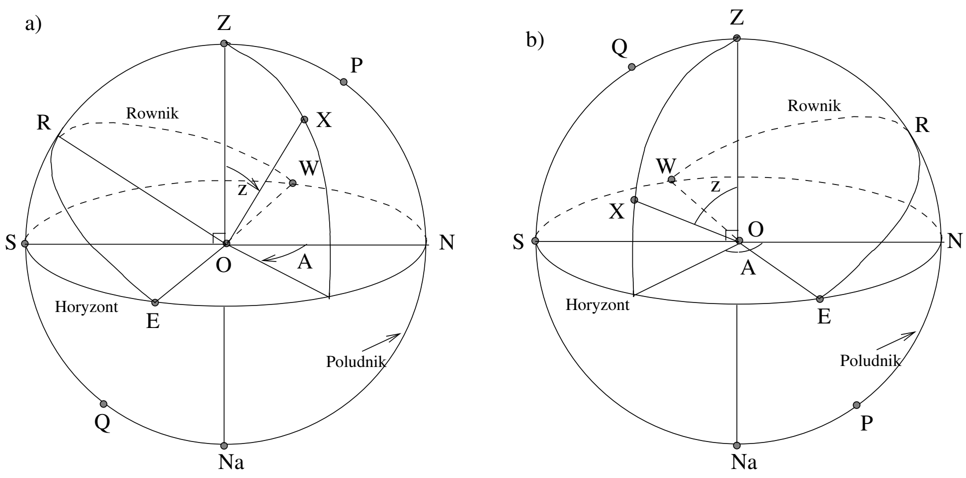
Współrzędna *rektascensja* mierzona jest wzdłuż równika, w kierunku zgodnym z kierunkiem pozornego ruchu Słońca na sferze, czyli w kierunku antyzegarowym dla obserwatora znajdującego się na północnym biegunie świata P. *Deklinację* mierzymy w płaszyźnie południka niebieskiego. Wartości jakie mogą przyjmować obie współrzędne należą do przedziałów

$$\begin{aligned} &-90^\circ \le \delta \le 90^\circ \\ &0^\circ \le \alpha \le 360^\circ \end{aligned} \tag{4.5}$$

Jednak tradycyjną miarą rektascensji nie są stopnie ale jednostki czasu. Pomiędzy jednostkami czasowymi i kątowymi mamy proste zależności, mianowicie, jeżeli przyjmiemy, że $24^h = 360^\circ$, to łatwo sprawdzić, że

$$\begin{array}{ll} 1^h = 15^\circ & 1^\circ = 4^m \\ 1^m = 15' & 1' = 4^s \\ 1^s = 15'' & 1'' = 1/15^s \end{array} \tag{4.6}$$

Obok sferycznych, wykorzystywane są także równikowe współrzędne prostokątne. Jeśli C będzie środkiem sfery niebieskiej, kierunek osi z wybierzemy wzdłuż odcinka CP, w kierunku punktu Υ skierujemy oś x, natomiast oś y wybierzemy tak by otrzymać układ prawoskrętny, wówczas dysponując współrzędnymi α, δ punktu X, jego równi-



Rysunek 4.3: Układ współrzędnych horyzontalnych na szerokościach geograficznych a) północnej i b) południowej.

kowe współrzędne prostokątne (x, y, z) dane są poprzez zależności

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta\cos\alpha \\ y &= \cos\delta\sin\alpha \\ z &= \sin\delta \end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie jak poprzednio, promień sfery wybrano jako jednostkę długości. ↱

4.4 Układ współrzędnych horyzontalnych

Niech dana jest sfera niebieska rozpięta nad obserwatorem w miejscu O (rysunek 4.3a), znajdującym się gdzieś na powierzchni północnej półkuli ziemskiej. Na powierzchni Ziemi naturalnym kierunkiem, łatwym do ustalenia, jest kierunek pionu (kierunek lokalnej grawitacji), który przebija sferę w punkcie Z zwanym *zenitem* miejsca obserwacji. Punkt diametralnie mu przeciwny nazwano *nadirem* (rysunek 4.3a).

Koło wielkie, którego biegunami są zenit i nadir nazwano *horyzontem* niebieskim, horyzontem miejsca obserwacji, lub krótko horyzontem. Horyzont dzieli sferę na półsferę widoczną przez obserwatora oraz na półsferę dlań niewidoczną. Linia przechodząca przez obserwatora O, i równoległa do ziemskiej osi rotacji przebija sferę w punktach P i Q zwanych północnym i południowym *biegunem świata*. Rysunek 4.3b przedstawia sferę niebieską dla obserwatora z południwej półkuli Ziemi. Rysunek dla półkuli północnej jest nam wyraźnie bardziej przyjazny, ale to co powiemy poniżej stosuje się do obu przypadków.

Ponieważ Ziemia wiruje, obserwator dostrzega ciągłą zmianę położeń ciał niebieskich. Dobowy ruch Ziemi odbywa się z zachodu na wschód, powodując wrażenie obrotu sfery niebieskiej w kierunku odwrotnym, wokół osi POQ równoległej do osi ruchu wirowego Ziemi.

Koło wielkie ZP nosi miano *południka miejscowego*, (*południka obserwatora*), jego płaszczyzna jest prostopadła do horyzontu i przecina horyzont w punktach N i S leżących na tej samej średnicy. Sa to punkty północy i południa (N, S). Punkty wschodu i zachodu

(E, W) znajdują się w odległości kątowej $90°$ od S i N. Punkty N, E, S, W nazywane są *punktami kardynalnymi* horyzontu.

Układ współrzędnych horyzontalnych zdefiniowany jest z pomocą bieguna Z znajdującego się w zenicie miejsca obserwacji. Jako koło wielkie odniesienia wybrano koło ZP, (patrz rysunek 4.3a). Przy takich ustaleniach, poza przypadkami dotyczącymi zenitu i nadiru, współrzędne horyzontalne dowolnego punktu X, czyli *odległość zenitalna* z oraz *azymut* A definiowane są jako

$$\begin{aligned} z &= ZX \\ A &= PZX \end{aligned} \tag{4.8}$$

przy czym

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 180° \\ 0° \leq A \leq 360° \end{aligned}$$

Jak widzimy, azumut A mierzony jest od punktu północy ku punktowi wschodu E i przyjmuje wartości z przedziału $0, 360°$. Definicja ta jest jednak jedną z kilku konwencji stosowanych przy określaniu azymutu. W przyjętej przaz nas definicji azymut rośnie w kierunku zegarowym dla obserwatora znajdującego sie w zenicie, ale odpowiadający tej konwencji układ współrzędnych prostokątnych jest lewoskrętny.

Koła wielkie przecinające się w zenicie Z, nazwano *kołami wierzchołkowymi* (*wertykałami*). Wertykały przechodzące przez punkty W i E nazwano *pierwszymi wertykałami*. Punkty leżące na tym samym wertykale mają identyczny azymut. Koła małe o biegunach w zenicie Z (równoleżniki wysokości) nazywane są *almukantaratami*. Punkty leżące na tm samym almukantaracie mają identyczną wysokość.

Obok odległości zenitalnej z, alternatywnie stosowana jest tzw. *wysokość* h, określona zależnością

$$h = 90° - z \tag{4.9}$$

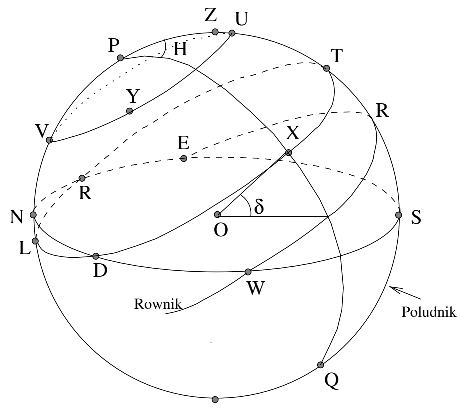
przy czym

$$-90° \leq h \leq 90°$$

Przy założeniu sferycznego kształtu Ziemi, kierunek OZ, pokrywa się z radialnym kierunkiem od środka Ziemi do obserwatora. Kierunek ten tworzy z równikiem kąt ϕ równy szerokości geograficznej obserwatora. Oznacza to, że łuk PZ, czyli odległość zenitalna bieguna świata wynosi

$$PZ = 90° - \phi \tag{4.10}$$

Układ współrzędnych horyzontalnych daje się łatwo zrealizować na powierzchni Ziemi. Jego podstawowe kierunki na punkty Z i P można ustalić z pomocą bezpośrednich obserwacji. Ma on jednak pewne wady, najważniejsza to zależność azymutu i wysokości obiektu od wyboru miejsca obserwacji. Są to zatem współrzędne lokalne i dlatego wykorzystuje się je najczęściej jako współrzędne topocentryczne. Inna wada to zmienność w czasie wartości azymutu i wysokości obiektu wraz z ruchem dobowym sfery. Przyczyna tkwi w wyborze zenitu na biegun układu współrzędnych, punktu związanego z miejscem obserwacji na powierzchni Ziemi. Zenit (biegun układu) nie zajmuje stałego miejsca pośród gwiazd, przemieszcza się na tle sfery niebieskiej w wyniku ruchu obrotowego Ziemi.



Rysunek 4.4: Układ współrzędnych godzinnych $\mathcal{H}, \delta$, ilustracja ruchu dobowego gwiazd X i Y.

4.5 Współrzędne godzinne

Układ współrzędnych godzinnych to układ o biegunie w punkcie P — zwanym biegunem świata (rysunek 4.4). Rolę koła odniesienia dla drugiej współrzednej pełni południk miejscowy PZ. Tak zdefiniowany układ nadal jest związany z miejscem obserwacji ale w mniejszym stopniu, bowiem jedna z jego współrzędnych, deklinacja nie zmienia się wskutek ruchu wirowego sfery. Druga współrzędna, kąt godzinny zależy od wyboru miejsca obserwacji i czasu.
Niech sfera niebieska z rysunku 4.4 ma środek w jakimś miejscu obserwacji, natomiast punkty Z, P, E, W, S mają znaczenie dokładnie takie samo jak na rysunku 4.3. Rysunek 4.4 ilustruje sferę dla obserwatora z półkuli północnej, nie jest to jednak konieczne jeśli chodzi o podane niżej definicje.

Dla danej gwiazdy X, o ile nie znajduje się w biegunach omawianego układu, jej *deklinacja* δ i *kąt godzinny* $\mathcal{H}$ definiowane są następująco

$$\begin{aligned} \delta &= 90^\circ - PX \\ \mathcal{H} &= ZPX \\ -90^\circ \leq \delta &\leq 90^\circ \\ 0 \leq \mathcal{H} &\leq 24^h \end{aligned} \tag{4.11}$$

Łuk PX nazywany jest północną odległością biegunową gwiazdy. Kąt sferyczny ZPX, czyli kąt godzinny $\mathcal{H}$ mierzymy w kierunku punktu zachodu W.

Półokręgi przechodzące przez bieguny świata np. PXQ, nazwano *południkami* kąta godzinnego, *kołami godzinnymi*. Południk odpowiadający kątowi godzinnemu o wartości zero jest południkiem miejscowym danego obserwatora.

Małe koła o biegunach w P i Q, nazywamy *równoleżnikami deklinacji*. Ponieważ ruch dobowy gwiazd jest równoważny jednostajnemu ruchowi obrotowemu sfery wokół osi PQ, zatem jak widać na rysunku 4.4, dobowy ruch gwiazdy X przebiega po łuku $XDLRTX$, czyli po równoleżniku odpowiadającemu deklinacji tej gwiazdy.

W ciągu doby gwiazda przemieszcza się w kierunku zachodnim od punku X do punktu D, w którym zachodzi, po czym osiąga największą odległość pod horyzontem w punkcie L (*kulminacja dolna*), następnie przecina horyzont w R gdzie wschodzi i zwiększa swoją wysokość nad horyzontem do wartości maksymalnej w punkcie (T) na południku obserwatora (*kulminacja górna*,*górowanie*, *tranzyt*). Dalej gwiazda zmniejsza swoją wysokość powracając do punktu wyjściowego X. W trakcie ruchy dobowego gwiazda opisuje z jednostajną szybkością równoleżnik deklinacji: podczas ruchu jej deklinacja jest stała a kąt godzinny zmienia się jednostajnie.

W przeciwieństwie do układu horyzontalnego, w układzie godzinnym łatwo przewidzieć położenie gwiazdy. By maksymalnie uprościć rachunki kąt godzinny wyrażany jest w mierze czasowej a nie łukowej. Z rysunku 4.4 widać, że kąt godzinny gwiazdy zmienia się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Oznacza to, że układ godzinny jest układem lewoskrętnym, czego nie da się uniknąć jeśli kąt godzinny ma wzrastać z czasem.

Gwiazda o deklinacji równej zeru, leży na równiku niebieskim. W ruchu dobowym wschodzi w punkcie wschodu E, następnie przebywa nad horyzontem prawie 12 godzin po czym zachodzi w punkcie zachodu W. [3] Część gwiazd o deklinacjach ujemnych wschodzi na południowym wschodzie, przebywa nad horyzontem krócej niż 12 godzin po czym zachodzi na południowym zachodzie.

Gwiazdy położone podobnie jak punkt X z rysunku 4.4, przebywają nad horyzontem dłużej aniżeli 12 godzin.[4] Jak widać na tym rysunku, przy dostatecznie dużej deklinacji gwiazda nigdy nie będzie wschodzić i zachodzić np. gwiazda położona w punkcie Y. Odpowiadający jej równoleżnik UYV, znajduje się w całości nad horyzontem. Gwiazdy o takich własnościach nazywane są gwiazdami *okołobiegunowymi*, a ich deklinacje czynią zadość warunkowi

$$\delta > 90^\circ - \phi \tag{4.12}$$

Istnieje także obszar sfery, który nigdy nie jest widoczny dla danego obserwatora. Na mocy symetrii odpowiedni warunek ma postać

$$-\delta > 90^\circ - \phi \tag{4.13}$$

Nierówności te dotyczą wyłącznie obserwatorów z półkuli północnej.

Pokażemy teraz w jaki sposób można transformować współrzędne pomiędzy układem horyzontalnym i godzinnym. Problem sprowadza się do rozwiązania trójkąta sferycznego PZX pokazanego w powiększeniu na rysunku 4.5. Tworzą go dany obiekt X oraz bieguny rozważanych układów współrzędnych, czyli biegun świata P i zenit miejsca obserwacji Z. Z definicji współrzędnych horyzontalnych i godzinnych, równania (4.8) i (4.12), mamy

$$\begin{array}{ll} PZX = 360^\circ - A & ZPX = \mathcal{H} \\ ZX = z & PX = 90^\circ - \delta \end{array}$$

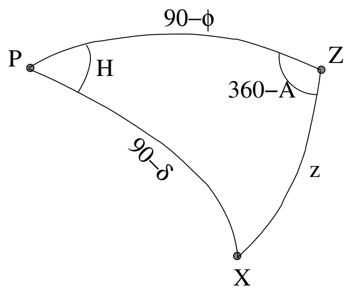
Mamy także, że $PZ = 90^\circ - \phi$, gdzie ϕ jest szerokością miejsca obserwacji. Stosując dwukrotnie do trójkąta PZX wzór cosinusów dostaniemy

$$\sin\delta = \cos z \sin\phi + \sin z \cos\phi \cos A \tag{4.14}$$
$$\cos z = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\mathcal{H} \tag{4.15}$$

Równania te wystarczają do przeliczenia współrzędnych horyzontalnych na godzinne i odwrotnie. Problemy normalizacyjne towarzyszące obliczeniom kątów A i $\mathcal{H}$, można

[3] Czy aby na pweno?

[4] Rozważania te dotyczą wyłącznie obserwatorów z półkuli północnej.



Rysunek 4.5: Trójkąt paralaktyczny PZX, boki i kąty tego trójkąta opisane są przez współrzędne gwiazdy X wyrażone w układzie godzinnym $(\mathcal{H}, \delta)$ i horyzontalnym (A, z). Parametrem dodatkowym jest szerokość geograficzna ϕ miejsca obserwacji.

roztrzygać w oparciu o nierówności

$$\begin{array}{lcl} 180^\circ \leq A \leq 360^\circ & \Leftrightarrow & 0^h \geq \mathcal{H} \leq 12^h \\ 0^\circ < A < 180^\circ & \Leftrightarrow & 12^h < \mathcal{H} < 24^h \end{array} \tag{4.16}$$

4.6 Współrzędne ekliptyczne

Ruch orbitalny Ziemi i Księżyca wokół Słońca można wykorzystać w celu zdefiniowania innego ważnego układu współrzędnych szczególnie przydatnego w zagadnieniach dynamiki Układu Słonecznego.

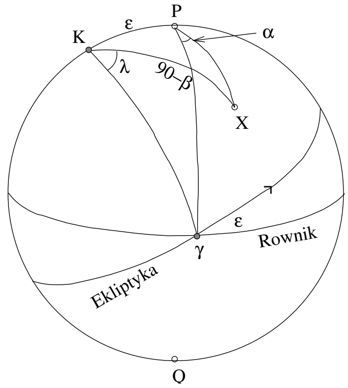
Płaszczyzna orbity Ziemi przecina sferę niebieską wzdłuż koła wielkiego zwanego *ekliptyką*.[5] Podczas orbitalnego ruchu Ziemi, w pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że ziemska oś obrotu zachowuje stały kierunek względem gwiazd, tworząc kąt około $23\overset{\circ}{.}5$ z normalną do płaszczyzny ekliptyki. Oznaczamy go literą ε i nazywamy nachyleniem ekliptyki do równika.

Na skutek orbitalnego ruchu Ziemi, dla obserwatora na powierzchni Ziemi, Słońce przemieszcza się na tle gwiazd po ekliptyce, dokonując pełnego obiegu w ciągu jednego roku zwrotnikowego. Na rysunku 4.6 widzimy równik, ekliptykę oraz ich bieguny P i K odpowiednio. Wobec tego co powiedziano wyżej łuk $KP = \varepsilon$, a kąt sferyczny pomiędzy płaszczyznami równika i eklipltyki również wynosi ε. Na rysunku 4.6 zaznaczono kierunek pozornego ruchu Słońca po ekliptyce, ruch ten przebiega antyzegarowo jeśli patrzymy na Słońce z północnego bieguna ekliptyki. Ruch ciał niebieskich zgodny z takim kierunkiem nazywany jest ruchem *prostym*, ruch w przeciwną stronę nazywa się ruchem *wstecznym*.

Równik i ekliptyka przecinają się w dwóch punktach, jednym z nich jest punkt równonocy wiosennej Υ (rysunek 4.6). Jak pamiętamy punkt ten jest punktem zerowym kątowej miary rektascensji.

Punkt K pełni rolę bieguna układu współrzędnych ekliptycznych, natomiast jako koło odniesienia dla rachuby współrzędnej azymutalnej tego układu wybrano koło wielkie $K\Upsilon$. Jeśli wyłączymy z rozważań bieguny omawianego układu, dla dowolnego punktu X

[5] Bardziej precyzyjna definicja ekliptyki zostanie podana w jednym z następnych rozdziałów.



Rysunek 4.6: Do definicji układu ekliptycznego. Opis w tekście.

na sferze, jego *szerokość ekliptyczna* β i *długość ekliptyczna* λ definiowane są następująco

$$\begin{aligned} \beta &= 90° - KX \\ \lambda &= \Upsilon KX \end{aligned} \tag{4.17}$$

przy czym

$$\begin{array}{rcl} -90° \leq & \beta & \leq 90° \\ 0 \leq & \lambda & \leq 360° \end{array}$$

Długości ekliptyczne rosną w kierunku ruchu prostego, dla Słońca współrzędna ta wzrasta monotonicznie. W przypadku planet w efekcie złożenia ich ruchów prostych z ruchem orbitalnym Ziemi, ruch wypadkowy dla obserwatora na powierzchni Ziemi może okazać się ruchem wstecznym.

Związki pomiędzy współrzędnymi ekliptycznymi i równikowymi można łatwo wyprowadzić rozwiązując trójkąt PKX z rysunku 4.6. Niech obiekt X, obok współrzędnych ekliptycznych (λ, β) ma współrzędne równikowe (α, δ). Boki trójkąta PKX wynoszą

$$KP = \varepsilon \qquad PX = 90° - \delta \qquad KX = 90° - \beta$$

Dalej, ponieważ ΥKP i ΥPK są kątami prostymi to

$$PKX = 90° - \lambda \qquad KPX = 90° + \alpha$$

Z pomocą tych pięciu elementów trójkąta KPX, posługując się standardowymi wzorami trygonometrii sferycznej można przeliczać współrzędne z jednego układu do drugiego.

Bardziej ogólne i bezpośrednie podejście do tego zagadnienia wymaga zastosowania współrzędnych prostokątnych (patrz rysunek 6.1). Prostokątny układ współrzędnych równikowych (x, y, z) określony jest przez wybór osi x w kierunku punktu Υ, osi z w kierunku bieguna świata P oraz osi y tak by układ był prawoskrętny.

Prostokątny układ współrzędnych ekliptycznych $(\xi, \eta\ \zeta)$ ma oś ξ skierowaną w kierunku punktu Υ, oś ζ w kierunku bieguna ekliptyki K natomiast oś η skierowana jest ku punktowi o współrzędnych $(\lambda = 90°, \beta = 0)$.

Prostokątne współrzędne punktu X w układzie ekliptycznym dane są standardowymi formułami

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\beta\cos\lambda \\ \eta &= \cos\beta\sin\lambda \\ \zeta &= \sin\beta \end{aligned} \tag{4.18}$$

Transformacja z jednego układu do drugiego równoważna jest transformacji obrotu o kąt ε wokół wspólnej osi x, ξ. Łatwo sprawdzić, że formuły transformacyjne mają postać

$$\begin{aligned} \xi &= x & x &= \xi \\ \eta &= y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon & y &= \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon \\ \zeta &= -y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon & z &= \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon \end{aligned} \tag{4.19}$$

Analogiczne do współrzędnych danych równaniami (4.18), współrzędne równikowe punktu X dane są przez

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta\cos\alpha \\ y &= \cos\delta\sin\alpha \\ z &= \sin\delta \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia oraz (4.18) do równań (4.19) otrzymamy związki

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \end{aligned} \tag{4.20}$$

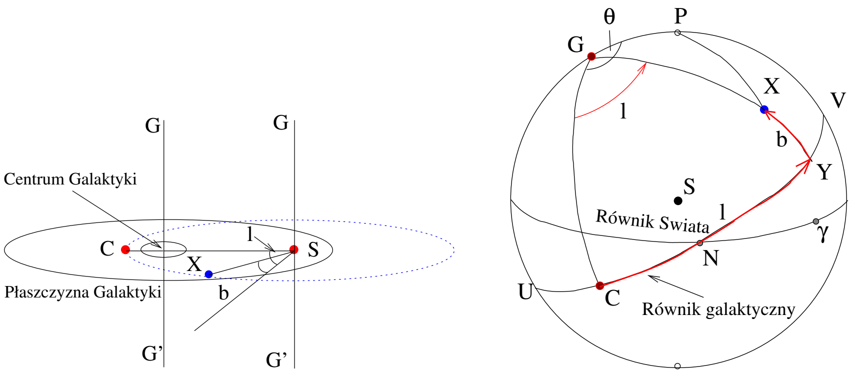
$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda \end{aligned} \tag{4.21}$$

Układy równań (4.20) i (4.21) w pełni pozwalają na transformacje $(\alpha, \delta) \rightarrow (\lambda, \beta)$ i odwrotnie.

4.7 Współrzędne galaktyczne

Dla potrzeb astronomii gwiazdowej, w badaniach dotyczących rozkładów położeń i ruchów gwiazd, dogodnymi współrzędnymi są współrzędne galaktyczne. Układ takich współrzędnych wyznacza się w zwykły sposób w oparciu o bieguny galaktyczne oddalone o 90° od płaszczyzny Galaktyki.

Wyznaczenia położenia płaszczyzny Galaktyki dokonano w oparciu o statystyczną redukcję dużego materiału obserwacyjnego. Początkowo były to optyczne obserwacje gwiazd, do których po II-giej Wojnie Światowej włączono dane pochodzące obserwacji techniką radiową w linii 21 cm. Poprawiło to wyraźnie precyzję wyznaczenia płaszczyzny Galaktyki a co się z tym wiąże i stowarzyszonych z nią biegunów i w rezultacie doprowadziło do rewizji układu współrzędnych galaktycznych. W roku 1959 w formie stosownej rezolucji, Międzynarodowa Unia Astronomiczna (MUA) wprowadziła nową definicję



Rysunek 4.7: a) Poglądowa ilustracja definicji współrzędnych galaktycznych heliocentrycznych. b) Układ współrzędnych galaktycznych. Opis w tekście.

układu galaktycznego. Od poprzedniej, nowa definicja różni się dokładniejszym wyznaczeniem płaszczyzny Galaktyki oraz wyborem punktu o zerowej długości galaktycznej. Wybrano w tym celu punkt w pobliżu centrumm Galaktyki, a nie jak to miało miejsce wcześniej, punkt przecięcia równika świata i równika galaktycznego. Ale jak to jednak bywa w przypadkach zmian, przez pewien czas stosowano dwa układy galaktyczne, co było i jest nadal przyczyną drobnych nieporozumień.

Na rysunku 4.7b punkt P oznacza biegun świata, koło wielkie $UCNV$ leży w płaszczyźnie Galaktyki i przecina równik świata w punkcie N. Koło to nosi nazwę *równika galaktycznego*. Punkt G jest północnym biegunem równika galaktycznego, punkt C reprezentuje zrzutowane na sferę niebieską centrum Galaktyki. [6]

Niech X będzie położeniem dowolnej gwiazdy. Łuk GX, po przedłużeniu przecina równik galaktyczny w punkcie Y. Długość łuku XY jest równa szerokości galaktycznej punktu X. Jest ona dodatnia dla północnej półsfery galaktycznej. Długość galaktyczna punktu X jest równa łukowi CY, mierzonemu we wskazanym na rysunku 4.7b kierunku. Formalna definicja współrzędnych galaktycznych ma postać

$$\begin{aligned} b &= 90^\circ - GX \\ l &= CGX \end{aligned} \tag{4.22}$$

gdzie , bl — są szerokością i długością galaktyczną. Przy czym

$$\begin{aligned} -90^\circ &\leq b \leq & 90^\circ \\ 0 &\leq l \leq & 360^\circ \end{aligned}$$

W celu dokonania transformacji współrzędnych galaktycznych np. na współrzędne równikowe musimy znać współrzędne punktów G i C. Niech (α_G, δ_G) będą współrzędnymi bieguna galaktycznego G. Ponieważ odległość $GC = 90^\circ$, położenie punktu C będzie określone za pomocą jego kąta pozycyjnego θ liczonego względem bieguna galaktycznego G, patrz trójkąt sferyczny PGC z rysunku 4.7b. Dla epok $B1950$ oraz $J2000$ war-

[6] Chodzi oczywiście o kierunek ku centrum Galaktyki względem obserwatora znajdującego się w środku sfery.

tości trzech kątów $(\alpha_G, \delta_G, \theta)$ wynoszą

$$\begin{array}{ll} \mathrm{B1950} & \mathrm{J2000} \\ \alpha_G = 12^h 49^m & \alpha_G = 12^h 51^m 26.282^s \\ \delta_G = 27°24' & \delta_G = 27°07'42.01'' \\ \theta = 123° & \theta = 122.932° \end{array} \tag{4.23}$$

Epoki $B1950, J2000$ podano tu ze względu na precesyjny ruch bieguna świata. Współrzędne galaktyczne obliczone za pomocą wzorów podanych niżej będą więc również odniesione do układów współrzędnych z odpowiedniej epoki, co zawsze należy wyraźnie zaznaczyć.

Wyprowadzimy teraz formuły transformacyjne pomiędzy współrzędnymi (α, δ) i (l, b). Rozważmy trójkąt sferyczny GPX (rysunek 4.7b), w którym punkt X ma współrzędne równikwe (α, δ) a którego współrzędne galaktyczne wynoszą (b, l). Możemy łatwo ustalić, że

$$\begin{array}{lll} PX = 90° - \delta & GX = 90° - b & GP = 90° - \delta_G \\ GPX = \alpha - \alpha_G & PGX = \theta - l & \end{array}$$

Stosując wzór cosinusów do boku GX, mamy

$$\sin b = \sin\delta_G \sin\delta + \cos\delta_G \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G) \tag{4.24}$$

A ze wzorów sinusów i wzoru pięcioelementowego będzie

$$\begin{array}{l} \cos b \sin(\theta - l) = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_G) \\ \cos b \cos(\theta - l) = \cos\delta_G \sin\delta - \sin\delta_G \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G) \end{array} \tag{4.25}$$

Równania (4.24) i (4.25) pozwalają na jednoznaczne obliczenie b i l. Transformacja odwrotna również daje się wyprowadzić z trójkąta GPX, równania mają postać

$$\begin{array}{l} \sin\delta = \sin\delta_G \sin b + \cos\delta_G \cos b \cos(\theta - l) \\ \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_G) = \cos b \sin(\theta - l) \\ \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G) = \cos\delta_G \sin b - \sin\delta_G \cos b \cos(\theta - l) \end{array} \tag{4.26}$$

Powiedziano wcześniej, że wprowadzony wyżej układ współrzędnych galaktycznych jest tzw. "nowym" układem. W "nowym" układzie współrzędne galaktyczne przyjęto oznaczać jako (l, b). Jednakże jeśli chcemy w sposób oczywisty podkreślić ich "nowość" oznaczamy je wówczas jako (l^{II}, b^{II}). W "starym" układzie, dla odróżnienia, współrzędne galaktyczne obiektu oznaczane są jako (l^I, b^I). Są to współrzędne, w których długość galaktyczna liczona jest od punktu N a nie od C (rysunek 4.7b).

Rozdział 5

Czas gwiazdowy i czas słoneczny

5.1 Czas gwiazdowy i rektascensja

Spójrzmy na geocentryczną sferę niebieską przedstawioną na rysunku 5.1, dla ułatwienia rozważań, w jej wnętrzu umieszczono sferyczną Ziemię. Niech p i q oznaczają geograficzne bieguny ziemskie, odcinki Cp i Cq po przedłużeniu przebiją niebieską sferę w punktach P, Q, w północnym i południowym biegunie świata. Niech g oznacza położenie Greenwich a punkt m oznacza położenia obserwatora na powierzchni Ziemi. Długość geograficzną obserwatora oznaczymy przez λ.

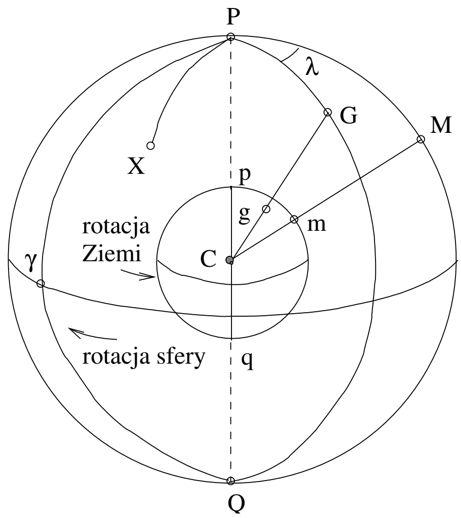
Półproste Cg i Cm przebijają sferę niebieską w punktach G i M odpowiednio. Punkt G jest oczywiście zenitem horyzontu dla obserwatora znajdującego się w Greenwich, natomiast łuk PGQ jest południkim miejscowym dla tego obserwatora. Podobnie łuk PMQ jest południkiem miejscowym dla obserwatora w m. Kąt sferyczny GPM, oczywiście wynosi λ.

Przyjmijmy teraz, że X jest położeniem gwiazdy na sferze. Względem obserwatora w Greenwich, kąt godzinny tej gwiazdy wynosi GPX, oznaczymy go jako $\mathcal{H}_{GX}$. Z drugiej strony, jak widzimy na rysunku 5.1, dla obserwatora znajdującego się na Ziemi w miejscu m o długości wschodniej λ, kąt godzinny $\mathcal{H}_{MX}$ wynosi MPX. A to oznacza, że

$$\mathcal{H}_{MX} = \mathcal{H}_{GX} + \lambda \tag{5.1}$$

Układy godzinny i równikowy mają wiele ze sobą wspólnego. Oba zdefiniowane są w oparciu o biegun świata P, różnią się natomiast wyborem koła odniesienia, początku rachuby współrzędnej azymutalnej w tych układach. W obu układach koła te przechodzą przez bieguny świata PQ. Dla kąta godzinnego płaszczyzną odniesienia jest południk obserwatora, dla rektascensji jest nią koło wielkie $P\Upsilon$. Ponieważ punkt Υ jest punktem należącym do sfery niebieskiej, stąd nie zmienia on swego położenia względem gwiazd. Oznaczając przez α rektascensję gwiazdy X z rysunku 5.1, mamy, że wynosi ona $\alpha = \Upsilon PX = \mathcal{RA}_X$. Z powodu ruchu wirowego ziemi a wraz z nią z powodu ruchu obserwatora, kąt godzinny gwiazdy X zmienia się w czasie. Rektascensja tej gwiazdy pozostaje stała.

Punkt równonocy Υ stanowi ważne odniesienie wykorzystywanej w astronomii w koncepcji czasu. W myśl niej, czas mierzony jest za pomocą obserwacji ruchu dobowego gwiazd a nie Słońca jak to ma miejsce w przypadku skali czasu słonecznego towarzyszącej nam w życiu codziennym. Taka koncepcja czasu, (albo jak mówimy skala



Rysunek 5.1: Sfera niebieska i umieszczona w niej sfera ziemska. Ilustracja układów sferycznych równikowego i godzinnego oraz układu sferycznego na powierzchni Ziemi.

czasu) określana jest mianem miejscowego czasu gwiazdowego. Dla obserwatora w m na powierzchni Ziemi, czas gwiazdowy jest zdefiniowany nastepująco — *miejscowy czas gwiazdowy* ($\mathcal{CG}_M$) to kąt godzinny punktu barana $P\Upsilon$,[1] mierzony względem południka miejscowego

$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{H}_M\Upsilon \tag{5.2}$$

Podobnie dla obserwatora w Greenwich — czas gwiazdowy Greenwich ($\mathcal{CG}_G$) jest to kąt godzinny punktu Υ zmierzony w Greenwich

$$\mathcal{CG}_G = \mathcal{H}_G\Upsilon \tag{5.3}$$

Korzystając z równania (5.1) można zauważyć, że obie miary czasu wiążą się zależnością

$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{CG}_G + \lambda \tag{5.4}$$

Z tego co powiedziano wynika, że czas gwiazdowy musi wzrastać o 24 godziny gwiazdowe, czyli po interwale czasu, w którym kąt godzinny punktu równonocy wzrośnie o 24_h. [2] Interwał ten nazywamy *dobą gwiazdową*, nie jest on równy dobie słonecznej, bowiem doba gwiazdowa trwa 23^h56^m w skali czasu słonecznego. Przyczyna tej różnicy leży w tym, że punkt odniesienia gwiazdowej skali czasu, czyli punkt Υ jest nieruchomy względem tła gwiazdowego. Tymczasem punkt odniesienia słonecznej skali czasu, czyli Słońce, nieustannie przemieszcza się na sferze względem tła gwiazdowego.

Czas gwiazdowy jest znakomitym łącznikiem pomiędzy kątem godzinnym i rektascensją. Na rysunku 5.1, dla obserwatora w punkcie m, zgodnie z definicją (5.2) czas gwiazdowy równy jest kątowi sferycznemu $MP\Upsilon$. Ponieważ kąt godzinny punktu X dla tego obserwatora wynosi MPX, a rektascensja punktu X równa jest $\alpha = \mathcal{RA}_{\ X} = \Upsilon PX$, stąd

$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{H}_{MX} + \mathcal{RA}_{\ X} \tag{5.5}$$

[1] Punkt ten pełni tu rolę gwiazdy o zerowej rektascensji i deklinacji.

[2] Jest to interwał bardzo bliski okresowi jednego obrotu Ziemi wokół jej osi rotacji.

Równanie(5.5) jest prawdziwe dla dowolnego ciała niebieskiego i dowolnego obserwatora na powierzchni Ziemi [3] i służy do transformacji współrzędnych godzinnych w równikowe i odwrotnie.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na pewne zamieszanie dotyczące słowa czas. Czas, podobnie jak otaczająca nas przestrzeń jest jeden. [4] Dlatego pojęcia czas gwiazdowy, czas słoneczny nie dotyczą dwóch różnych czasów, ale metody pomiaru tego samego czasu. Pojęcia te oznaczają jedynie odmienne skale, sposoby pomiaru czasu, podobnie jak mamy różne sposoby pomiaru odległości.

5.2 Skala czasu słonecznego prawdziwego i średniego

Skala czasu określona za pomocą kąta godzinnego punktu barana Υ, aczkolwiek bardzo regularna i przydatna w wielu zastosowaniach, nie nadaje się do regulacji działalności człowieka. Czas cywilny powinien zależeć od kąta godzinnego Słońca, obiektu towarzyszącego nam w życiu codziennym. Astronomowie opracowali taką skalę czasu, nazwano ją czasem słonecznym, a jej podstawową jednostkę dobę słoneczną zdefiniowano jako interwał pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami Słońca na południku obserwatora. Ponieważ w tej skali czasu mierzony jest kąt godzinny Słońca (ściśle środek jego tarczy), stąd mówimy o czasie *słonecznym prawdziwym*. Definicja skali czasu słonecznego prawdziwego ma postać

$$\text{Miejscowy prawdziwy czas sloneczny } = 12^h + \mathcal{H}_{M\odot} \tag{5.6}$$

gdzie $\mathcal{H}_{M\odot}$ to kąt kodzinny słońca. Stały składnik 12^h wprowadzono by początek doby słoneczenj przypadał w nocy. Natomiast określenie "miejscowy"ma na celu podkreślenie lokalnego charakteru kąta godzinnego, co inaczej oznacza, że obserwatorzy znajdujący się na różnych długościach geograficznych obserwują inną wartość prawdziwego czasu słonecznego.

Aby powiązać czas słoneczny z gwiazdowym wystarczy zastosować równanie (5.5), traktując Słońce jako punkt X, wówczas dla obserwatora w m będzie

$$\text{Miejscowy prawdziwy czas soneczny } = \mathcal{CG}_M + 12^h - \mathcal{RA}_{\odot} \tag{5.7}$$

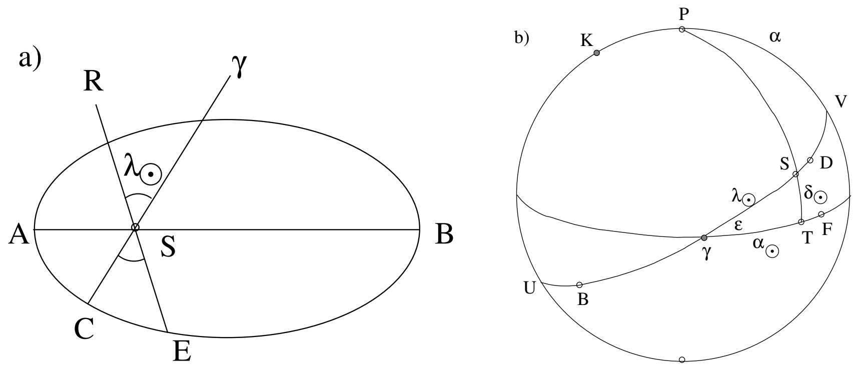
W przeciągu roku rektascensja Słońca powiększa się o 24^h, i dlatego, na co wskazuje równanie (5.7), w czasie jednego roku, liczba dób gwiazdowych jest o jeden większa od liczby dób słonecznych w roku.

Pomijając małe efekty precesyjne, czas gwiazdowy zależy tylko od rotacji Ziemi wokół osi i jest skalą w wysokim stopniu regularną. Prawdziwy czas słoneczny, dodatkowo zależy jeszcze od rektascensji Słońca, ta zaś od ruchu orbitalnego Ziemi. Złożenie ruchu wirowego i orbitalnego Ziemi ma poważny wpływ na regularność prawdziwego czasu słonecznego. By ten wpływ prześledzić, najpierw przypomnijmy sobie treść trzech *praw Keplera*:

1. Orbita planety jest elipsą, Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.

[3] Poza przypadkami obserwatorów znajdujących się na ziemskich biegunach.

[4] Może warto zastanowić się czy rzeczywiście tak jest. Czy zdania — istnieje jedna przestrzeń i jeden czas, istnieje przestrzeń absolutna, absolutny czas — są usprawiedliwione we współczesnej fizyce i astronomii.



Rysunek 5.2: Przyczyny nierównomierności skali prawdziwego czasu słonecznego:a) liniowy i kątowy ruch Ziemi (E) po elipsie ze Słońcem w ognisku S jest niejednostajny: w peryheluim ruch przebiega szybciej niż w aphelium, b) trajektoria pozornego rocznego ruchu Słońca, ekliptyka $UBSV$ jest nachylona do równika ΥTF pod kątem ε. Oba efekty powodują nierównomierne przyrosty rektascensji Słońca na tyle duże, że wyklucza to wykorzystanie prawdziwego czasu słonecznego do regulacji życia cywilnego mieszkańców Ziemi.

2. Planeta porusza się w taki sposób, że jej promień wodzący zakreśla równe powierzchnie w równych intrwałach czasu.
3. Trzecia potęga półosi wielkiej orbity planety jest proporcjonalna do kwadratu jej orbitalnego okresu obiegu.

Pierwsze dwa prawa wykorzystane zostaną natychmiast. Rysunek 5.2a, ilustruje elipsę orbity Ziemii, S oznacza Słońce, odcinek AB oś wielką elipsy. Punkt A, perihelium, to punkt w którym w styczniu Ziemia znajduje się najbliżej Słońca, punkt B, aphelium to punkt największego oddalenia Ziemi od Słońca. Długość półosi orbity ziemskiej wybrano na jednostkę długości w astronomii, tzw. jednostka astronomiczna (AU). Odległość ta wynosi w jednostkach układu SI $1.49597870691 \cdot 10^{11}$ m.

Niech punkt C (rysunek 5.2a) oznacza położenie Ziemi w momencie równonocy wiosennej, tzn. w chwili gdy obraz Słońca na tle gwiazd znajduje się w punkcie Υ. Niech punkt E przedstawia położenie Ziemi w jakiś czas później, obraz Słońca przemieści się wówczas w położenie R. Kąt ΥSR jest zatem długością ekliptyczną $\lambda_{\odot}$ Słońca. Prędkość kątowa Ziemi w ruchu orbitalnym nie jest stała, co łatwo wydedukować z 1 i 2 prawa Keplera, a to oznacza, że długość ekliptyczna Słońca nie zmienia się jednostajnie na przestrzeni roku. Najszybciej zmienia się w styczniu, najwolniej w czerwcu w czasie przejścia Ziemi przez aphelium. Niejednorodności w tempie zmiany długości Słońca z oczywistych względów są przyczyną zmian w tempie przyrostu jego rektascensji, a to z kolei pociąga nierównomierność skali prawdziwego czasu słonecznego, co łatwo wywnioskować z równania (5.7).

Inną przyczyna nieregularności w przyrostach rektascensji Słońca jest nachylenie ekliptyki do równika. Niech sfera z rysunku 5.2b, przedstawia geocentryczną sferę niebieską z ekliptyką i równikiem — koło $UA\Upsilon SV$ i koło ΥTF odpowiednio. Punkty V i U oznaczją położenia na ekliptyce o największej i najmniejszej deklinacji ($\delta = \pm\varepsilon$)). Są to tzw. punkty *przesilenia letniego* i *przesilenia zimowego*.

Niech Słońce znajduje się na ekliptyce w punkcie $S(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot})$. Koło wielkie PS przecina równik w punkcie T. W trójkącie sferycznym ΥST mamy

$$\Upsilon S = \lambda_\odot \qquad \Upsilon T = \alpha_\odot \qquad TS = \delta_\odot \qquad \Upsilon TS = 90^\circ \qquad S\Upsilon T = \varepsilon$$

Stosując tego trójkąta odpowiedni wzór cotangensowy otrzymamy

$$\tan \alpha_\odot = \cos \varepsilon \tan \lambda_\odot \tag{5.8}$$

Wynika stąd, że rektascensja Słońca nie zmienia się jednostajnie z jego długością: przyrosty rektascensji są najmniejsze w okresie równonocy, największe w czasie przesileń.

I właśnie z powodu wyraźnie nierównomiernych przyrostów rektascensji, prawdziwe Słońce nie nadaje się jako wzorzec skali czasu cywilnego, która powinna być skalą o dużej regularności.

Do tego celu wykorzystuje się obiekt zwany słońcem dynamicznym definiowany poglądowo w następujący sposób. Niech τ oznacza moment przejścia Ziemi przez peryhelium, na rysunku 5.2a prawdziwe Słońce znajduje się wówczas na sferze w punkcie B. Dalej niech n oznacza średnią kątową prędkość Ziemi na orbicie, czyli $n = 360^\circ/rok$. Wyobraźmy sobie fikcyjny obiekt poruszający się po ekliptyce z prędkością kątową n, w taki sposób, że przez punkt B przechodzi w tej samej chwili co słońce prawdziwe. [5] Ten fikcyjny obiekt nazwano *dynamicznym słońcem średnim*.
Przypuśćmy, że w pewnej chwili t prawdziwe Słońce znajduje się w S a słońce dynamiczne jest w D (rysunek 5.2b). Jeśli czas wyrażony jest w latach to położenie słońca dynamicznego da się wyznaczyć za pomocą formuły

$$BD = n(t - \tau)$$

A zatem pomysł z dynamicznym słońcem usuwa nieregularności w przyrostach długości ekliptycznej Słońca. Niestety nie usuwa wpływów nachylenia ekliptyki do równika.

By w pełni wyeliminować nierównomierności wprowadzono jeszcze jeden obiekt, tzw. *fikcyjne słońce średnie*. Jest to punkt poruszający się ze stałą prędkością n po równiku i przechodzący przez punkty równonocy jednocześnie ze słońcem dynamicznym.

Jeśli w momencie t, fikcyjne słońce znajduje się w F (rysunek 5.2b) wówczas na mocy definicji obu słońc $\Upsilon F = \Upsilon D$. Fikcyjne słońce jest punktem o jednostajnie zmieniającej się rektascensji, nadaje się zatem jako zjawisko do realizacji skali czasu słonecznego pozbawionej zasadniczych nieregularności. Jest to skala *średniego czasu słonecznego*, definiowana analogicznie jak skala czasu prawdziwego, tzn. za pomocą równania

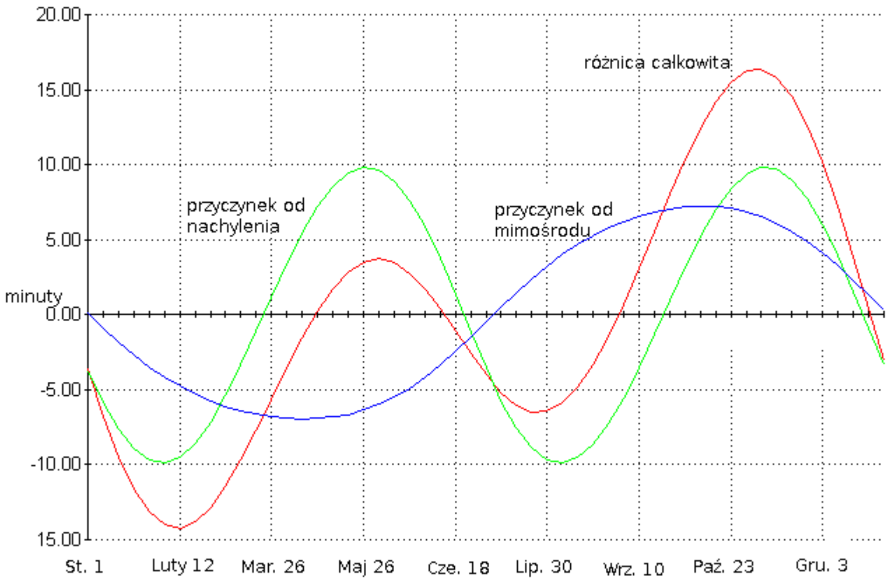
$$\text{Miejscowy sredni czas sloneczny } = 12^h + \mathcal{H}_{MS\odot} \tag{5.9}$$

I podobnie do równania (5.7), czas gwiazdowy i czas średni słoneczny związane są zależnością

$$\text{Miejscowy sredni czas sloneczny } = \mathcal{CG}_M + 12^h - \mathcal{RA}_{\ S\odot} \tag{5.10}$$

Różnica pomiędzy czasem słonecznym prawdziwym i średnim nosi nazwę *równania czasu*. Na rysunku 5.2b odpowiada ona łukowi TF, a z pomocą równań (5.7) i (5.10) można ją przedstawić jako

$$\text{Rwnanie czasu} = \mathcal{RA}_{\ S\odot} - \mathcal{RA}_{\ \odot} \tag{5.11}$$



Rysunek 5.3: Wykresy równania czasu — ilustracja nierównomierności skali prawdziwego czasu słonecznego. Kolorem zielonym wykreślono przyczynek od nachylenia orbity Ziemi do równika świata, kolorem czerwonym przyczynek od mimośrodu orbity Ziemi. Efekt łączny wykreślono kolorem niebieskim.

Różnica (5.11) zmienia się w złożony sposób osiągając w maksimum wartość około 15 minut (patrz rysunek 5.3), co uzasadnia potrzebę wprowadzenia czasu średniego. Równania definiujące skale czasu słonecznego zawierają słowo "miejscowy". Ma ono podkreślać, że miara czasu zdefiniowana tymi równaniami zależy od długości geograficznej obserwatora. Jest to analogiczna zależność jak w przypadku miejscowego czasu gwiazdowego.

Czas średni słoneczny dla południka Greenwich nazwano *czasem uniwersalnym* (UT). Za pomocą równań (5.1), (5.9) łatwo pokazać, że dla obserwatora w miejscu o wschodniej długości geograficznej λ, będzie

$$\text{Miejscowy redni czas soneczny } = UT + \lambda \tag{5.12}$$

Skale czasu słonecznego miejscowego używane są bardzo rzadko. W życiu codziennym wymagana jest synchronizacja czasu na dostatecznie dużym obszarze. Z tego względu powierzchnia kuli ziemskiej podzielona została na strefy czasowe oddzielone od siebie tzw. południkami standardowymi. Wewnątrz każdej strefy obowiązuje ten sam czas słoneczny średni, zwany czasem strefowym,

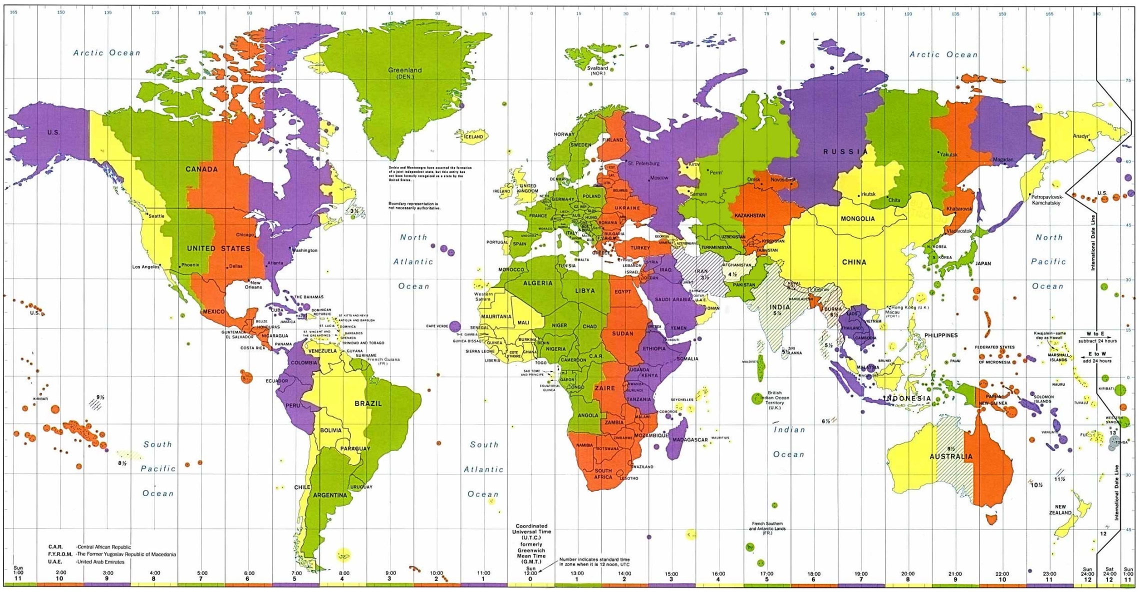
$$\text{Czas strefowy} = UT + \lambda_S \tag{5.13}$$

gdzie λ_S jest wschodnią długością standardowego południka danej strefy.

Południki standardowe rozmieszczone są równomiernie co $15°$ w długości i dlatego pomiędzy dwoma sąsiednimi strefami różnica czasów wynosi zawsze jedną godzinę.

To co powiedziano powyżej bynajmniej nie wyczerpuje zagadnienia czasu w astronomii. W celu wyznaczenia i przechowywania czasu z najwyższą precyzją astronomowie

[5] Na mocy symetrii to samo ma miejsce w chwili gdy Ziemia przechodzi przez aphelium.



Rysunek 5.4: Granice standardowych stref czasowych. Stan z maja 1988.

utworzyli tzw. *służbę czasu*, specjalistyczne laboratoria, w których początkowo wykorzystywano obserwacje gwiazd, później konstruowano precyzyjne chronometry, zegary wahadłowe aż wreszcie zbudowano zegary kwarcowe i atomowe. Dzięki precyzyjnym obserwacjom czasu pokazano, że wirowy ruch Ziemi wykorzystywany w definicji skali czasu gwiazdowego i słonecznego zawiera sporo drobnych nierówności trudnych do dokładnego modelowania. ↱

Rozdział 6

Przemiana współrzędnych

6.1 Macierzowe transformacje współrzędnych astronomicznych

6.1.1 Układ ekliptyczny i układ równikowy

Niech dane są współrzędne równikowe (α, δ) punktu G oraz odpowiadające im współrzędne ekliptyczne (λ, β). Ponieważ prostokątny układ ekliptyczny różni się od układu równikowego o dodatni [1] obrót o kąt ε wokół osi x (patrz rysunek 6.1), transformacja od współrzędnych równikowych do współrzędnych ekliptycznych ma postać

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\lambda,\beta} = \mathbf{p}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} \tag{6.1}$$

Transformacja odwrotna dana jest formułą macierzową

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{p}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\lambda,\beta} \tag{6.2}$$

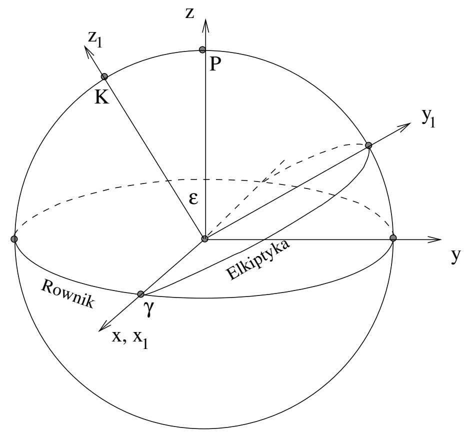
W wyprowadzeniu formuły (6.2) skorzystaliśmy z własności ortogonalnalności macierzty $\mathbf{p}(\theta)$. ↱

6.1.2 Układ horyzontalny i godzinny

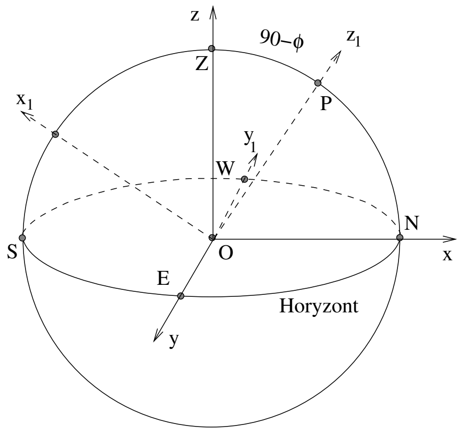
Prostokątny lewoskrętny odpowiednik sferycznego układu współrzędnych horyzontalnych ilustruje rysunek 6.2.[2] Niech gwiazda G ma współrzędne horyzontalne (A, h), układ ten znajduje się na powierzchni Ziemi w miejscu o szerokości geograficznej ϕ. Współrzędnymi gwiazdy w układzie godzinnym są $(\mathcal{H}, \delta)$. Jak można zauważyć z rysunku 6.2, transformacja współrzędnych horyzontalnych $[x, y, z]^T$ we współrzędne godzinne

[1] Za dodatnie obroty uważamy takie, które przebiegają w kierunku antyzegarowym.

[2] Przypominamy o braku standardu jeśli chodzi o definicję tego układu. Stąd podana transformacja dotyczy układu horyzontalnego zdefiniowanego na potrzeby niniejszego wykładu.



Rysunek 6.1: Prostokątne układy współrzędnych równikowych i ekliptycznych.



Rysunek 6.2: Prostokątne układy współrzędnych horyzontalnych i godzinnych.

$[x_1, y_1, z_1]^T$ jest złożeniem obrotów układu horyzontalnego wokół osi osi z o kąt $180°$, a następnie wokół nowej y o kąt $-(90° - \phi)$. Transformacja ma zatem postać

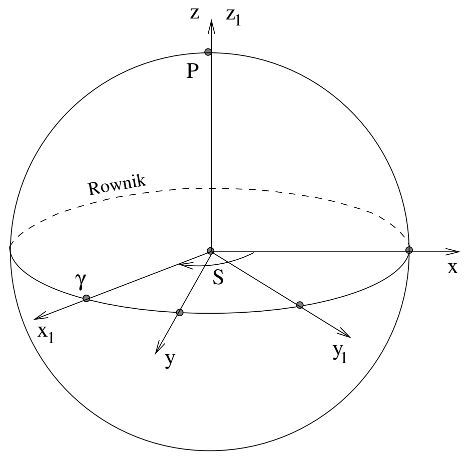
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{H},\delta} = \mathbf{q}(\phi - 90°)\mathbf{r}(180°) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A,h} \tag{6.3}$$

Transformacją odwrotną będzie

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A,h} = \mathbf{r}(-180°)\mathbf{q}(90° - \phi) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{H},\delta} \tag{6.4}$$

6.1.3 Układ godzinny i równikowy

Rysunek 6.3 ilustruje prostokątne i sferyczne warianty układów współrzędnych godzinnych i równikowych. W pewnym momencie czasu gwiazdowego S, położenie gwiazdy



Rysunek 6.3: Prostokątne układy współrzędnych godzinnych i równikowych.

G podane jest za pomocą (α, δ) albo $(\mathcal{H}, \delta)$. Deklinacja δ nie wymaga transformacji, natomiast do współrzędnych azymutalnych α i $\mathcal{H}$ możemy stosować związek (5.5). W ten sposób problem transformacji współrzędnych z układu równikowego do układu godzinnego wyczerpuje się.

Ponieważ porządek musi być, stąd nic dziwnego, że dla porządku, podajemy macierzową wersję tej transformacji. Zatem, jeśli $[x, y, z]^T$ będą składowymi wersora kierunku do obiektu względem układu godzinnego, to składowe tego wersora względem układu równikowego dają się obliczyć jako

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{r}(-S)\mathbf{M}_y \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{H},\delta} \tag{6.5}$$

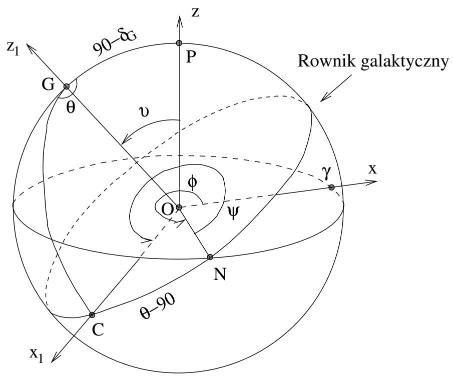
W przypadku transformacji odwrotnej, od (α, δ) do $(\mathcal{H}, \delta)$ należy posłużyć się

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{H},\delta} = \mathbf{M}_y\mathbf{r}(S) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} \tag{6.6}$$

6.1.4 Układ równikowy i galaktyczny

Układy współrzędnych równikowych (α, δ) i galaktycznych (l, b) zilustrowane są na rysunku 6.4. Wartości parametrów definiujących układ galaktyczny względem równikowego podane są za pomocą równań (4.23). Można by i tym razem spróbować odgadnąć wartości kątów i obroty jakie musielibyśmy złożyć by uzyskać formuły transformacyjne pomiędzy tymi układami. Ale nie jest to wcale takie proste, dlatego skorzystamy ze znanej postaci transformacji, w której wykorzystano kąty Eulera.

A zatem do ustalenia pozostało nam jedynie, ile wynoszą kąty Eulera pomiędzy tymi układami, i tym celu posłużymy się rysunkiem 6.4, na którym kąty Eulera zaznaczono symbolami ϕ, ψ, ϑ. Widzimy, że $\phi = \alpha_G + 90°$, $\psi = 360° - (\theta - 90°) = 90° - \theta$,



Rysunek 6.4: Prostokątne układy współrzędnych równikowych i galaktycznych, ilustracja kątów Eulera (ϕ, ψ, ϑ) pozwalających na transformacje jednego układu w drugi.

natomiast $\vartheta = 90° - \delta_G$. Stąd pożądana transformacja (α, δ) w (l, b) ma postać

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{l,b} = \mathbf{r}(90° - \theta)\mathbf{p}(90° - \delta_G)\mathbf{r}(\alpha_G + 90°)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} \tag{6.7}$$

Transformacje odwrotna dana jest formułą

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{r}(270° - \alpha_G)\mathbf{p}(\delta_G - 90°)\mathbf{r}(\theta - 90°)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{l,b} \tag{6.8}$$

6.2 Dodatek A. Nastawianie teleskopów

Na koniec tego rozdziału poświęcimy nico uwagi problemowi ustawienia teleskopu astronomicznego w jakimś wybranym kierunku.

Przyjmujemy, jak to zresztą często ma miejsce, że dane są współrzędne (α, δ) interesującej nas np. gwiazdy, zaczerpnięte z katalogu.[3]

Chcąc ustawić teleskop na tę gwiazdę najpierw musimy przeliczyć jej współrzędne równikowe na współrzędne godzinne, co wymaga znajomości czasu gwiazdowego w miejscu obserwacji w przewidywanym momencie obserwacji. Jeśli dane obserwatorium posiada zegar gwiazdowy, wymagany czas można odczytać bezpośrednio, jeżeli nie, trzeba dokonać stosownych obliczeń.

Dysponując współrzędnymi godzinnymi, konieczność dalszej transformacji uzależniona jest od rodzaju montażu teleskopu. Większość teleskopów optycznych wyposażona jest w montaż równikowy. Jest to montaż, w którym oś główna narzędzia (oś polarna teleskopu) znajduje się w płaszczyźnnie południka miejsca obserwacji i skierowana jest ku

[3]Na tym etapie ignorujemy konieczne w takich wypadkach uwzględnienie we współrzędnych katalogowych wpływów: ruchu własnego, precesji, nutacji, aberracji i paralaksy rocznej oraz refrakcji. Będzie o nich mowa w dalszych rozdziałach.

biegunowi świata. W takim ustawieniu nachylenie osi instrumentu do płaszczyzny horyzontu jest równe szerokości geograficznej miejsca obserwacji. Podczas obrotu teleskopu wokół tej osi, oś optyczna obiektywu zakreśla na sferze równoleżniki. A zatem montaż równikowy pozwala na łatwe ”śledzenie” obiektu poruszającego się po równoleżniku wskutek ruchu dobowego sfery.

Aby nastawić teleskop o takim montażu na dany obiekt musimy wcześniej odpowiednio wyregulować jego nastawcze koła deklinacyjne i godzinne. Robi się to raz na zawsze z pomocą stosownej metodyki. Jeśli narzędzie jest porządnie zjustowane, chcąc obserwować dany obiekt nastawiamy na kole deklinacyjnym wymaganą deklinację a na kole godzinnym narzędzia nastawiamy kąt godzinny gwiazdy. Koła deklinacyjne i godzinne najczęściej wyposażone są w stosowne podziałki kątową i czasową odpowiednio.

Istnieją jednak i inne montaże. Np. absolutne narzędzia astrometryczne takie jak koła południkowe czy instrumenty przejściowe, posiadają montaż typu horyzontalnego. W instrumencie przejściowym obserwowane jest wyłącznie przejście gwiazd przez południk obserwatora. Narzędzie posiada tylko jedną oś mechaniczną zorientowaną wzdłuż kierunku wschód-zachód, a oś optyczna takiego instrumentu zakreśla na sferze koło wielkie odpowiadające południkowi obserwatora. Gdy gwiazda przechodzi przez południk, czyli w chwili gdy jej kąt godzinny równa się zeru, moment przejścia w czasie gwiazdowym jest równy rektascensji gwiazdy.

Podobnie wygląda sprawa w przypadku teleskopów radiowych. Stosuje się w nich montaże równikowe i typu horyzontalnego. W przypadku bardzo dużych narzędzi są one wyposażone w łatwiejszy do zrealizowania technicznie, pełny montaż horyzontalny. Dla nastawienia takich teleskopów musimy dokonać dodatkowej transformacji współrzędnych godzinnych w horyzontalne.

Obecnie teleskopy niemal zawsze nastawiane są automatycznie. Odpowiednia mechanika, i elektronika, a także stosowne oprogramowanie komputerowe pozwalają na automatyczne precyzyjne prowadzenie teleskopu umożliwiając wielogodzinną obserwację bardzo słabych obiektów.

6.3 Dodatek B. Zadania

1. Podaj wzór na odległość punktów na sferycznej powierzchni Ziemi w kilometrach.

2. Samolot startuje w Limie kierując się wprost na Rzym. Oblicz przebytą odległość w kilometrach, a także podaj długość geograficzną samolotu, w momencie gdy przelatywał nad równikiem. Współrzędne geograficzne Limy i Rzymu wynoszą, odpowiednio:
   $(12°10'\ S, 77°05'\ W)$, $(41°53'\ N, 12°33'\ E)$.

3. Oblicz długość najkrótszej drogi powietrznej z San Francisco $(37°40'N, 122°25'W)$ do Tokio $(35°N, 139°45'E)$. Wyznacz kierunek w jakim samolot powinien wystartować w San Francisco oraz oblicz współrzędne geograficzne najbardziej północnego punktu tej drogi.

4. W miejscu o szerokości geograficznej $\phi = 41\overset{\circ}{.}36$ dokonano obserwacji gwiazdy. Wyznaczono jej współrzędne horyzonlane: $z = 57\overset{\circ}{.}57, A = 137\overset{\circ}{.}6$. Oblicz kąt

godzinny i deklinację tej gwiazdy.

5. Radioteleskop o montażu horyzontalnym znajduje się w miejscu o długości $\lambda = 83°31' W$ i szerokości $\phi = 40°15' N$. Na datę 1985, styczeń 07, 14^h42^m UT, planowana jest obserwacja radioźródła 3C273 o współrzednych równikowych ($\alpha = 12^h38^m_.3, \delta = 2°08'$). Wyznacz stosowną nastawę dla tego teleskopu na zaplanowany moment czasu.

6. Pokaż, że dla danego obserwatora o $\phi > 0$ gwiazdy znajdują się bez przerwy nad horyzontem jeżeli ich deklinacje spełniają warunek

   $$\delta > 90° - \phi$$

   Wyprowadź analogiczny warunek na to by gwiazdy znajdowały się zawsze pod horyzontem tego obserwatora.

7. Pokaż, że odległość zenitalna z, północnego bieguna ekliptyki dana jest wzorem

   $$z = \arccos(\cos\varepsilon\sin\phi - \sin\varepsilon\cos\phi\sin S_M)$$

   gdzie S_M jest lokalnym czasem gwiazdowym.

8. Jeśli podstawowe parametry sferycznego układu współrzędnych galaktycznych wynoszą:

   $$\alpha_G = 12^h49^m$$
   $$\delta_G = 27.4°$$
   $$\Theta = 123°$$

   Oblicz nachylenie płaszczyzny równika galaktycznego do ekliptyki. Pokaż, że Słońce przechodzi przez tę płaszczyznę, w przybliżeniu w trakcie obu przesileń. Wyznacz galaktyczne długości punktów przejścia słońca przez płaszczyznę równika galaktycznego.

9. Pokaż, że azymut gwiazd okołopolarnych może przyjmować dowolne wartości dla gwiazd, dla których $\delta < \phi$, natomiast dla gwiazd, dla których $\delta > \phi$, azymut musi być mniejszy od $\arcsin(\cos\delta\sec\phi)$.

10. Niech współrzędne (x, y, z) odniesione są do standardowego równikowego układu prostokątnego. Przemieśćmy oś X tego układu do punktu o współrzędnych (α, δ) z pomocą odpowiednich transformacji obrotu: rotacja o kąt α wokół oryginalnej osi Z, plus rotacja o kąt $-\delta$ wokół osi Y — rezultatu z wcześniejszego obrotu. Pokaż, że nowe współrzędne (x', y', z') są powiązane ze starymi poprzez następujące równania :

    $$x' = x\cos\alpha\cos\delta + y\sin\alpha\cos\delta + z\sin\delta$$
    $$y' = -x\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha$$
    $$z' = -x\cos\alpha\sin\delta - y\sin\alpha\sin\delta + z\cos\delta$$

    Pokaż, że prawdziwa jest transformacja odwrotna:

    $$x = x'\cos\alpha\cos\delta - y'\cdot\sin\alpha - z'\cdot\cos\alpha\sin\delta$$
    $$y = x'\sin\alpha\cos\delta + y'\cdot\cos\alpha - z'\cdot\sin\alpha\sin\delta$$
    $$z = x'\sin\delta + z'\cdot\cos\delta$$

11. Skale czasu gwiazdowego i słonecznego mają różne jednostki. Czy zatem w równaniu wiążącym obie te skale

$$\text{Miejscowy redni czas soneczny } = \mathcal{CG}_M + 12^h - \mathcal{RA}\ _{S\odot}$$

gdzie $\mathcal{CG}_M$ jest miejsowy czas gwiazdowy, nie należałoby wprowadzić odpowiednich współczynników uwzględniających tę różnicę? Uzasadnij odpowiedź.

Rozdział 7

Astronomiczne układy odniesienia

Streszczenie. Jednym z ważnych zadań astronomii pozycyjnej jest definicja i realizacja inercjalnego układu odniesienia. Nie jest to trywialne zagadnienie gdyż usiłujemy osiągnąć cel dokonując obserwacji w układach poruszających sie w skomplikowany sposób. Ruch ten obejmuje zarówno rotację osi jak i przemieszczenie początku układu obserwatora.
Zmiana orientacji osi wiąże się ze zjawiskami precesji i nutacji. Z powodu precesji lunisolarnej punkty równonocy przemieszczają się po nieruchomej ekliptyce w tempie około $150''$ rocznie. Precesja planetarna zmienia w ciągu roku o $0.5''$ położenia tych punktów względem nieruchomego równika. Nutacja wywołuje skomplikowane okresowe ruchy bieguna świata o amplitudzue dochodzącej do $15''$.
Ruch środka układu odniesienia objawia się paralaktycznym przemieszczeniem położeń ciał na sferze niebieskiej. Dodatkowo, położenia ciał ulegają zmianom wynikającym ze zjawiska aberracji oraz ruchów własnych.
Realizacja układu inercjalnego może być dokonana na dwa sposoby. Pierwszy to podejście dynamiczne, w którym układ realizowany jest za pośrednictwem teorii ruchu ciał Układu Planetarnego. Sposób drugi polega na podejściu kinematycznym, w którym układ realizowany jest za pośrednictwem obserwacji dalekich obiektów pozagalaktycznych.
Obecnie jako najlepsze przybliżenie układu inercjalnego stosowany jest układ równikowy o płaszczyźnie równika i punkcie równonocy odpowiadającym epoce J2000. Środek tego układu odniesienia znajduje się w barycentrum mas Układu Planetarnego. Realizacja takiego układu odniesienia możliwa jest za pośrednictwem absolutnych obserwacji położeń gwiazd lub radiowych obserwacji pozagalaktycznych radioźródeł.
Z oczywistych powodów obserwacje ciał niebieskich nie mogą być wykonane w tym układzie. Dlatego rezultaty obserwacji np. planet, przed wykorzystaniem ich w teoriach ruchu, muszą być skorygowane — zredukowane — do układu inercjalnego. Taka redukcja polega na usunięciu z tzw. położeń obserwowanych wpływów: refrakcji atmosferycznej, paralaksy dobowej i rocznej, aberracji dobowej i rocznej, precesji i nutacji, tak by otrzymać tzw. położenia geometryczne, odniesione do standardowego inercjalnego układu odniesienia.

Słowa kluczowe: Układ inercjalny, układ równikowy średni i prawdziwy, barycentryczny układ odniesienia, precesja luni-solarna, precesja planetarna, paralaksa, aberracja, położenia geometryczne, astrometryczne, widome. [a]

[a] [Modyfikowano AD 2008, kwiecień, 08]

7.1 Układ inercjalny

Astrometria dostarcza innym działom astronomii podstawowych danych obserwacyjnych, które wykorzystywane są np. w mechanice nieba do weryfikacji teorii ruchu ciał Układu Słonecznego.

W dynamice newtonowskiej podstawową rolę pełnią trzy prawa Newton'a:

1. Ciało nie poddane działaniu żadnej siły zewnętrznej porusza się ze stałą szybkością po linii prostej.
2. Szybkość zmiany pędu ciała jest równa zewnętrznej sile przyłożonej do tego ciała.
3. Akcja i reakcja są równe i przeciwnie skierowane, co odnosi się np. do sił działających między dwoma ciałami.

Prawa te są jednak stosowalne do rezultatów obserwacji położeń ciał wykonanych w układzie współrzędnych sferycznych, o którym wiedzielibyśmy, że jest *inercjalnym układem* odniesienia. A co to tak naprawdę oznacza? Jaka jest definicja układu inercjalnego? W jaki sposób ma astronom taki układ realizować? Nie są to proste pytania, niewątpliwie jest jedynie to, że układ inercjalny można zdefiniować jako taki, do którego stosują się prawa Newtona.

Na pierwszy rzut oka można by sądzić, że układem inercjalnym jest układ równikowy, a przynajmniej, że jest jego dobrym przybliżeniem, na pewno lepszym niż układ godzinny obracający się raz na 24 godziny względem tła gwiazdowego. Tego rodzaju osąd to jednak zbyt mało by uważać problem za rozwiązany, [1] bowiem nie wydaje się by istniały same z siebie powody, dla których układ inercjalny nie może rotować względem gwiazd stałych. Chociaż byłoby to bardzo dziwne gdyby okazało się, że układ godzinny jest inercjalny a równikowy nie. W samej rzeczy istnieje prosty sposób by pokazać, że układ godzinny realizowany na powierzchni Ziemi nie jest inercjalnym układem odniesienia. Wahadło Foucault'a zmienia w takim układzie płaszczyznę wahań. Ale taki przyrząd nie wykaże, że układ odniesienia wyznaczony za pomocą tła gwiazdowego jest rzeczywiście inercjalny, co najwyżej pokaże, że jest tak w przybliżeniu.

W ubiegłym stuleciu filozof Ernst Mach sformułował tezę, którą Einstein nazwał *zasadą Macha*[2]. Mach twierdził, że bezwładność danego ciała (masa — miara bezwładności) nie jest jego "wewnętrzną" własnością, lecz wynikiem oddziaływań między tym ciałem a wszystkimi innymi wypełniającymi Wszechświat. Jeśli ta zasada jest poprawna, inercjalny układ odniesienia nie może obracać się względem Wszechświata jako całości. Mimo ciągłych wokół niej kontrowersji, przyjmiemy tu zasadę Macha jako poprawną.

Zatem możemy definiować *inercjalny układ odniesienia* na dwa sposoby, mianowicie:

- układ inercjalny to taki układ, w którym można stosować prawa Newtona, (podejście dynamiczne),
- układ odniesienia inercjalny to taki układ, który jest nieruchomy względem Wszechświata jako całości, (podejście kinematyczne).

[1]Oczywiście astronomowie też mogą posłużyć się, jakże często stosowaną w problemach natury politycznej, metodą demokratycznego głosowania. Niestety, jak dotąd nie wpadli na ten uwalniający od myślenia i odpowiedzialności spoób rozwiązywania problemów.

[2]Nieco więcej na temat zasady Macha można znaleźć w [?], [?].

Podstawowym układem współrzędnych stosowanym w astrometrii jest układ równikowy, ”oczyszczony” z niedoskonałości do takiego poziomu, aby zastępował inercjalny układ odniesienia tak dokładnie jak to jest tylko możliwe. Nakłada to na układ równikowy dwa warunki:

1. układ odniesienia nie może obracać się względem Wszechświata jako całości,
2. początek układu odniesienia nie może poruszać się ruchem przyspieszonym.

W dalszej części wykładu rozważymy w jaki sposób można tym warunkom zadośćuczynić. ↱

7.2 Dygresja: układ inercjalny w wielkim świecie

Oto co na temat układu inercjalnego można odnaleźć w Wielkiej Internetowej Encyklopedii Multimedialnej.

- Układ odniesienia, układ współrzędnych uzupełniony o pomiar czasu. Dobór tego pierwszego zależy od rodzaju opisywanego zagadnienia: na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej stosuje się np. zwykle odpowiedni typ układu współrzędnych kartezjańskich, a w zagadnieniach, w których mamy do czynienia z symetrią sferyczną, układ współrzędnych sferycznych.

  W mechanice klasycznej przejście od opisu zjawiska w jednym układzie odniesienia do jego opisu w drugim określone jest przez przekształcenie Galileusza, w fizyce współczesnej analogiczną rolę pełni transformacja Lorentza.

  Opis zjawisk fizycznych w ogólności zależy od wyboru układu odniesienia (niezmienniczość). Wyróżnia się inercjalne układy odniesienia, w których spełnione są wszystkie zasady dynamiki Newtona, oraz nie spełniające I i II zasady tejże dynamiki, układy odniesienia nieinercjalne, gdzie działają pozorne siły bezwładności.

- Inercjalny układ odniesienia, układ odniesienia należący do wyróżnionej klasy układów, w których spełniona jest pierwsza zasada dynamiki Newtona.

  Istnienie inercjalnego układu odniesienia jest postulatem mechaniki klasycznej. Wszystkie prawa fizyki mają taką samą postać w każdym inercjalnym układzie odniesienia, co osiągamy stosując przekształcenie Galileusza czy transformację Lorentza.

- zasada względności Galileusza to zasada głosząca, że prawa ruchu są identyczne we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, tj. że nie istnieje wyróżniony inercjalny układ odniesienia. Zasada ta obowiązuje w mechanice klasycznej.

- transformacja Lorentza to przekształcenie matematyczne opisujące transformacje wielkości fizycznych w czasoprzestrzeni czterowymiarowej przy przechodzeniu od jednego inercjalnego układu odniesienia, określonego przez współrzędne przestrzenne x, y, z i współrzędną czasową t, do drugiego, określonego przez współrzędne x', y', z' oraz t'.

W najprostszym przypadku, jeśli układ (x', y', z', t') porusza się jednostajnie w kierunku osi x z prędkością v, to transformacja Lorentza ma postać:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

gdzie $\beta = v/c$, a c jest prędkością światła w próżni.

Z transformacji Lorentza wynikają wszystkie efekty kinematyczne szczególnej teorii względności, takie jak:

– reguła sumowania się prędkości prowadząca do niemożności uzyskania prędkości większej od prędkości światła,
– względność pojęcia równoczesności,
– skrócenie Lorentza-Fitzgeralda,
– spowolnienie biegu poruszających się zegarów.

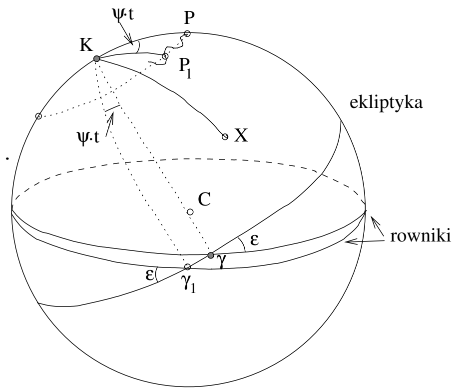
Równania transformacji Lorentza zostały opracowane ponad 10 lat przed sformułowaniem przez A. Einsteina szczególnej teorii względności (zostały wywnioskowane z równań Maxwella), były jednak wówczas traktowane jako formalne równania matematyczne, bez konsekwencji fizycznych. Transformacja Lorentza uzupełniona obrotami w przestrzeni trójwymiarowej stanowi tzw. grupę przekształceń Poincarego.
Dla małych prędkości v, rozwijając w szeregi potegowe wzory opisujące transformację Lorentza, przy zaniedbaniu wyższych wyrazów, otrzymuje się klasyczne przekształcenie Galileusza. Transformacja Lorentza równoważna jest geometrycznie obrotowi w czterowymiarowej, zespolonej przestrzeni Minkowskiego o rzeczywistych osiach x, y, z, oraz urojonej osi czasowej (zmienna czasowa ma wówczas postać ict, gdzie i — jednostka urojona, c — prędkość światła w próżni).
W transformacji Lorentza niezmienną wielkością jest tzw. interwał czasoprzestrzenny określony jako: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$. Transformacji Lorentza podlegają inne wielkości czterowektorowe, takie jak np. czterowektor energii-pędu. Wówczas do powyższych wzorów podstawia się zamiast czasu energię relatywistyczną cząstki podzieloną przez c, a składowe wektora położenia zastępuje się składowymi pędu. Wielkości tensorowe, spinorowe, itp. podlegają ogólnemu przekształceniu Lorentza, wyrażonemu bardziej złożonym układem równań.

- tymczasem w ogólnej teoria względności nie ma powodów by mówić o szczególnej roli inercjalnego układu odniesienia.

7.3 Układ inercjalny a precesja, nutacja iruch własny gwiazd

7.3.1 Precesja i nutacja

Rozważmy rysunek 7.1, przedstawiający ekliptykę, równik oraz punkt równonocy wiosennej ♈. Układ współrzędnych równikowych jest w pełni zdefiniowany jeśli ktoś dysponuje tymi dwoma kołami wielkimi, lub co jest równoważne, północnym biegunem świata



Rysunek 7.1: Precesja luni-solarna powoduje zmianę położenia bieguna świata z miejsca P do niejsca P_1, biegun ekliptyki K nieruchomy.

P, oraz północnym biegunem ekliptyki K. To samo odnosi się do układu współrzędnych ekliptycznych. Wybierzmy gwiazdę X o współrzędnych równikowych (α, δ) i ekliptycznych (λ, β). Wóczas bokami trójkąta sferycznego PKX są

$$KP = \varepsilon, \quad PX = 90^\circ - \delta, \quad KX = 90^\circ - \beta \tag{7.1}$$

Ponieważ $KP\Upsilon$ i $PK\Upsilon$ są kątami prostymi, dwa kąty sferyczne trójkąta PKX wynoszą

$$KPX = 90^\circ + \alpha, \quad PKX = 90^\circ - \lambda \tag{7.2}$$

Zażądajmy teraz by środek sfery C z rysunku 7.1 był początkiem inercjalnego układu odniesienia. Względem tego układu będziemy badali czy ma miejsce ruch punktów P, K, X. W wykładzie poprzednim milcząco zakładaliśmy o tych punktach, że są nieruchome, co jest dobrym pierwszym przybliżeniem ale niczym więcej. Bowiem każdy z tych punktów przemieszcza się na sferze w rezultacie różnych przyczyn.

Przemieszczenia punktu P są największe, odbywają się w efekcie tzw. *luni-solarnej precesji* i nutacji. Przemieszczenia punktu K określane są mianem *precesji planetarnej*, natomiast przesunięcia na sferze samej gwiazdy X nazywamy *ruchem własnym*. Zmiana położenia każdego z tych punktów powoduje zmianę współrzędnych gwiazdy, zarówno równikowych jak i ekliptycznych.

Oś świata (odcinek PC) z definicji jest zawsze równoległa do ziemskiej osi rotacji, określa zatem kierunek wektora wirowego momentu pędu Ziemi. Na Ziemię oddziaływują grawitacyjnie Słońce, Księżyc i planety. Oddziaływanie grawitacyjne pomiędzy idealnymi kulami nie powoduje powstania pary sił. Dlatego w pierwszym przybliżeniu, wektor momentu pędu Ziemi jest stały co pociąga brak zmian kierunku osi świata, a więc w takim przypadku punkt P na sferze niebieskiej nie zmienia swego położenia.

Jednak w rezultacie ruchu wirowego bryła ziemska uległa niewielkiemu spłaszczeniu, co objawia się wybrzuszeniami w okolicach równikowych. W konsekwencji, Słońce i Księżyc swym oddziaływaniem na zdeformowaną Ziemię indukują niezrównoważoną siłę, która przedstawiona w formie pary sił skręcających modyfikujących orientację ziemskiego wektora momentu pędu; w konsekwancji dochodzi do powolnego przemieszczania się punktu P na sferze niebieskiej. Moment pary sił skręcających jest wprost proporcjonalna do masy przyciągającego ciała a odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości (nie kwadratu). Dlatego wpływ Księżyca jest dwa razy silniejsze od oddziaływania słonecznego. Natomiast największe pary sił od planet, od Jowisza i Wenus są o czynnik 10^5 słabsze i w przypadku osi obrotu Ziemi najczęściej bywają pomijane. Wypadkowa para sił skręcających od Księżyca i Słońca nie jest stała, zmienia się wraz ze zmianami w konfiguracji i wzajemnej odległości tych ciał. I właśnie dlatego ruch bieguna P na sferze jest tak bardzo skomplikowany. Dla wygody rozdzielono go na dwie części: część uśrednioną na długim interwale czasu, inaczej część wiekową zwaną precesją luni-solarną, oraz na okresowe oscylacje wokół pozycji średniej zwane *nutacją*. Na rysunku 7.1, ruch precesyjny bieguna wykreślono linią przerywaną PP_1, natomiast linia falista reprezentuje faktyczny ruch bieguna uwzględniający nutację.

Przemieszczenie nutacyjne bieguna jest rzędu $15''$ i zostało odkryte w ubiegłym stuleciu przez Anglika Bradley'a, który poprawnie zinterpretował drobne okresowe zmiany deklinacji gwiazd jakie zauważył podczas obserwacji południkowych.

Efekt precesji luni-solarnej jest większy od nutacyjnego, a co ważniejsze kumuluje się w miarę upływu czasu. Precesję znali już starożytni Grecy. Dwa wieki przed narodzinami Chrystusa Hiparchus z Rodos porównywał swoje obserwacje gwiazd z wykonanymi 150 lat wcześniej. Zauważył, że szerokości ekliptyczne gwiazd nie zmieniły się podczas gdy w ich długościach była wyraźna różnica, odpowiadająca przyrostowi około $50''$ rocznie.

Niech ψ oznacza roczne tempo precesji luni-solarnej. Zatem jeśli punkt P na rysunku 7.1 odpowiada położeniu bieguna świata w epoce początkowej, a P_1 położeniu bieguna t lat później, to kąt sferyczny $PKP_1 = \psi \cdot t$. Dalej, skoro $KP_1 = KP = \varepsilon$, to nachylenie ekliptyki do równika nie nie uległo w tym czasie żadnym zmianom. Jeśli teraz (λ_1, β_1) będą współrzędnymi gwiazdy X w epoce późniejszej, to z równań 7.1 i 7.2 mamy

$$P_1KX = 90^\circ - \lambda_1, \quad KX = 90^\circ - \beta_1$$

A ponieważ $P_1KX = PKX - PKP_1$, możemy napisać

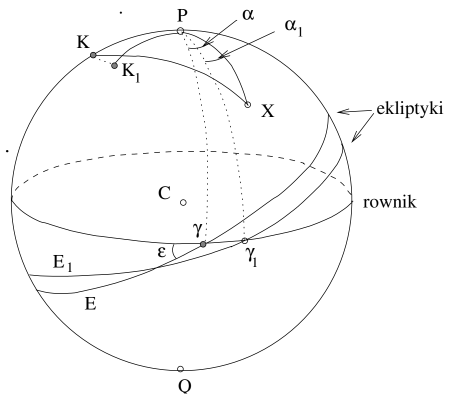
$$\lambda_1 = \lambda + \psi \cdot t \tag{7.3}$$

Skoro w omawianym zjawisku punkty K, X są nieruchome to odległość KX nie zmieniła się, a więc nie zmieniła się szerokość ekliptyczna gwiazdy. Odpowiednie zmiany we współrzędnych równikowych powodowane precesją luni-solarną są bardziej skomplikowane i należałoby je wyprowadzić rozważając trójkąty sferyczne KPX oraz KP_1X.

Północny biegun świata wskutek precesji luni-solarnej zakreśla wokół bieguna ekliptyki koło małe w czasie około 26000 lat. Oś rotacji bryły ziemskiej zmieniając kierunek w przestrzeni jest jednak ciągle jednakowo nachylona do płaszczyzny ekliptyki. Wskutek tego zjawiska w miarę upływu lat współrzędne gwiazd mogą ulec drastycznej zmianie.

Powyższy opis precesji jest dość grubym przybliżeniem gdyż opiera się na dwóch nieścisłych założeniach. Mianowicie, że nachylenie ekliptyki do równika oraz tempo precesji luni-solarnej są stałe. Ponadto dotąd nie wzięliśmy w rachubę ruchu punktu K czyli bieguna ekliptyki. Zgodnie z dynamiką Newtonowską Ziemia porusza się wokół Słońca po orbicie keplerowskiej w stałej płaszczyźnie. Tak definiowaliśmy płaszczyznę ekliptyki. Nie jest to jednak całkiem ścisły wniosek, gdyż wyprowadzony został z oddziaływań jedynie dwóch ciał, Słońca i Ziemi. Zupełnie pominięto wpływ pozostałych planet. Wpływ ten powoduje drobne perturbacje ziemskiej keplerowskiej orbity, w rezultacie czego obserwujemy małe przesunięcia punktu K na sferze (rysunek 7.2).

Przypuśćmy, że biegun ekliptyki uległ przesunięciu z K do K_1. Jest to nieduża zmiana około $0.1''$ rocznie. Zbadamy wpływ przesunięcia KK_1 na współrzędne równi-



Rysunek 7.2: Precesja planetarna — zmiana położenia bieguna ekliptyki z miejsca K do niejsca K_1, biegun świata P nieruchomy.

kowe gwiazdy X zakładając, że biegun świata P jest nieruchomy. Skoro $PX = 90^o - \delta$, to przesunięcie KK_1 nie ma żadnego wpływu na deklinację gwiazdy. Kąt $KPX = 90^o + \alpha$ (rysunek 7.2) został zredukowany o kąt KPK_1. W konsekwencji o taki sam kąt uległa zmniejszeniu rektascensja gwiazdy, co nie zależy od położenia gwiazdy na sferze. Dla wszystkich gwiazd, efekt przesunięcia punktu K wskutek perturbacji planetarnych jest taki sam: każdego roku rektascensje ulegają zmniejszeniu o wartość oznaczaną tradycyjnie przez λ' zwaną *precesją planetarną*. Zmianom tym towarzyszy zmniejszenie kąta ε, nachylenia równika do ekliptyki.

Precesji planetarnej nie należy rozumieć jako wyłącznie wiekowy wpływ na wartości współrzędnych gwiazd. Po pierwsze stała precesji planetarnej nie jest absolutną stałą, wykazuje drobne zmiany gdy obydwa bieguny P i K zmieniają swoje położenia. Dalej, w rozważaniach pominięto małe okresowe wyrazy (podobne do nutacji) co wymaga usprawiedliwienia. Są to rzeczywiście bardzo małe wyrazy ale ważniejsze jest, że można je w zupełności wyeliminować przez pozycyjne obserwacje południkowe. Obserwacje te dają absolutne wartości deklinacji oraz względne wartości rektascensji. Planetarna precesja nie wpływa na deklinację, natomiast rektascencje wszystkich gwiazd zmniejsza w identycznym stopniu.

Zmiany w nachyleniu ekliptyki do równika powodowane perturbacjami planetarnymi wpływają na tempo precesji luni-solarnej. Jest tak gdyż tempo to obliczane jest jako średni moment skręcający pary sił od Księżyca i Słońca, zależny z drugiej strony od nachylenia osi rotacji Ziemi do płaszczyzny orbity ziemskiej. Oznacza to, że również stała precesji luni-solarnej nie jest stałą absolutną i wykazuje niewielkie zmiany.

Obydwie stałe precesji mimo różnego dynamicznego pochodzenia, z punktu widzenia astrometrii są podobne, ponieważ obie wywołują wiekowe zmiany w równikowych współrzędnych gwiazd. Dlatego dla wygody łączy się je w jedną stałą, zwaną stałą precesji ogólnej p,

$$p = \psi - \lambda' \cdot \cos\varepsilon \tag{7.4}$$

Jest to tzw. *ogólna precesja* w długości ekliptycznej.

W krótkich interwałach czasu, powiedzmy roku, całkowity efekt precesji ogólnej można opisać jako zwykłą superpozycję precesji luni-solarnej i precesji planetarnej. Podejście to nie będzie jednak wystarczająco dokładne dla dłuższych odcinków czasu. Trzeba wówczas stosować formuły ścisłe a te są bardziej złożone. Współczynniki, które w nich występują dają się jednak wyliczyć z pomocą stałych precesji ψ, λ', p, ich aktualne wartości obliczane są z pomocą fotmuł:

$$\begin{aligned} \psi &= 50.3878'' + 0.0049'' \cdot T \\ \lambda' &= 0.1055'' - 0.0189'' \cdot T \\ p &= 50.2910'' + 0.0222'' \cdot T \end{aligned} \tag{7.5}$$

gdzie T jest czasem liczonym w stuleciach od epoki 2000.0.

Przemieszczaniu biegunów K i P towarzyszą odpowiednie zmiany orientacji sprzężonych z nimi płaszczyzn ekliptyki i równika. I dlatego aby ustalić równik i ekliptykę w sposób jednoznaczny koniecznym jest podanie daty. Dla danej daty równik można definiować dwojako w zależności od tego czy uwzględniamy nutację czy też nie. Jeśli tylko ograniczymy się do precesji luni-solarnej, wówczas równik podlega jedynie zmianom wiekowym i określany jest mianem *równika średniego*. Jeśli dodatkowo uwzględniona jest nutacja, otrzymany w ten sposób równik nazywa się *równikiem prawdziwym*. Podobne określenia mamy w przypadku punktu równonocy: *średnia* (*prawdziwa*) *równonoc* jest to punkt przecięcia się średniego (prawdziwego) równika z ekliptyką daty. Współrzędne katalogowe gwiazd najczęściej podawane są w odniesieniu do średniego równika i równonocy.

Chcąc porównać obserwacje wykonane w różnych momentach czasu trzeba najpierw odnieść je do tego samego równika i równonocy.[3] Dlatego przyjęto obserwacje odnosić do średniego równika i równonocy pewnej epoki standardowej. Takimi epokami są np. 1900.0, 1950.0 a obecnie 2000.0 .

Sprowadzenie obserwacji do identycznej epoki ma szczególne znaczenie jeśli zamierzamy je wykorzystać w badaniach ruchu ciał niebieskich. Przypuśćmy, że wykonaliśmy serię obserwacji asteroidy, np. dziesięć obserwacji w okresie kilku miesięcy. Z obserwacji tych zamierzamy wyznaczyć orbitę. Jeżeli współrzędne wyznaczone z tych obserwacji odniesione były do równika i równonocy odpowiadających momentom obserwacji, oznacza to, że współrzędne te odniesione są do układu odniesienia zmieniającego swoją orientację. A w takim wypadku newtonowska analiza ruchu asteroidy mija się z celem. Dokonując starannej transformacji do wspólnego, standardowego układu odniesienia mamy gwarancję, że obserwacje odnoszą się do układu inercjalnego.

7.3.2 Ruchy własne gwiazd

Gdyby gwiazdy można było traktować jako nieruchome punkty na sferze niebieskiej, wówczas wszelkie zmiany ich współrzędnych stwierdzone z pomocą obserwacji południkowych należałoby w całości przypisać efektom precesyjnym. Tymczasem każda gwiazda porusza się, ma swój *ruch własny*, co na rysunkach 7.1 lub 7.2 objawiłoby się przemieszczaniem punktu X w jakimś kierunku. Zmiany położeń gwiazdy, w porównaniu ze zmianami wartości współrzędnych powodowanych precesją są nieduże. Jedynie kilka gwiazd ma ruch własny przekraczający $1''$ rocznie, najczęściej roczny ruch własny stanowi drobny ułamek sekundy. Ruch własny gwiazdy zależy od parametrów jej ruchu

[3] Jest to oczywiście pewien żargon, bo tak naprawdę chodzi tu o transformację obserwowanych współrzędnych ciała do układu odniesienia określonego z pomocą konkretnego równika i punktu równonocy.

względem środka sfery, a także od jej odległości. A zatem, odległe najczęściej słabe gwiazdy będą miały niewielki ruch własny.

Przy założeniu, że ruchy własne gwiazd mają kierunki przypadkowe, z południkowych obserwacji daje się wydzielić systematyczne efekty precesyjne. Oznacza to, że możemy wyznaczać zarówno ruchy własne jak i stałe precesji. Jednak dokładność wyznaczenia jednej wielkości ogranicza dokładność określenia drugiej. A więc mimo, iż ruchy własne mogą być odniesione do układu inercjalnego, to w przypadku obserwacji południkowych będzie to możliwe jedynie z dokładnością z jaką znane są stałe precesji.

Ruchy własne wyznaczane są z obserwacji wykonanych w odległych od siebie epokach. Potrzeba bowiem sporo czasu by przemieszczenie gwiazdy narosło do mierzalnej wielkości, co pozwoliłoby na wyznaczenie składowych ruchu własnego w rektascensji i deklinacji z dużą dokładnością. Najpowszechniej stosowane metody polegają na porównaniu rezultatów precyzyjnych pomiarów klisz fotograficznych wykonanych w różnych epokach. Obserwacje fotograficzne gwiazd dostarczają jedynie względnych położeń obiektów znajdujących się na kliszy. Ich położenia względne mogą być wyznaczone z dużą precyzją, ale chcąc znać wartości absolutne współrzędnych (α, δ), trzeba wykorzystać niektóre z gwiazd na kliszy jako gwiazdy odniesienia. Oznacza to, że ich współrzędne a także ruchy własne są znane z góry. A zatem mimo iż względne położenia gwiazd znane są bardzo dokładnie, dokładniej niż z obserwacji południkowych, przewaga ta w dużym stopniu znika z powodu konieczności oparcia się o absolutne pomiary południkowe. I dlatego ruchy własne gwiazd otrzymane z klisz fotograficznych nie są wolne od błędów systematycznych zastosowanego układu odniesienia. Tą ostatnią trudność można zminimalizować wybierając jako gwiazdy odniesienia obiekty tak odległe, że ich ruchy własne można uznać za zaniedbywalne.

Ruchy własne zwykle wyznacza się względem heliocentrycznej sfery niebieskiej. Zgodnie z definicją ruch własny jest efektem niezerowej tangencjalnej składowej wektora prędkości gwiazdy względem Słońca. Ponieważ Galaktyka jako całość obraca się, zarówno gwiazda jak i Słońce poruszają się własnymi ruchami względem środka Galaktyki. Słońce jak się uważa znajduje się ok. 10 kpc od centrum Galaktyki i podobnie do gwiazd ze swego najbliższego sąsiedztwa porusza się po z grubsza kołowej orbicie z szybkością liniową $200-250$ km/s. Pełnego obiegu wokół centrum dokonuje więc w czasie około 0.25 miliarda lat. Informacje te pochodzą z badań nad kinematyką Galaktyki, w których wykorzystano pomiary ruchów własnych i prędkości radialnych gwiazd.

Średnia prędkość wszystkich gwiazd w najbliższym sąsiedztwie Słońca definiuje tzw. lokalny standard spoczynku (LSR). Każda gwiazda ma pewną prędkość względem LSR, a więc i Słońce. Obserwowany ruch własny gwiazdy zależy od jej prędkości względem Słońca i dlatego wpływ prędkości własnej Słońca (tzw. lokalny ruch słoneczny) tkwi w obserwowanych ruchach własnych gwiazd. Ale zakładając, że poszczególne ruchy własne gwiazd mają rozkład losowy, możliwym jest na drodze statystycznych analiz wyznaczyć lokalną składową słoneczną, jej wielkość i kierunek.

Również LSR ma pewną prędkość względem środka Galaktyki. Jest to główna prędkość rotacyjna Glaktyki w kierunku $l = 90°, b = 0$. Rotacyjna prędkość galaktyczna zmienia się jednak wraz z odległością od środka, co wywiara mały systematyczny wpływ na ruchy własne gwiazd. Większa część gwiazd jakie możemy obserwować, znajduje się w tym samym obszarze Galaktyki co Słońce. Są to gwiazdy odległe od Słońca nie więcej niż kilka kiloparseków. Powinniśmy zatem opisywać ich ruch jako różnicową rotację galaktyczną aniżeli rotację jako całości. Można pokazać, że różnicowa rotacja galaktyczna wywołuje ruch własny gwiazdy w płaszczyźnie Galaktyki dany formułą

$$\mu \propto A \cdot \cos(2 \cdot l) + B \tag{7.6}$$

gdzie l, jest długością galaktyczną gwiazdy. Taki ruch własny nie zależy od odległości i powoduje wzrost długości galaktycznej. Stałe A, B nazywane są stałymi Oorta. Nie znamy ich zbyt dokładnie, w szczególności słabo znamy stałą B. Obie stałe wynoszą około 0.01 sekund łuku na rok. Co jest tu bardzo istotne to to, że efekt opisany równaniem (7.6) oznacza, że każda gwiazda na kliszy wykazuje pewien ruch własny. Stąd statystyczne założenie, że gwiazdy słabe, znajdujące się daleko od Słońca, mają znikomy ruch własny nie jest uzasadnione. Dlatego, bez dodatkowych poprawek, słabe gwiazdy nie nadają się do definicji dobrego układu odniesienia.

7.3.3 Obiekty pozagalaktyczne

Najlepszy sposób wyjścia z tej sytuacji polega na wyborze na kliszy fotograficznej takich obiektów oporowych,[4] które nie należą do Galaktyki. Ale nie mogą to być inne galaktyki, bowiem ich obrazy na kliszach nie są punktowe, a tylko takie mogą zostać precyzyjnie pomierzone. Odkrycie kwazarów o punktowych obrazach na kliszy rozwiązało problem. Co więcej, wiele kwazarów okazuje się być emiterami promieniowania radiowego, można zatem ich położenia ugruntować wyjątkowo precyzyjnymi technikami radioastrometrycznymi. Kwazary powszechnie uważa się za jądra galaktyczne znajdujące się na ogromnych odległościach i dlatego nie wykazują mierzalnych *ruchów tangencjalnych*.[5]

Takie pozagalaktyczne obiekty nadają się do definiowania układu odniesienia, a przynajmniej obecnie mamy taką nadzieję. Ponieważ obiekty te znajdują się od nas na wyjątkowo dużych odległościach, dlatego przyjmuje się, 1ze nie wykazują żadnych ruchów własnych względem układu inercjalnego. Założenie to jest to pokrewne z zasadą Macha żądającą by Wszechświat nie wykazywał jakiejkolwiek ogólnej rotacji. Żądanie to akceptowane jest przez większość teorii kosmologicznych, w szczególności przez teorie adoptujące izoptropowe modele rozszerzającego się Wszechświata. Uzasadnienie obserwacyjne tych modeli wynika z izotropowego rozkładu na sferze obrazów odległych galaktyk, oraz z faktu, że prędkości radialne tych obiektów wzrastają z odległością. Jednak najbardziej ewidentnym potwierdzeniem izotropowości jest tzw. mikrofalowe promieniowanie tła. Jest ono w wysokim stopniu jednorodne na całej sferze niebieskiej. Promieniowanie to zapoczątkowane zostało w bardzo wczesnym etapie ekspansji Wszechświata i dlatego wykazuje obecnie naturę izotropową na bardzo dużych odległościach ($\sim 10^{10}$ lat świetlnych).

W modelu izotropowym dowolny punkt może być traktowany jako centralny, a obserwowane z dowolnego miejsca prędkości radialne systematycznie zwiększają się z odległością, zbliżając się do prędkości światła na ”widzialnej granicy wszechświata” — na jego horyzoncie jak się niekiedy ją określa. Natomiast prędkości poprzeczne w takim modelu na dowolnej odległości od wybranego punktu wykazują jedynie przypadkowy rozkład wokół wartości zerowej. Stąd ruchy własne obiektów pozagalaktycznych dążą

[4] Chodzi tu o obiekty względem których określane są położenia innych ciał.

[5] Ruch tangencjalny przebiega w kierunku prostopadłym do kierunku widzenia obiektu.

do zera z odległością. A przynajmniej dla tych obiektów, które możemy jeszcze obserwować należy oczekiwać, że będą one bardzo małe. Oszacowanie przypadkowych prędkości transwersalnych dokonane zostało z pomocą prędkości własnej Słońca względem tła Wszechświata. Z badań tła mikrofalowego wynika, że prędkość ta wynosi około 400 km/s, co odpowiada zaniedbywalnemu ruchowi własnemu rzędu 10^{-4} sekundy łuku w odległości jednego megaparseka. Dlatego układ odniesienia zdefiniowany z pomocą położeń obiektów pozagalaktycznych spełnia wszystkie wymagania inercjalnego układu odniesienia.

7.4 Początek układu odniesienia — środek sfery niebieskiej

Najczęściej stosowane bywają trzy początki układów odniesienia: miejsce obserwacji, środek Ziemi i środek Słońca co odpowiada sferze *topocentrycznej*, sferze *geocentrycznej* i sferze *heliocentrycznej*. Obserwacje z konieczności dokonywane są względem sfery topocentrycznej, natomiast ze względu na kompromis dogodny dla wszystkich astronomów zamieszkujących kulę ziemską, efemerydy obserwacyjne planet podawane są w odniesieniu do środka Ziemi. Sfera heliocentryczna wygodna jest do opisu świata gwiazd.

Rozważmy najpierw topocentryczny początek układu odniesienia. Jak wiadomo, uczestniczy on w ruchu dobowym Ziemi. Jest on zmienny co do kierunku, czyli przyspieszony, a zatem topocentrum nie może stanowić początku inercjalnego układu odniesienia. Ruch dobowy obserwatora przejawia się w dwojaki sposób: po pierwsze wprowadza zmienną składową do prędkości radialnych, po drugie powoduje okresowe zmiany obserwowanych z Ziemi położeń obiektów wskutek zjawisk paralaksy i aberracji. Wpływ aberracyjny oraz zmiana prędkości radialnej zależą od stosunku szybkości obserwatora do szybkości światła. Maksymalną prędkość ma obserwator na równiku ziemskim i wynosi ona 0.465 km/s. Paralaksa natomiast, zależy od długości wektora przemieszczenia obserwatora z jednego początku do innego. W omawianym przypadku przemieszczenie jest wielkością rzędu promienia Ziemi, 6378 km.

Podobne rozważania dotyczą geocentrycznego początku układu odniesienia. Z powodu ruchu orbitalnego Ziemi środek geocentrycznego układu także doznaje przyspieszeń i dlatego nie można traktować go jako początku układu inercjalnego. Ruch przyspieszony początku układu powoduje roczne zmiany w prędkościach radialnych, paralaksę roczną i roczną aberrację. [6] Orbitalna prędkość Ziemi wynosi w przybliżeniu 30 km/s co stanowi 10^4 prędkości światła. Przemieszczenie początku układu odpowiedzialne za paralaksę roczną jest rzędu jednostki astronomicznej. Zatem, układ odniesienia o początku w środku Ziemi nie realizuje układu inercjalnego, może jednak być podstawą do wyznaczania odległości do gwiazd.

Sytuacja zmienia się gdy początek układu umieścimy w środku Słońca. W trakcie ruchu dookoła centrum Galaktyki Słońce porusza się zasadniczo ze stałą prędkością. Jego przyspieszenie a, można wyznaczyć następująco. Przyjmijmy promień kołowej orbity Słońca $r = 10^4$ pc,[7], okres obiegu $T = 2.5 \cdot 10^8$ lat. Wówczas w jednostkach SI, prędkość

[6] Przyspieszenie liniowe w ruchu rocznym wynosi około $6 \cdot 10^{-3} ms^{-2}$.

[7] Dla wygody podajemy, że $1\mathrm{pc} = 3.1 \cdot 10^{16}\mathrm{m}$

kątowa Słońca wynosi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 8.0 \cdot 10^{-16}\ s^{-1}$$

a przyspieszenie liniowe

$$a = r \cdot \omega^2 = 2.0 \cdot 10^{-10}\ ms^{-2}$$

Tak małe przyspieszenie jest niewykrywalne przez współczesne pomiary pozycyjne i radialne, a w czasie jednego stulecia powoduje zmianę w prędkości mniejszą niż 1 m/s. Stąd w praktyce, heliocentryczny układ odniesienia można traktować jako układ inercjalny. Ale z jednym zastrzeżeniem. To cały Układ Słoneczny znajduje się w niemal jednostajnym ruchu względem środka Galaktyki a nie Słońce z osobna. Dlatego punktem, który należałoby adoptować jako początek inercjalnego układu odniesienia jest barycentrum Układu Słonecznego. Słońce przemieszcza się wokół tego punktu w zmiennej odległości rzędu 10^6 km. Należy więc odróżniać sferę heliocentryczną od *barycentrycznej*, gdyż tylko ta ostatnia z nieruchomym równikiem i punktem równonocy w pełni realizuje układ inercjalny.

7.5 Przesunięcie paralaktyczne i aberracyjne

Zajmiemy się teraz zmianami położeń ciał niebieskich mających miejsce w trakcie przemieszczania się początków układów odniesienia. Jako pierwsze omówimy skutki powstałe w rezultacie samego przemieszczenia, tzn interesujemy się zmianą współrzędnych jaka ma miejsce gdy obserwujemy obiekt z jednego i drigiego miejsca — zjawisko paralaksy. W następnej kolejności rozpatrzymy wpływ ruchu obserwatora i obiektu na wyznaczone przez niego wspłrzędne — zjawisko aberracji i efekt niezerowego czasu propagacji promieniowania E-H.

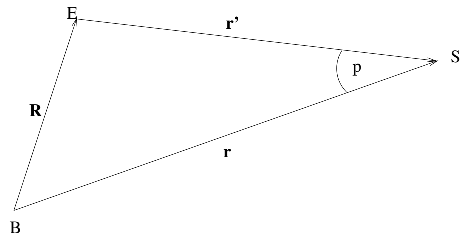
7.5.1 Paralaksa

Niech C oznacza jakiś początek standardowy, O początek w miejscu obserwatora. Wektor położenia punktu O względem C oznaczmy przez $\mathbf{R}$ (rysunek 7.3). Położenie obiektu względem C oznaczmy przaz $\mathbf{r}$. Widomy, czyli obserwowany kierunek do obiektu zmiejsca O dany jest wektorem $\mathbf{r}'$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} \tag{7.7}$$

Niezerowa różnica między wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ stanowi podstawę zjawiska *paralaksy*. Długość wektora $\mathbf{R}$ jest najczęściej bardzo mała w stosunku do odległości do gwiazd, dlatego pożyteczną może okazać się przybliżona formuła opisująca zjawisko paralaksy. Trudno jednak wobec prostoty dokładnego równania (7.7), nazwać formułę przybliżoną uproszczeniem. Jej przewaga leży raczej po stronie rachunkowej. Interesujemy się kierunkami do ciał niebieskich, zatem niech $\mathrm{s}, \mathrm{s}', \mathrm{s_o}$ będą wektorami jednostkowymi wektorów $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{R}$ odpowiednio. Mamy więc takie związki

$$\mathbf{r} = \mathrm{r}\,\mathrm{s} \qquad \mathbf{r}' = \mathrm{r}'\,\mathrm{s}' \qquad \mathbf{R} = \mathrm{R}\,\mathrm{s_o}$$



Rysunek 7.3: Przesunięcie paralaktyczne gwiazdy. Zakładamy, że punkty O, S, C nie poruszają się. Obserwator w miejscu O wyznaczy kierunek do obiektu S inny niż gdyby obserwował ten obiekt znajdując się w miejscu C. Zmiana kierunku wynika jedynie z faktu, że raz obserwujemy ten sam obiekt w jednym miejscu, drugi raz w innym. Przy czym zmiana ta nie zależy od sposobu w jaki obserwator przemieścił się np. z O do C.

Równanie (7.7) możemy zatem napisać w postaci

$$r'\,\mathrm{s}' = \mathrm{r}\,\mathrm{s} - \mathrm{R}\,\mathrm{s_o}. \tag{7.8}$$

lub

$$\mathrm{s}' = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}'}\,\mathrm{s} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}'}\,\mathrm{s_o}$$

Jeśli pomnożymy je dwukrotnie, lewostronnie, wektorowo przez wersor s, to

$$\mathrm{s}\times\mathrm{s}\times\mathrm{s}' = \mathrm{s}\times\left(\mathrm{s}\times\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}'}\,\mathrm{s} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}'}\,\mathrm{s_o}\right)\right)$$

Wykorzystując znane związki wektorowe (patrz [**?**]), otrzymamy

$$(\mathrm{s}\cdot\mathrm{s}')\mathrm{s} - (\mathrm{s}\cdot\mathrm{s})\mathrm{s}' = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}'}\,\mathrm{s}\times(\mathrm{s}\times\mathrm{s_o})$$

Zakładając $R \ll r$, a więc dla małych przesunięć paralaktycznych możemy podstawić $r = r'$ oraz $\mathrm{s}\cdot\mathrm{s}' = \mathbf{1}$, i w rezultacie dostajemy wzór przybliżony

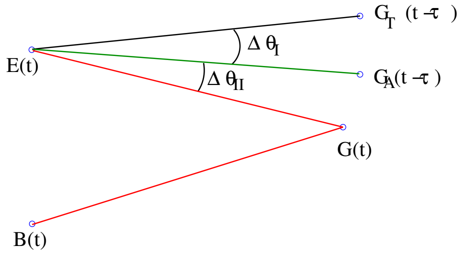
$$d\mathrm{s} = \mathrm{s}' - \mathrm{s} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\,\mathrm{s}\times(\mathrm{s}\times\mathrm{s_o}) \tag{7.9}$$

Równanie to bardzo przypomina wyprowadzoną w rozdziale drugim formułę 3.14 na małe przesunięcie na sferze.

Na rysunku 7.3, punkt S i O reprezentują położenia obiektu i obserwatora odpowiadajce pewnemu momentowi czasu t. Są to tzw. położenia (miejsca) *geometryczne*, w których obiekt i obserwator znajdują się w chwili t. Podobnie mówimy o kierunkach na punkty S i O, są to kierunki geometryczne względem C. ↱

7.5.2 Aberracja i czas propagacji promieniowania

W przypadku ogólnym obserwator i obiekt mogą znajdować się w ruchu względem barycentrum B, sprawia to, że na ilustrującym taki przypadek rysunku 7.4, punkty G i E trzeba zdefiniować z pewną ostrożnością. Obserwator E obserwuje kwant promieniowania docierający z kierunku topocentrycznego G_T (apparent), który nie musi być



Rysunek 7.4: Przesunięcie aberacyjne gwiazdy. W ogólności, punkty E i G poruszają się, natomiast punkt B pozostaje w spoczynku. Konfiguracja tych punktów odpowiada momentowi czasu t, w którym do obserwatora w E dotarł z kierunku G_T kwant wyemitowany z obiektu znajdującego się w chwili $t - \tau$ w miejscu G_A. Od G_A do E foton poruszał się w czasie τ, a obiekt zdołał przemieścić się z G_A do G.

idedntyczny geometrycznym kierunkiem obiektu G. Różnica między tymi kierunkami na rysunku 7.4 identyczna z kątem $\Delta\theta$ obejmuje dwa składniki powstałe w rezultacie dwóch przyczyn:

I- składnik $\Delta\theta_I$ to efekt ruchu obserwatora, tzw. zjawisko aberracji promieniowania,

II- $\Delta\theta_{II}$ to efekt ruchu obiektu, zmiana kierunku do obiektu jest konsekwencją niezerowego czasu propagacji promieniowania od obiektu do obserwatora.

Gdy obserwowany obiekt jest gwiazdą w poprawce $\Delta\theta = \Delta\theta_I$ nie uwzględnia się składnika od czasu propagacji promieniowania. Dlatego poprawka ta nosi miano aberracji gwiazdowej rocznej, dobowej, ... zależnie od tego czy w rachubę bierzemy ruch roczny, dobowy, ... Dla obiektów położonych w Układzie Słonecznym uwzględnianie są obie przyczyny a poprawka $\Delta\theta = \Delta\theta_I + \Delta\theta_{II}$ nazywana jest aberracją planetarną.

Wobec takiej konwencji, katalogowe położenia gwiazd jako uwolnione od aberracji gwiazdowej, można porównać z położeniami obiektów Układu Słonecznego dodając do efemerydy tych obiektów jedynie poprawkę $\Delta\theta_{II}$. Nie ma potrzeby wprowadzania poprawki z tytułu ruchu obserwatora, bo efemerydę porównuje się z niewielkim polem gwiazdowym, dla którego poprawka $\Delta\theta_I$ dla gwiazd i planet jest niemal taka sama. Ten dziwny kierunek, powstały porzez dodanie do miejsca geometrycznego planety jedynie poprawki za czas propagacji nosi miano *kierunku (miejsca) astrometrycznego*. Jest to kierunek do poruszającego się obiektu jaki wyznaczyłby hipotetyczny nieruchomy obserwator.

Wyprowadzimy teraz wzór pozwalający na wyznaczenie poprawki $\Delta\theta_I$ wynikającej z ruchu obserwatora względem obiektu. Rozważamy przypadek, w którym na rysunku 7.4 B będzie punktem nieruchomym, natomiast punkt E ma prędkość $\mathbf{V}$ względem B. Przyjmijmy, że obserwację kierunku do pewnego obiektu wykonano w E w momencie t. Oznaczmy przez τ czas propagacji kwantu promieniowania od obiektu do obserwatora. Zatem na rysunku 7.4 punkt E reprezentuje położenie obserwatora w momencie t, a punkt G_A położenie obiektu w momencie wcześniejszym $(t - \tau)$. [8] Linia EG_A reprezentuje trajektorię fotonu ale taką jaką wyznaczonoby w układzie odniesienia o początku

[8]Wprowadzenie tych założeń nie narusza ścisłości równania (7.7) dla konfiguracji punktów B, E, G_A.

w B. Ponieważ obserwator ma prędkość $\mathbf{V}$ względem układu inercjalnego, w rezultacie astrometryczny kierunek do obiektu G_A wykazuje pewne *aberracyjne* przesunięcie. Rozważymy je z klasycznego punktu widzenia.

Oznaczmy przez c szybkość fotonu zmierzoną względem układu odniesienia w B. Foton, który dotarł do E ma względem układu w B prędkość $-c\mathbf{s_A}$. Sam układ w B ma względem obserwatora prędkość $-\mathbf{V}$, a więc dla obserwatora w E fotony posiadają prędkość

$$\mathbf{u} = -\mathrm{c}\mathbf{s_a} - \mathbf{V} \tag{7.10}$$

Ponieważ nasze podejście jest klasyczne (stosujemy transformację Galileusza), długość wektora $\mathbf{u}$ niekoniecznie musi wynosić c. Dlatego kładąc $\mathbf{u} = -\mathrm{c_T}\mathbf{s_w}$, oraz $\mathbf{V} = \mathrm{V}\mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{s_T}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi, $\mathbf{s_T}$ definiuje topocentryczny kierunek do obserwowanego obiektu i mamy

$$c_T\mathbf{s_T} = \mathrm{c}\mathbf{s_A} + \mathrm{V}\mathbf{n} \tag{7.11}$$

Równanie to jest podobne do równania (7.8), zatem w analogiczny sposób dwukrotnie mnożymy je wektorowo, lewostronnie przez $\mathbf{s_A}$, dalej zakładamy, że $V \ll c$, co pociąga $c_T \approx c$ oraz $\mathbf{s_T} \cdot \mathbf{s_A} \approx \mathbf{1}$. Ostatecznie uzyskamy przybliżenie

$$\mathbf{s_T} - \mathbf{s_A} = -\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\,\mathbf{s_A} \times (\mathbf{s_A} \times \mathbf{n}) \tag{7.12}$$

Równanie to jest dokładne jedynie do wyrazów rzędu $\frac{V}{c}$.

7.5.3 Łączny wpływ paralaksy i aberracji

Całkowity wpływ przemieszczenia początku z punktu B do ruchomego punktu E otrzymamy dodając do siebie równania (7.9) i (7.12). Gwarantuje to jedynie dokładność pierwszego rzędu w $\frac{R}{r}$ i $\frac{V}{c}$, co dla wielu zastosowań w zupełności wystarcza. Przy tej dokładności, $\mathbf{s_A}$ może być zastąpione po prawej stronie równania (7.12) przez $\mathbf{s}$, i w rezultacie możemy napisać

$$\mathbf{s_T} - \mathbf{s} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\,\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s_R}) - \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\,\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \tag{7.13}$$

Podsumowując, $\mathbf{s_T}$ jest kierunkiem obserwowanym (topocentrycznym) w E w momencie t, $\mathbf{s}$ jest astrometrycznym kierunkiem obiektu względem B w chwili $(t - \tau)$. Przemieszczenie początku układu z B do E wynosi $R\mathbf{s_R}$, a prędkość nowego początku względem B jest równa $V\mathbf{n}$.

Jeśli wymagana jest duża dokładność, rezygnujemy z formuł przybliżonych i paralaksa musi być uwzględniona z pomocą dokładnej formuły (7.7). Chcąc podwyższyć dokładność opisu przesunięcia aberracyjnego należy zastosować aparat szczególnej teorii względności.

7.6 Dodatek A. Zadania

1. Oszacuj w przybliżeniu deklinację gwiazdy okołobiegunowej $\alpha\ UMi$ w roku 44 PC.

Rozdział 8

Refrakcja

Streszczenie. Promieniowanie elektromagnetyczne docierające do powierzchniu Ziemi, ze względu na oddziaływanie z okołoziemską atmosferą doznaje zmian kierunku propagacji. Zjawisko to określane mianem refrakcji atmosferycznej przebiega w płaszczyźnie wertykalnej do horyzontu obserwatora, powodując zmniejszenie odległości zenitalnej ciał niebieskich. Zmiana ta nie jest stała w czasie, zależy od lokalnych warunków atmosferycznych w miejscu obserwacji. W celu opisu refrakcji korzystamy z modelu płaskiej albo radialnie symetrycznej atmosfery. W modelu płaskim przy ustalonych parametrach atmosfery, kąt refrakcji R jest proporcjonalny do tangensa odległości zenitalnej obiektu. Przybliżony charakter modelu sprawia, że w praktyce nadaje się do wykorzystania dla obiektów obserwowanych na umiarkowanych odległościach od zenitu ($z < 45°$). Warunki propagacyjne fali elektromagnetycznej opisane są z pomocą współczynnika załamania atmosfery n. W modelu płaskiej atmosfery współczynnik ten zależy przede wszystkim od stanu przyziemnej warstwy atmosfery. Wpływy zmienności n od długości fali promieniowania oraz od składu powietrza mają w tym modelu charakter drugorzędny.
W drugim modelu refrakcji atmosferę traktuje się jako złożoną z koncentrycznych sferycznych warstw różniących się warunkami propagacyjnymi promieniowania. Refrakcję R w takim modelu można prezedstawić jako całkę refrakcji, w której wyrażenie podcałkowe zależy od chwilowej odległości kwantu promieniowania i chwilowej wartości współczynnika załamania n. Pełną całkę refrakcji można rozwiązać numerycznie jeżeli mamy do dyspozycji kompletną informacje o stanie atmosfery wzdłuż całej trajektorii promieniowania. Można ją jednak aproksymować rozwijając wyrażenie podcałkowe w szereg i odrzucając wyrazy rozwinięcia od trzeciego począwszy. Uzyskane rozwiązanie (równanie (8.31)) jest najpowszechniej stosowaną postacią prawa refrakcji. Występujące w nim współczynniki zależą od lokalnych (w miejscu i czasie) warunków atmosferycznych. W przypadku precyzyjnych obserwacji pozycyjnych parametry w wyrażeniu na refrakcję wyznacza się w oparciu o empiryczne tablice refrakcji. Zawierają one uśrednione z wieloletnich badań dane pozwalając na wyinterpolowanie wartości parametrów, wymagane na dany dzień roku.
Obserwowane położenia ciał niebieskich uwolnione od wpływu refrakcji noszą miano położeń topocentrycznych.

Słowa kluczowe: Współrzędne topocentryczne, refrakcja atmosferyczna, stała refrakcji, kąt refrakcji, całka refrakcji, tablice refrakcji. [a] ↱

[a][Modyfikowano AD 2008, kwiecień, 08]

8.1 Wstęp – miejsca topocentryczne ciał niebieskich

Interesuje nas transformacja współrzędnych z układu odniesienia topocentrycznego do układu geocentrycznego. Powodem dla którego musimy stosować tę transformację są znaczące rozmiary bryły ziemskiej oraz jej ruch wirowy, z powodu których ulegają zmianie wartości współrzędnych obserwowanych położeń ciał niebieskich. Musimy jednak powstrzymać naszą gotowość by zająć się tą transformacją, bowiem na powierzchni Ziemi mamy do czynienia z jeszcze jednym zjawiskiem zmieniającym współrzędne ciał niebieskich, mianowicie z *refrakcją atmosferyczną*.

Atmosfera ziemska jest ośrodkiem o zmiennym współczynniku załamania, powodującym zakrzywienie trajektorii promieniowania elektromagnetycznego. Odkształcenie trajektorii przebiega w płaszczyźnie wertykalnej do horyzontu, wskutek czego obserwujemy zmianę jedynie odległości zenitalnej ciał niebieskich. Jest to efekt trudny do uwzględnienia ponieważ zależy od stanu atmosfery, a ten zmienia się nieustannie. Zmienność atmosfery można by porównać ze zmiennością powierzchni mórz czy oceanów.

Dlatego przez *współrzędne topocentryczne* mamy na myśli współrzędne określone względem układu odniesienia o początku w miejscu obserwacji uwolnione od wpływów refrakcji. ↱

8.2 Refrakcja — model płaskiej atmosfery

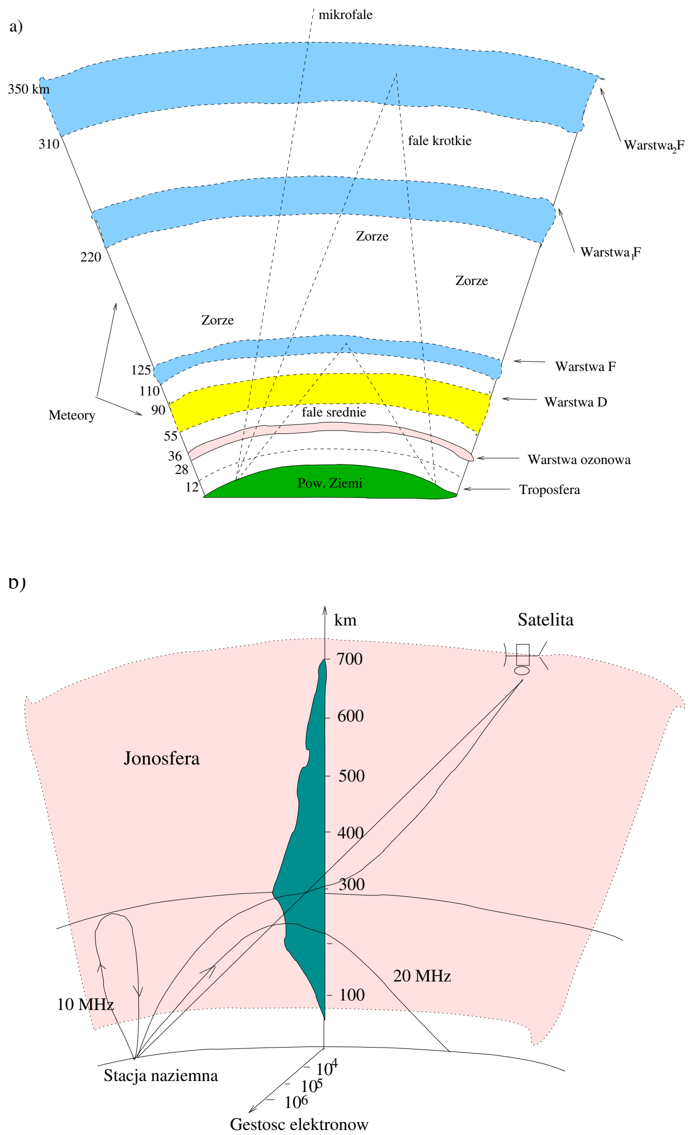
Zakładamy, że w pobliżu miejsca obserwacji atmosfera składa się z równoległych poziomych warstw o niewielkiej grubości. W każdej warstwie współczynnik załamania atmosfery n, jest stały. Takie przybliżenie okazuje się bardzo użyteczne zwłaszcza w przypadku obserwacji obiektów znajdujących się blisko zenitu (w zenicie refrakcja znika). Najsilniejszą refrakcję powodują najgęstsze warstwy atmosfery (a więc troposfera) sięgające do kilku kilometrów nad powierzchnią Ziemi. Promień krzywizny troposfery znacznie przewyższa jej pionową grubość i dlatego przybliżenie płaskiej atmosfery daje dobre wyniki. W rezultacie, dla promieniowania z pasma optycznego istotna jest jedynie refrakcja w troposferze, wpływy od warstw wyższych są zaniedbywalne.

W przypadku promieniowania radiowego nnajwiększy przyczynek wnosi refrakcja jonosferyczna, w szczególności dla fal o długościach z pasma fal krótkich (zobacz rysunek 8.1). Ponieważ jonosfera rozciąga się na wysokość około 1000 km od powierzchni Ziemi w modelu jonosfery nie możemy stosować przybliżenia płaskich warstw.

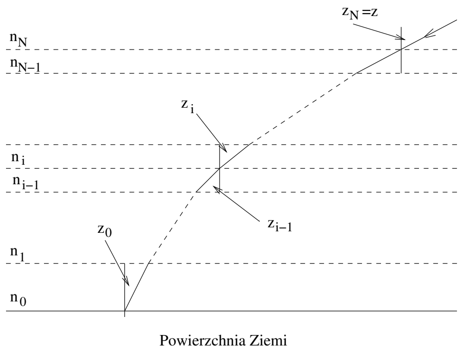
Prześledzimy teraz bieg promieniowania wizualnego w modelu płaskiej atmosfery. Na rysunku 8.2 atmosferę podzielono na N równoległych warstw o współczynnikach załamania $n_0, n_1, \ldots, n_{N-1}$. Ponad warstwą o n_{N-1} mamy już praktycznie próżnię o $n_N = 1$. W warstwie przyziemniej współczynnik złamania wynosi n_0 , przy czym $n_0 > 1$.

Niech do płaskiej atmosfery wpada promień świetlny pod kątem z do kierunku pionu (odległość zenitalna). W poszczególnych warstwach jego trajektoria tworzy z kierunkiem pionu kąty z_i odpowiednio. Wartość z_0 równa jest obserwowanej odległości zenitalnej źródła promieniowania. Do każdej z warstw można stosować prawa załamania (takie jak dla płytki równoległościennej), w szczególności drugie *prawo Snelliusa*, [1] co dla sąsied-

[1] I prawo Sneliusa o załamaniu promienia przy przejściu z jednego do drugiego ośrodka o odmiennych własnościach optycznych: promień padający, promień załamany oraz linia normalna do powierzchni roz-



Rysunek 8.1: a) Schematyczny przekrój atmosfery ziemskiej, b) refrakcja jonosferyczna fal radiowych: najsilnieszy wpływ mają warstwy jonosfery o największej gęstości elektronów, wielkość wpływu zależy od częstotliwości fal. Fale o częstotliwościach GHz-owych przenikają jonosferę ale ich trajektorie ulegają niewielkiemu zakrzywieniu, a jednocześne, do satelity sygnały docierają z opóźnieniem od kilkudziesięciu decymetrów do kilku metrów w zależności od chwilowej gęstości elektronów.



Rysunek 8.2: Przebieg zjawiska refrakcji w atmosferze modelowanej z pomocą płaskich poziomych warstw: w każdej $i-$tej warstwie parametry atmosfery są stałe; na każdej granicy dwóch warstw następuje zjawisko załamania zgodnie z prawami Snelliusa.

nich warstw i-tej oraz $(i+1)$-wszej oznacza, że

$$n_i \sin z_i = n_{i+1} \sin z_{i+1} \tag{8.1}$$

$$n_0 \sin z_0 = n_1 \sin z_1 = \ldots = n_N \sin z_N = \sin z$$

czyli

$$n_0 \sin z_0 = \sin z \tag{8.2}$$

Kąt z jest odległością zenitalną źródła jaką obserwowalibyśmy w przypadku braku otaczającej Ziemię atmosfery.

Wobec $n_0 > 1$, obserwowana odległość zenitalna z_0 jest mniejsza od wartości topocentrycznej z, a ponieważ refrakcja przebiega w płaszczyźnie prostopadłej do horyzontu, druga współrzędna horyzontalna, azymut, nie ulega zmianie.

Oznaczmy przez R *kąt refrakcji* i określmy go jako różnicę

$$R = z - z_0 \tag{8.3}$$

Z równania (8.2) mamy

$$\sin z = \sin z_0 \cos R + \cos z_0 \sin R = n_0 \sin z_0$$

Ponieważ zmmiany kierunku propagacji promieni świetlnych nie są duże, we wzorze powyżej możemy zastosować przybliżenie małych kątów, stąd kąt refrakcji R w radianach dany jest jako

$$R = (n_0 - 1) \tan z_0 \tag{8.4}$$

a odpowiednik tego równania w sekundach łuku ma postać

$$R = K \tan z_0 \tag{8.5}$$

gdzie

$$K = 206265\text{''} \cdot (n_0 - 1) \tag{8.6}$$

działu dwóch ośrodków, leżą w jednej płaszczyźnie.

W ramach płaskiego modelu atmosfery równanie (8.2) jest dokładne, natomiast równania (8.4) i (8.5) są przybliżeniami pierwszego rzędu ze względu na $(n_0 - 1)$ i dają dobre rezultaty dla niedużych wartości odległości zenitalnych.[2]

Dla dużych odległości zenitalnych nie ma jednak sensu wprowadzanie wyższych rzędów przybliżenia. A to dlatego, że dla dużych odległości od zenitu, dla których wyrazy wyższych rzędów są znaczące, bardziej istotnym jest zmodyfikownie równania (8.5) przez włączenie do modelu efektu krzywizny atmosfery.

W formułach (8.4), (8.5) kąt refrakcji zależy tylko od obserwowanej odległości z_0 oraz n_0 współczynnika refrakcji przyziemnej warstwy atmosfery. Zupełnie nie interesuje nas stan wyższych warstw atmosfery, gdyż do obliczenia wartości współczynnika n_0 wystarczające są informacje o stanie atmosfery bezpośrednio otaczającej obserwatora. Właściwość ta stanowi sporą zaletę modelu płaskiej atmosfery, która znika natychmiast po wprowadzeniu efektów krzywizny.

Współczynnik n_0 zależy od lokalnych warunków atmosferycznych. Jako standardowe przyjęto warunki odpowiadające ciśnieniu 760 mm Hg i temperaturze 0°C, dla tych danych współczynnik załamania wynosi

$$n_0 = 1.0002927 \tag{8.7}$$

co pociąga

$$K = 60.4'' \tag{8.8}$$

Taka wartość stałej K nazywana jest *stałą refrakcji*. Dla warunków niestandardowych K obliczana jest w oparciu o prawo Dale-Gladstone stwierdzające, że $(n_0 - 1)$ jest proporcjonalne do gęstości powietrza. Oznacza to, że jeśli P jest ciśnieniem atmosfery w milimetrach słupa rtęci a T temperaturą w stopniach Celsjusza, to z prawa opisującego własności gazu wynika

$$n_0 - 1 \propto \frac{P}{273 + T} \tag{8.9}$$

Równanie (8.9) zastosowane łącznie z wartościami dla warunków standardowych daje wzór na kąt refrakcji

$$R = 60.4'' \cdot \frac{P/760}{1 + T/273} \, \tan z_0 \tag{8.10}$$

Udokładnienie równania (8.10) bez włączenia efektu zakrzywienia atmosfery mija się z celem.

Trzeba jednak jeszcze wspomnieć o dwóch ważnych kwestiach. Współczynnik załamania zależy nie tylko od lokalnych wartości ciśnienia i temperatury, ale także od składu chemicznego powietrza oraz od długości fali padającego promieniowania elektromagnetycznego. Skład powietrza (patrz tabela 8.1) można tu uważać za stały poza drobnymi zmianami ilości pary wodnej. Jest to jednak tak mały efekt, że zaniedbanie go w przybliżonej formule (8.10) jest zupełnie uzasadnione.

Poważniejszy problem wynika z zależności współczynnika załamiania n_0 od długości fali. Standardowa wartość $n_0 = 1.0002927$ odpowiada środkowi pasma wizualnego

[2]Często napotykaną w podręcznikach wartością graniczną stosowalności formuły (8.5) jest $z_0 = 45°$.

Tablica 8.1: Skład chemiczny troposfery.

Składnik	Zawartość [%]
Azot (N_2)	78.08
Tlen (O_2)	20.95
Argon (Ar)	0.93
Para wodna (H_2O)	$1 \pm .001$
Dwutlenek węgla (CO_2)	0.03
Neon (Ne)	0.002
Hel (He)	0.0005

(pasmo V) wykorzystywanego w definicji wizualnej jasności gwiazdy. W zakresie całego widma wizualnego różnica $(n_0 - 1)$ zmienia się około 2%, podobnie wartość stałej refrakcji K. W wyniku tych zmian, punktowy obraz gwiazdy rozciąga się w maleńkie widmo wzdłuż wertykału, fioletową częścią bliżej zenitu. Może to wprowadzić systematyczne efekty podczas obserwacji położeń gwiazd o różnych barwach (typach widmowych) i dlatego dodanie do równania (8.10) poprawek z tytułu długości fali niekiedy jest usprawiedliwione.

Zmiany n_0 w zależności od długości fali mogą być wyrażone formułą

$$n_0 - 1 = 2.871 \cdot 10^{-4}(1 + 0.00567/\lambda^2) \tag{8.11}$$

gdzie λ jest długością fali promieniowania w mikronach. Uwzględniając (8.11) w równaniu (8.10), kąt refrakcji R wynosi

$$R = 21.3" \cdot \frac{P\,(1 + 0.0057/\lambda^2)}{273 + T}\ \tan z_0 \tag{8.12}$$

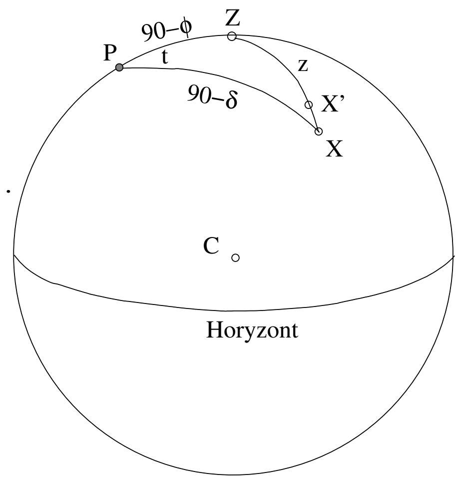
8.3 Wpływ refrakcji na współrzędne równikowe obiektu

Pokażemy teraz jak obliczyć przesunięcie refrakcyjne gwiazdy w jego współrzędnych równikowych. Rozważmy sferę z rysunku 8.3, na którym X reprezentuje położenie topocentryczne gwiazdy a X' jej położenie obserwowane. Punkt P oznacza biegun świata a punkt Z zenit miejsca obserwacji. Przesunięcie gwiazdy X na sferze odbyło się wzdłuż koła wielkiego XZ. A zatem zachodzi tu możliwość zastosowania ogólnych formuł na małe przesunięcie wyprowadzonych w paragrafie 3.2 rozdziału 3. Musimy jednak zidentyfikować elementy tych wzorów z wielkościami występującymi w naszym obecnym problemie.

W przypadku zjawiskka refrakcji kąt θ odpowiada odległości zenitalnej z, współrzędne (α_0, δ_0) będą współrzędnymi równikowymi zenitu miejsca obserwacji, tzn.

$$\alpha_0 = CG_M$$
$$\delta_0 = \phi$$

gdzie CG_M jest miescowym czasem gwiazdowym, ϕ jest szerokością geograficzną obserwatora.



Rysunek 8.3: Refrakcyjne przesunięcie gwiazdy X do położenia obserwowanego X'. Małe przesunięcie refrakcyjne przebiegga wzgłuż wielkiego koła wyznaczonego przez zenit Z miejsca obserwacji i obserwowany obiekt X.

Dalej, różnicę $(\alpha - \alpha_0)$ możemy przedstawić za pośrednictwem związku $CG_M - \alpha = -\mathcal{H} = -t$. Małe przesunięcie gwiazdy wyrażone było jako $d\theta = k \cdot \sin\theta$, a w naszym bieżącym problemmie, z pomocą równania (8.5) mamy

$$d\theta = -R = -K \tan z_0 \approx -K \tan z$$

a zatem w przypadku refrakcji stała k wcale nie jest stałą, bowiem

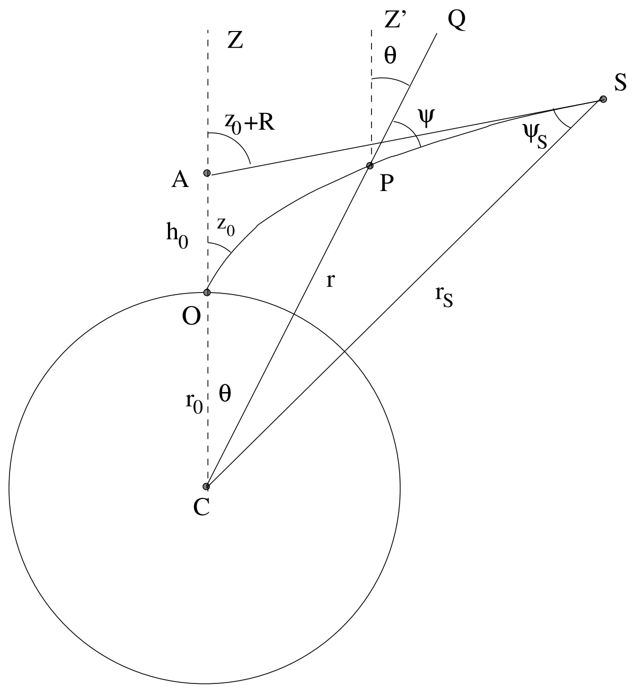
$$k = -K \sec z$$

Z trójkąta sferycznego PZX, (rysunek 8.3), za pomocą wzoru cosinusów można wyeliminować $\sec z$, a po podstawieniu do uaktualnionych wzorów na małe przesunięcie, po drobnych przekształceniach dostaniemy

$$\begin{aligned} d\alpha = \alpha' - \alpha &= \frac{K \sec^2 \delta \sin t}{\cos t + \tan\phi \tan\delta} \\ d\delta = \delta' - \delta &= K \frac{\tan\phi - \tan\delta \cos t}{\cos t + \tan\phi \tan\delta} \end{aligned} \tag{8.13}$$

8.4 Refrakcja — model atmosfery radialnie symetrycznej

Przybliżenie płaskiej atmosfery daje proste formuły, ale staje się bardzo niedokładne w pobliżu horyzontu. Dlatego ww przypadku obserwacji na dużych odległościach od zenitu kąt refrakcji musi być wyznaczony w oparciu o radialno-symetryczny modelu atmosfery. W takim modelu, gęstość powietrza a w rezultacie i współczynnik załamania będą jedynie funkcjami odległości od środka Ziemi, czyli od punktu C na rysunku 8.4. Podobnie jak



Rysunek 8.4: Refrakcja w atmosferze o symetrii radialnej. Opis w tekście.

w modelu płaskim, stałość wspomnianych parametrów ma miejsce w atmosferze znajdującej się w równowadze statycznej, tj. nie wykazującej ruchów powietrza. Niech na tym rysunku O oznacza obserwatora, P dowolny punkt z rzeczywistej trajektorii promieniowania OPS, odcinek $CP = r$, kąt $OCP = \theta$. Para (θ, r) stanowi biegunowe współrzędne punktu P. A zatem, kąt θ wyrażony jako funkcja r, określa trajektorię promieniowania.

Przedłużenie odcinka CO przecina sferę niebieską w punkcie Z w zenicie miejsca obserwacji. Poprowadźmy równoległą PZ' do OZ, i przedłużmy CP do punktu Q. Mamy, że kąt $Z'PQ = \theta$.

Oznaczmy przez z kąt jaki w punkcie P tworzy kierunek propagacji promieniowania z kierunkiem na zenit obserwatora [3]. W miejscu O, kąt ten wynosi z_0 i jest równy obserwowanej odległości zenitalnej. Dalej, niech ψ będzie kątem jaki w punkcie P promień świetlny tworzy z promieniem wodzącym CPQ. Oczywiście mamy, że

$$z = \theta + \psi \tag{8.14}$$

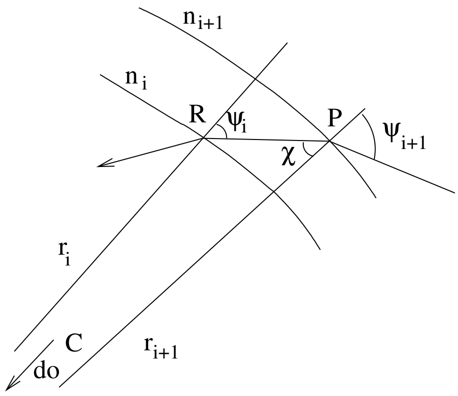
Ponieważ kąt ψ jest kątem pomiędzy kierunkiem radialnym punktu P i styczną do krzywej $\theta = \theta(r)$, stąd

$$\tan\psi = r\frac{d\theta}{dr} \tag{8.15}$$

Na koniec skonstruujmy asymptotę trajektorii promieniowania, przecina ona półprostą OZ w punkcie A. Oznaczmy wysokość punktu A nad miejscem obserwacji przez h_0 .

Współczynnik refrakcji $n = n(r)$ jest funkcją odległosci od środka Ziemi, możemy więc wyobrazić sobie atmosferę jako złożoną ze skończonej liczby odpowiednio cienkich

[3] Kąt pomiędzy styczną w P do trajektorii promieniowania i kierunkiem za zenit.



Rysunek 8.5: Refrakcja w elementarnej radialnie symetrycznej warstwie atmosfery. Opis w tekście.

koncentrycznych warstw o stałym współczynniku załamania, podobnie jak w modelu płaskim, tyle, że tym razem będą to warstwy, powłoki kuliste. Rysunek 8.5 ilustruje w powiększeniu przekrój typowej warstwy kulistej o współczynniku załamania n_i i kątach ψ_i oraz ψ_{i+1}. Niech kąt $RPC = \chi$. Wówczas z prawa załamania

$$n_{i+1} \sin \psi_{i+1} = n_i \sin \chi$$

Kąt χ daje się wyeliminować za pomocą wzoru sinusów zastosowanych do płaskiego trójkąta RPC, mianowicie

$$r_{i+1} \sin \chi = r_i \sin \psi_i$$

Stąd

$$r_{i+1} n_{i+1} \sin \psi_{i+1} = r_i n_i \sin \psi_i$$

Oznacza to, że iloczyn $r\ n\ \ \sin \psi$, dla każdej warstwy jest niezmiennikiem, w szczególności dla warstwy przyziemnej mamy

$$rn \sin \psi = r_0 n_0 \sin z_0 \tag{8.16}$$

bowiem dla tej warstwy $\theta = 0$ i dlatego $\psi = z_0$. Ponieważ refrakcja promieniowania mierzona jest zmianą kąta z, a nie kąta ψ, dlatego z pomocą równań (8.14) i (8.15) znajdujemy, że

$$dz = d\psi + d\theta = d\psi + dr \frac{\tan \psi}{r}$$

a różniczkując prawo refrakcji (8.16), jego różniczkowa forma będzie miała postać

$$rn \cos \psi \left(d\psi + dr \frac{\tan \psi}{r} \right) = -dnr \sin \psi$$

z której otrzymujemy

$$dz = -dn \frac{\tan \psi}{n} \tag{8.17}$$

Równanie (8.17) daje nam elementarną refrakcję przy przejściu promienia światła przez powierzchnię rozdziału dwóch sąsiednich nieskończenie cieńkich kulistych warstw atmosfery. Całkowitą refrakcję R przy przejściu światła przez całą atmosferę ziemską uzyskamy całkując równanie (8.17).

Zamiast odległości r, za zmienną niezależną wygodniej jest przyjąć współczynnik załamania n. Jeżeli $\tan\psi$ wyrazimy z pomocą równania (8.16) jako

$$\tan\psi = \frac{r_0 n_0 \sin z_0}{(r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \tag{8.18}$$

wówczas, kładąc (8.18) do równania (8.17), po scałkowaniu, otrzymamy kąt pełnej refrakcji

$$R = \int_{z_0}^{z} dz = r_0 n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n(r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{1//2}} \tag{8.19}$$

Jest to dokładna formuła zwana *całką refrakcji*, występują w niej dwie zmienne r i n. Powiedziano wcześniej, że współczynnik załamania zmniejsza się z odległością r od środka Ziemi. A zatem gdybyśmy dysponowali funkcją $r = r(n)$, równanie (8.19) można by scałkować numerycznie, tzn. obliczylibyśmy dokładną wartość kąta refrakcji R.

Obok kąta refrakcji można jeszcze wyznaczyć równanie trajektorii wiązki promieniowania. W tym celu, podstawiając prawą stronę równania (8.18) do równania (8.15) otrzymamy całkę

$$\theta = r_0 n_0 \sin z_0 \int_{r'}^{r_0} \frac{dr}{r(r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{1//2}} \tag{8.20}$$

Znając równanie trajektorii możemy wyznaczyć jej asymptotę a w dalszej kolejności wysokość h_0 (patrz rysunek 8.4). Jednakże rozważając trójkąt ACS z tego rysunku, można otrzymać bardzo prosty wzór na h_0 . Potrzeba tylko założyć, że punkt S odpowiada takiemu miejscu na trajektorii promienia świetlnego, dla którego $n = 1$.
Niech r_s i ψ_s będą odpowiadały takiemu właśnie punktowi. Ponieważ $ZAS = z_0 + R$, stąd z trójkąta ACS oraz ze wzoru sinusów mamy

$$r_s \sin\psi_s = (r_0 + h_0)\sin(z_0 + R)$$

Stosując prawo refrakcji (8.16) do lewej strony tego równania otrzymamy

$$h_0 = r_0 \left[\frac{n_0 \sin z_0}{\sin(z_0 + R)} - 1\right] \tag{8.21}$$

Dla niewielkich odległości zenitalnych wysokość h_0 jest zaniedbywalnie mała. Nawet dla umiarkowanych odległości zenitalnych wynosi zaledwia kilka metrów. Wzrasta jednak szybko w pobliżu horyzontu i wynosi 1.5 km dla gwiazd znajdujących się tuż przy horyzoncie.

Sens fizyczny wysokości h_0 jest następujący: po uwzględnieniu refrakcji, topocentryczne współrzędne ciała dotyczą nie tyle miejsca gdzie znajduje się obserwator, ale miejsca położonego o h_0 powyżej obserwatora. Rozróżnienie to może być ważne podczas wyznaczania poprawki z tytułu paralaksy geocentrycznej. Ze względu na niewielką wartość h_0 odpowiedniej korekty trzeba dokonać jedynie w przypadku obserwacji księżyca, i to jedynie w przypadku obserwacji na bardzo małych wysokościach nad horyzontem. Dla pozostałych ciał niebieskich taka potrzeba nie zachodzi. Ale dla sztucznych satelitów Ziemi wpływ h_0 jest bardzo istotny.

Dokładna formuła refrakcji wymaga znajomości współczynnika załamania n, a co z tym się wiąże, znajomości stanu całej atmosfery ziemskiej. W tabeli 8.2, podano wartości współczynnika załamania dla średnich (nie standardowych) warunków atmosferycznych, dla kilku wybranych wysokości nad powierzchnią Ziemi. Jak można zauważyć różnica $(n-1)$ maleje eksponensjalnie z wysokością. Widzimy stąd dlaczego stosowanie przybliżenia płaskiej atmosfery jest w zupełności uzasadnione.
I dlatego powszechną procedurą modelowania refrakcji jest branie tego właśnie przybliżenia z krokiem dalej, przez włączenie jedynie pierwszego rzędu wpływów zakrzywienia ziemskiej powierzchni. W celu otrzymania takiego przybliżenia trzeba równanie (8.19) rozwinąć w szereg i dokonać wyboru odpowiednich wyrazów szeregu. Rozwinięcia wyrażenia podcałkowego całki (8.19) dokonuje się ze względu na małe wielkości występujące w badanym problemie. W naszym przypadku mamy dwie niezależne małe wielkości, mianowicie (n_0-1) i H_0/r_0 (dokładna definicja H_0 podana zostanie nieco później). Zatem weźmy równanie (8.19) i podstawmy w nim

$$r = r_0 + h \tag{8.22}$$

gdzie h jest wysokością nad powierzchnią Ziemi. Formalnie biorąc wysokość $h \to \infty$ gdy $n \to 1$. Ale całkowanie równania (8.19) można przerwać dla wartości n bliskich jedności, a jak widzieliśmy w tabeli 8.2, odpowiadające takim n wartości h są znacznie mniejsze od r_0. Można więc rozwinąć promień wodzący r w szereg potęgowy względem (h/r_0). Biorąc z tego rozwinięcia wyrazy do pierwszego rzędu, nową postacią równania (8.19) będzie

$$R = R_1 - R_2 + O(h^2/r_0^2) \tag{8.23}$$

gdzie

$$R_1 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \tag{8.24}$$

oraz

$$R_2 = \frac{n_0 \sin z_0}{r_0} \int_1^{n_0} \frac{hndn}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{3/2}} \tag{8.25}$$

Aby rozwinięcie to było przydatne w praktyce, wyrażenie $(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{3/2}$ nie może być wielkością małą, tego samego rzędu co h/r_0. Pociąga to by z_0 było wyraźnie mniejsze aniżeli $\arcsin(1/n_0)$, a co z kolei sprowadza się do warunku by źródło promieniowania nie znajdowało się zbyt blisko horyzontu. Całka R_1 daje się scałkować dokładnie,

$$R_1 = \left[-\arcsin\left(\frac{n_0 \sin z_0}{n} \right) \right]_1^{n_0} = \arcsin(n_0 \sin z_0) - z_0$$

Albo w postaci alternatywnej

$$\sin(z_0 + R_1) = n_0 \sin z_0$$

Tablica 8.2: Zmiany współczynnika załamania atmosfery i stałej refrakcji w zależności od wysokości nad powierzchnią ziemi.

Wysokość (km)	Log (n-1)	K (")
0	-3.55	57.8
10	-4.03	19.2
20	-4.69	4.2
30	-5.38	0.85
40	-6.04	0.19
50	-6.63	0.05
100	-9.96	0.00002

co dokładnie odpowiada równaniu (8.2) w modelu płaskiej atmosfery. Dla wygody warto rozwinąć R_1 w szereg względem $(n_0 - 1)$, ale tym razem należy zachować wyrazy kwadratowe $(n_0 - 1)^2$, które poprzednio, w modelu płaskiej atmosfery nie zostały wzięte w rachubę. Rozwinięcie ma postać

$$R_1 = (n_0 - 1)\tan z_0 + 0.5(n_0 - 1)^2 \tan^3 z_0 \tag{8.26}$$

W celu oszacowania całki R_2 warto przejść ze zmiennej niezależnej n do gęstości atmosfery ρ. Z prawa Dale-Gladstone mamy

$$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{\rho}{rh\rho_0} \tag{8.27}$$

gdzie ρ_0 odpowiada gęstości przyziemnym warstwom atmosfery. Ponieważ $\rho \leq \rho_0$, dodatkowo uzasadnia to rozwinięcie w szereg względem $(n_0 - 1)$, i w rezultacie mamy

$$R_2 = \frac{(n_0 - 1)\tan z_0 \sec^2 z_0}{r_0\rho_0} \int_0^{\rho_0} h d\rho + \ldots$$

przy czym, pozostałe wyrazy pominięto. Całkowanie przez części daje

$$\int_0^{\rho_0} h d\rho = [h\rho]_0^{\rho_0} + \int_0^{\infty} \rho dh$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie znika gdy $\rho = \rho_0$ bo wówczas $h = 0$, dąży też do zera gdy $\rho \to 0$.

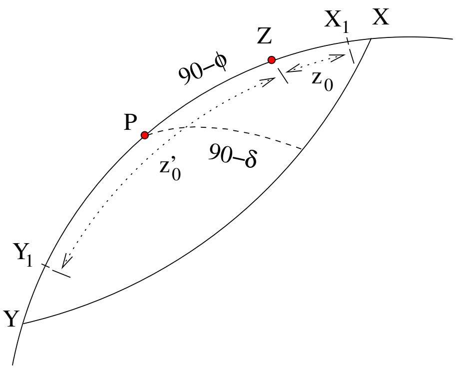
Zdefiniujmy teraz H_0 jako tzw. wysokość równoważnej *jednorodnej atmosfery*[4]

$$H_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \rho dh \tag{8.28}$$

Wobec tego, R_2 przyjmie postać

$$R_2 = (n_0 - 1)\frac{H_0}{r_0} \tan z_0 \sec^2 z_0 \tag{8.29}$$

[4]Jest to wysokość atmosfery o tej samej masie masie co atmosfera rzeczywista, ale której gęstość byłaby stala i równa gęstości atmosfery na poziomie morza, $\rho = 1.293 \cdot 10^{-3}$ $[\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}]$. $H_0 \approx 8$ km.



Rysunek 8.6: Wyznaczenie stałych refrakcji za pomocą obserwacji gwiazdy w górnej i dolnej kulminacji.

Łącząc równania (8.26) i (8.29) dostaniemy wyrażenie na całkowitą refrakcję w formie

$$R = A \tan z_0 + B \tan^3 z_0 + \cdots \tag{8.30}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= (n_0 - 1)(1 - H_0/r_0) \\ B &= -(n_0 - 1)(H_0/r_0 - 0.5(n_0 - 1)) \end{aligned} \tag{8.31}$$

Równanie (30) jest najpowszechniej stosowaną postacią prawa refrakcji, a stałe A i B wyznaczane są empirycznie.

8.5 Stałe refrakcji. Tablice refrakcji

Istnieje wiele sposobów wyznaczenia wartości stałych A i B występujących w równaniu (8.30). Jeden z nich polega na pomiarach deklinacji gwiazdy okołobiegunowej w momentach jej górnej i dolnej kulminacji. Na rysunku 8.5 punkty X i Y reprezentują topocentryczne położenia gwiazdy w tych momentach, a punkty X_1 i Y_1 reprezentują położenia obserwowane, odpowiednio. Mamy zatem $PX = PY = 90° - \delta$, $PZ = 90° - \phi$, (ϕ jest szerokością geograficzną miejsca obserwacji). W momencie kulminacji górnej, topocentryczna odległość zenitalna równa jest $ZX = PX - PZ = \phi - \delta$. Jeśli z_0 jest obserwowaną odległością zenitalną w momencie kulminacji górnej, wówczas za pomocą równań (8.3) i (8.30) możemy wyprowadzić

$$\phi - \delta = z_0 + A \tan z_0 + B \tan^3 z_0$$

Analogiczne równanie ma miejsce dla kulminacji dolnej. Mamy wówczas $ZY = PZ + PY = 180° - \phi - \delta$. A jeśli z'_0 oznacza obserwowaną odległość zenitalną gwiazdy, to mamy, że

$$180° - \phi - \delta = z'_0 + A \tan z'_0 + B \tan^3 z'_0$$

Po eliminacji deklinacji δ dostaniemy

$$180° - 2\phi = z'_0 - z_0 + A(\tan z'_0 - \tan z_0) + B \tan^3 z'_0 \tag{8.32}$$

Wartości z_0 i z_0' otrzymujemy bezpośrednio z obserwacji, stąd dokonując pomiarów dla trzech gwiazd łatwo wyznaczymy wszystkie wielkości niewiadome w równaniu (8.32), tzn. A, B i jeśli trzeba także ϕ. W praktyce pomiarów wykonuje się znacznie więcej, a niewiadome obliczane są metodą najmniejszych kwadratów.

Otrzymane empirycznie stałe refrakcyjne dotyczą konkretnych warunków meteorologicznych, podczas których były wyznaczane. Dla warunków standardowych równanie (8.30) ma postać

$$R = 60.29'' \tan z_0 - 0.06688'' \tan^3 z_0 \tag{8.33}$$

Przyczyny powodujące zmiany stałej refrakcji są bardzo różnorodne. Mówiliśmy o zależności n_0 od ciśnienia atmosferycznego, temperatury, wilgotności oraz długości fali. Wartość skali wysokości H_0 zależy od lokalnej grawitacji, a ponieważ ta głównie zależy od odległości obserwatora od środka Ziemi, potrzebna jest więc poprawka w szerokości i wysokości nad poziomem morza dla danego miejsca obserwacji.

Z powodu skomplikowanego charakteru zjawiska refrakcjij, od wielu lat zamiast formuł uwzględniających wszystkie te wpływy, wykorzystuje się specjalne tablice refrakcji. Kilka dużych obserwatoriów zestawiło tzw. *tablice refrakcji* uwzględniające wspomniane wyżej efekty, np. Pułkowskie Tablice Refrakcji. Ale trzeba zdawać sobie sprawę, że nawet najbardziej rozległe tablice pozwalają wyznaczyć refrakcję jako funkcję jedynie miejscowych warunków atmosferycznych. A tymczasem ogólny wzór na refrakcję (8.19) pokazuje, że całkowita refrakcja zależy nie tylko od warunków lokalnych (przyziemnych) ale także od zmian współczynnika załamania z wysokością. Równanie (8.30), w którym współczynniki dają się określić na podstawie lokalnych warunków atmosferycznych, stanowi tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia równania dokładnego. Daje ono zadowalające rezultaty jedynie dla odległości zenitalnych mniejszych niż $75^{\rm o}$. Wyższe wyrazy rozwinięcia zależą od szczegółowej struktury atmosfery i dla $z > 80^{\rm o}$, jest to zależność krytyczna. Dla normalnych odległości zenitalnych tablice refrakcji opierają się zarówno na teorii jak i obserwacjach. W pobliżu horyzontu tablice te opierają się niemal wyłącznie na obserwacjach. W pobliżu horyzontu kąt refrakcji jest tak duży i zmienny, że w takich przypadkkacch tablice refrakcji mogą dać jedynie wartości przybliżone. Wyklucza to jakiekolwiek precyzyjne pozycyjne obserwacje obiektów znajdujących się w pobliżu horyzontu.

Z tego co powiedziano o zjawisku refrakcji jest chyba oczywiste, że refrakcja zmienia współrzędne gwiazd w sposób nie do końca dający się modelować precyzyjnie, zwłaszcza gdy gwiazda znajduje się na dużych odległościach zenitalnych. Wynika stąd, że w celu precyzyjnego określenia położeń gwiazd, trzeba ograniczyć się do niewielkich odledłości zenitalnych. Istnieją instrumenty zaprojektowane specjalnie do tego typu obserwacji.

Problem atmosferycznej refrakcji może być jednak rozwiązany w całości. W tym celu należy przenieść optyczne teleskopy w przestrzeń kosmiczną. W ostatnim wierszu tabeli 8.2 widzimy, że nie musielibyśmy wówczas wprowadzać refrakcyjnych poprawek. Dla teleskopów optycznych umieszczonych na okołoziemskich orbitach, pozycja obserwowana (pomijamy tu błędy instrumentalne) będzie od razu pozycją topocentryczną.

8.6 Dodatek A. Zadania

1. Uzasadnij, że jeśli położenie gwiazdy w danym momencie nie jest obciążone refrakcją to jej azymut osiąga wartość maksymalną.

2. Oszacuj jak długo w pobliżu letniej solstycji, w miejscu położonym na arktycznym kole podbiegunowym, nad horyzontem widoczny będzie choćby ułamek tarczy słonecznej.

3. Zmierzch astronomiczny zdefiniowany jest z pomocą topocentrycznej odległości zenitalnej Słońca. Zaczyna się lub kończy jeśli odległość ta wynosi 108^o. Pokaż, że dla szerokości geograficznej 56^o w okresie letnim, z punktu widzenia astronomii przez około trzy miesiące nie ma nocy.

4. Przyjmując kąt refrakcji jako wyrażony wzorem $R = K \tan z_0$ udowodnij, że wskutek refrakcji słońce widoczne jest w postaci elipsy o spłaszczeniu

$$f = \frac{K \sec^2 z}{1 - K}$$

5. Wyprowadź równania o numerach: (8.13), (8.15), (8.17), (8.19), (8.24), (8.25), (8.26),

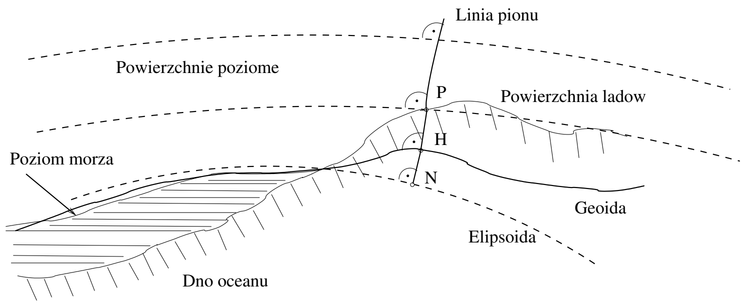
Rozdział 9

Współrzędne geocentryczne

Streszczenie. Rzeczywisty kształt bryły ziemskiej przybliżany jest różnymi powierzchniami np. geoidą, elipsoidą obrotową, sferą. Położenie obserwatora na rzeczywistej powierzchni Ziemi określane jest za pośrednictwem tych powierzchni. Geoida to powierzchnia zamknięta, wszędzie pozioma, pokrywająca się ze średnim poziomem zrównoważonego grawitacynnie oceanu. Nie ppotrafimy jej opisać prostym wyrażeniem analitycznym, dlatego zamiast geiodą, w praktyce posługujemy się przybliżonym opisem kształtu Ziemi — elipsoidę obrotową aa nawet sferą. Względem elipsoidy położenie jest ustalone za pomocą współrzędnych geodezyjnych (ϕ, λ, h) obserwatora, czyli szerokości i długości geodezyjnej, oraz wysokości nad elipsoidą, odpowiednio. Współrzędne te służą do obliczenia składowe geocentrycznego wektora położenia obserwatora. Instrumenty astronomiczne ustawiane są na powierzchni Ziemi tak by główna oś instrumentu pokrywała się z kierunkiem lokalnej siły ciężkości (kierunek pionu). Kierunek ten określa astronomiczny zenit obserwatora, który nie jest identyczny z zenitem geodezyjnym obserwatora (z kierunkiem jaki tworzy normalna do elipsoidy), czy też z jego zenitem geocentrycznym (z kierunkiem geocentrycznego wektora miejsca obserwacji). Względem każdego z tych zenitów można określić układ współrzędnych geograficznych. Znajomość składowych geocentrycznego wektora położenia obserwatora jest konieczna ww celu transformacji rezultatów obserwacji z układu odniesienia topocentrycznego do układu geocentrycznego lub odwrotnie. Pełna transformacja obejmuje dwa zjawiska: paralaksę geocentryczną i aberrecję dobową. Oba zjawiska powodują zmiany współrzędnych określających kierunek propagacji promieniowania elektromagnetycznego. Pierwsze wynika z faktu przeniesienia początku układu współrzędnych z powierzchni Ziemi do środka masy Ziemi, drugie to efekt wpływu niezerowej (względem środka Ziemi) prędkości obserwatora. Ponieważ wartość paralaksy zależy od odległości pomiędzy obiektem i obserwatorem, pomiary paralaks służą do określania odległości ciał niebieskich. Wyznaczenie w pierwszej połowie XX stulecia paralaksy geocentrycznej planetoidy Eros pozwiło na określenie wartości jednostki astronomicznej $(1\ \mathrm{AU})$ w metrach. Zmiany współrzędnych położenia obiektu spowodowane aberracją dobową osiągają wartości do $0\overset{''}{.}34$, nie zależą od odległości obiektu od obserwatora, zależą natomiast od wartości ułamka V/c, stosunku szybkości obserwatora do szybkości światła. Efekty relatywistyczne aberracji dobowej, ze względu na małą wartość stosunku V/c, najczęściej są pomijane w transformacji topo-geo centrum. Podobnie nieistotne są relatywistyczne efekty odchylenia kierunku propagacji światła w polu grawitacyjnym Ziemi.

Słowa kluczowe: geoida, elipsoida obrotowa, współrzędne geodezyjnne i geocentryczne na powwierzchni Ziemi, zenit geocentryczny, geodezyjny i zenit astronomiczny, paralaksa dobowa, aberracja dobowa. [a] ↱

[a][Modyfikowano AD 2008, kwiecień, 09]



Rysunek 9.1: Poglądowa ilustracja przekroju powierzchni Ziemi. Schematycznie naniesiono fragmenty powierzchni geoidy i elipsoidy modelujacych kształt Ziemi. Odstępstwo geoidy od elipsoidy jest na tym rysunku mocno przesadzone.

9.1 Współrzędne geocentryczne obserwatora

Omówimy transformację współrzędnych z układu odniesienia topocentrycznego do układu geocentrycznego. Ruch obserwatora względem środka Ziemi jest przyczyną dwóch zjawisk: aberracji i paralaksy, nazywanych w tym przypadku aberracją dobową, paralaksą dobową bądź paralaksą geocentryczną.

Wyznaczenie poprawki paralaktycznej wymaga znajomości położenia obserwatora względem środka Ziemi. Prosty sferyczny model Ziemi nie jest już dla tego celu wystarczający. Rzeczywisty kształt bryły ziemskiej jest bardzo skomplikowany i nie daje się opisać prostą zależnością funkcyjną. Kształt Ziemi definiowany jest w oparciu o średni poziom oceanu, znajdującego się w grawitacyjnej równowadze i pokrywającego się z powierzchnią ekwipotencjalną obserwowanej siły ciążenia (patrz rysunek 9.1). W potencjale pola sił, w którym "zanurzone" są punkty bryły ziemskiej, poza grawitacyjnymi uwzględnia się wyrazy reprezentujące siły odśrodkowe będące efektem ziemskiej rotacji wokół osi. Taką powierzchnię ekwipotencjalną pokrywającą powierzchnię oceanu, rozciągniętą pod masami lądowymi nazywamy *geoidą*.[1] Na mocy definicji kierunek lokalnej siły ciążenia jest wszędzie normalny do geoidy.
Powierzchnia geoidy posiada liczne, w porównaniu do jej rozmiarów niewielkie nieregularności, i dlatego można ją stosunkowo dokładnie przybliżyć dobierając odpowiednią *elipsoidę obrotową* o osi obrotu pokrywającej się z osią rotacji Ziemi. Parametry elipsoidy, jej równikowy promień a oraz spłaszczenie biegunowe f, określają tzw. standardowy sferoid wykorzystywany do celów astronomicznych i geodezyjnych. Rysunek 9.2 przedstawia południkowy przekrój standardowego sferoidu. Przekrój jest elipsą o półosiach wielkiej i małej a i b odpowiednio, a równanie elipsy ma postać

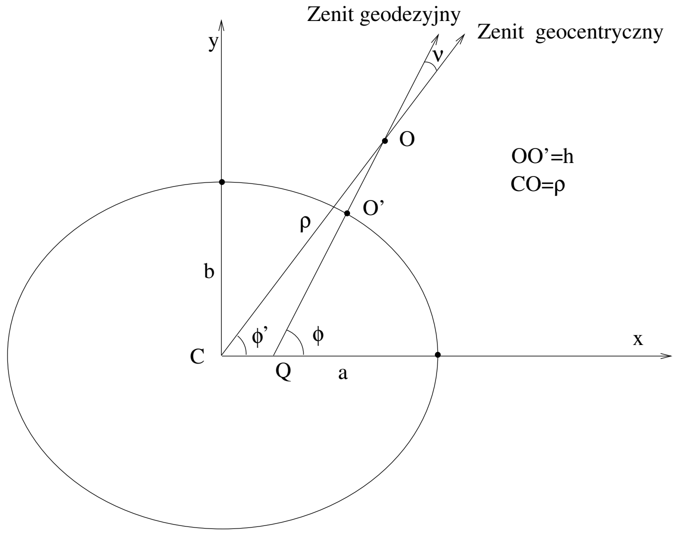
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-f)^2} = 1 \tag{9.1}$$

gdzie

$$b = a(1-f) \tag{9.2}$$

Decyzją Międzynarodowej Unii Astronomicznej (MUA) z 1976 roku, jako standardowy

[1] Względem geoidy podaje się tzw. wysokość nad poziomem morza.



Rysunek 9.2: Południkowy przekrój ziemskiej elipsoidy. Spłaszczenie bryły ziemskiej na tym rysunku jest silnie przesadzone. Nie narysowano kierunku pionu (zenit astronomiczny), bowiem niekoniecznie musi on leżeć w tej samej płaszczyźnie co zenit geocentryczny i geodezyjny.

przyjęto sferoid o parametrach:

$$a = 6378.140 \quad [\mathrm{km}]$$
$$f = 0.00335281 = 1/298.257$$

gdzie a jest promieniem równikowym, f spłaszczeniem ziemskiej elipsoidy.

Niech na rysunku 9.2 obserwator O znajduje się na wysokości h względem standardowego sferoidu.[2] Normalna do sferiodu w punkcie O przebija sferoid w O', a jej przedłużenie przecina położoną w płaszczyźnie równika oś X w punkcie Q. Oczywiście odcinek $OO' = h$.

Dla obserwatora O można teraz podać co najmniej trzy definicje zenitu miejsca obserwacji. Rzeczywisty kierunek pionu definiuje *zenit astronomiczny*, nie zaznaczono go na rysunku. Kierunek QO definiuje *zenit geodezyjny*, który byłby identyczny z zenitem astronomicznym gdyby geoida ściśle pokrywała się ze sferoidem standardowym. Kąt pomiędzy tymi dwoma zenitami (efekt istnienia anomalii grawitacyjnej) zwany jest *odchyleniem pionu*. Trzeci punkt zenitu to *zenit geocentryczny* powstały w wyniku przecięcia sfery niebieskiej półprostą CO. Kąt ν pomiędzy kierunkami na zenit geocentryczny i geodezyjny nazywany jest *kątem wertykału*.

W oparciu o każdy z tych punktów można zdefiniować odmienną szerokość obserwatora. Szerokość jest kątem jaki kierunek na zenit tworzy z płaszczyzną równika ziemskiego. Zatem, mamy szerokość *geodezyjną* ϕ i szerokość *geocentryczną* ϕ'. Szerokości *astronomicznej* nie pokazano na rysunku 9.2, bowiem zenit astronomiczny zwykle nie leży w płaszczyźnie, którą ilustruje ten rysunek. Druga współrzędna — *długość geocentryczna* i *geodezyjna*, jak łatwo pokazać, są sobie równe i tradycyjnie oznaczane przez λ.

[2]Pomijając niewielkie (do kilku metrów) poprawki geodezyjne, odpowiada to wysokości nad poziomem morza.

Niech ρ będzie geocentryczną odległością obserwatora, $\rho = CO$. Wówczas *współrzędne geocentryczne* (ρ, ϕ', λ) w pełni określają położenie obserwatora względem środka Ziemi. Dla rozwiązania wielu zagadnień praktycznych musimy dysponować formułami umożliwiającymi wzajemną transformację pomiędzy współrzędnymi geocentrycznymi i *współrzędnymi geodezyjnymi* (ϕ, λ, h). Niech (x_0, y_0) będą kartezjańskimi współrzędnymi obserwatora, natomiast (x, y) współrzędnymi punktu O'. Na rysunku 9.2 możemy zauważyć, że

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi' &= x_0 = x + h \cos \phi \\ \rho \sin \phi' &= y_0 = y + h \sin \phi \end{aligned} \tag{9.3}$$

Ponieważ punkt (x, y) leży na elipsie o równaniu (9.1) a $\tan \phi$ jest nachyleniem normalnej do elipsy w tym punkcie, pociąga to

$$\tan \phi = \frac{-dx}{dy}$$

Różniczkując równanie (9.1) dostaniemy

$$y = x(1 - f)^2 \tan \phi \tag{9.4}$$

Kładąc jego prawą stronę spowrotem do (9.1) będziemy mieli

$$x^2(1 + (1 - f)^2 \tan^2 \phi) = a^2$$

Z pomocą tego równania oraz równania (9.4) można wyrazić współrzędne x i y poprzez ϕ. Mianowicie,

$$\begin{aligned} x &= aC \cos \phi \\ y &= aS \sin \phi \end{aligned} \tag{9.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C &= [\cos^2 \phi + (1 - f)^2 \sin^2 \phi]^{-1/2} \\ S &= (1 - f)^2 C \end{aligned} \tag{9.6}$$

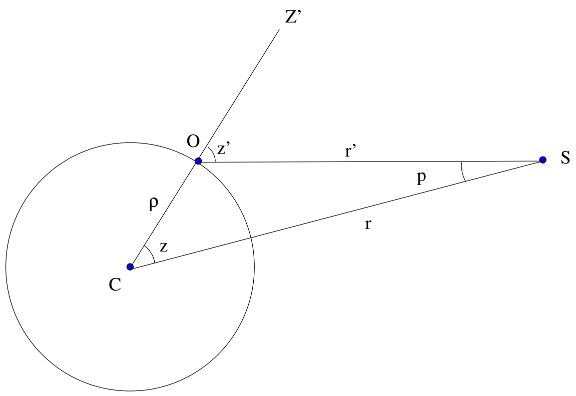
A zatem uwzględniając (9.5), kkońcową postacią równań (9.3) jest

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi' &= a \cos \phi \cdot (C + h/a) \\ \rho \sin \phi' &= a \sin \phi \cdot (S + h/a) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Jest to zależność dokładna, pozwalająca na obliczenie współrzędnych geocentrycznych jeśli tylko dysponujemy współrzędnymi geodezyjnymi danego miejsca na powierzchni Ziemi.

9.2 Paralaksa geocentryczna

Wartość paralaksy geocentrycznej zależy od odległości obiektu i jest całkowicie zaniedbywalna dla ciał spoza Układu Słonecznego. Dla obiektów w pobliżu Ziemi jak Księżyc



Rysunek 9.3: Względem miejsca O na powierzchni Ziemi obiekt S oddalony od geocentrycznego zenitu Z' o kąt z'. Względem środka C Ziemi kąt ten wynosi z. Różnica $z' - z = p$ nazywana jest paralaksą geocentryczną (parralaksą dobową).

a zwłaszcza w przypadku sztucznych satelitów Ziemi, paralaksa osiąga bardzo duże wartości.

Na rysunku 9.3, punkt O oznacza obserwatora, C środek Ziemi a S pewne pobliskie ciało niebieskie. Linia CO, jej przedłużenie określa kierunek na geocentryczny zenit Z' miejsca obserwacji. Płaszczyzna rysunku jest zdefiniowana przez trzy punkty C, O i S, a zatem leży w płaszczyźnie koła wertykalnego przechodzącego przez gwiazdę. Dlatego przekrój Ziemi pokazany na rysunku niekoniecznie musi przebiegać wzdłuż ziemskiego południka.

Oznaczmy kąt $Z'OS$ przez z'. Jest to obserwowana odległość zenitalna odniesiona do geocentrycznego zenitu. Kierunki zenitów geodezyjnego i astronomicznego, ogólnie nie muszą leżeć w płaszczyźnie rysunku.
Niech r' i r będą topocentryczną i geocentryczną odległością źródła promieniowania, ρ odległością obserwatora od środka Ziemi (rysunek 9.3). *Paralaksą geocentryczną* p, nazywamy kąt OSC taki, że

$$z' = z + p \tag{9.8}$$

gdzie z, jest geocentryczną odległością zenitalną obiektu, jaką obserwowanoby ze środka Ziemi. Paralaksa geocentryczna zwiększa geocentryczną odległość zenitalną o kąt p a skoro zmiana ta odbywa się w płaszczyźnie OCS (w płaszczyźnie wertykału), azymut geocentryczny pozostaje niezmieniony.

Stosując do trójkąta OCS wzór sinusów dostaniemy

$$\sin p = \frac{\rho}{r} \sin z' = \frac{\rho}{r'} \sin z \tag{9.9}$$

Wynika stąd, że paralaksa dla danego obiektu poza zależnością od r, zależy od jego odległości zenitalnej a także od odlegości ρ obserwatora od środka Ziemi. Potrzebna jest zatem pewna standaryzacja i jest nią tzw. *horyzontalna paralaksa równikowa* P. Jest to paralaksa fikcyjnego obiektu, położonego na horyzoncie obserwatora znajdującego się na równiku ziemskim $(\rho = a)$, czyli w warunkach gdy $(z' = 90°)$. Po podstawieniu do równania (9.9), mamy

$$\sin P = \frac{a}{r} \tag{9.10}$$

Wielkość ta w skrócie zwana *paralaksą horyzontalną* jest identyczna z odwrotnością odległości źródła promieniowania. Dlatego w niektórych rocznikach astronomicznych w taki właśnie sposób stabelaryzowano odległości Księżyca. Mamy zatem, że dla dowolnego obserwatora *paralaksa dobowa* kierunku do obiektu obserwowanego na odległości zenitalnej z' wyraża się wzorem

$$\sin p = \frac{\rho}{a} \sin P \sin z' \tag{9.11}$$

Paralaksy geocentryczne posiadają znaczące wartości jedynie dla ciał Układu Słonecznego. Jednak wartości paralaks horyzontalnych tych obiektów, ze względu na ruch orbitalny, nie są stałe. Np. dla eliptycznej orbity Księżyca, jego paralaksa horyzontalna oscyluje pomiędzy $54' - 61'$. W takich przypadkach Międzynarodowa Unia Astronomiczna rekomenduje średnie wartości paralaksy i dla Księżyca zaleca wartość P_0 podaną w 1983 roku przez Murray'a

$$\sin P_0 = 3422.485 \cdot \sin 1''$$

albo co jest równoważne

$$P_0 = 57'02''.6050 \tag{9.12}$$

Paralaksy geocentryczne planet mają wyraźnie mniejsze wartości. Dla Saturna wynosi ona około $1''$, a dla najbliższej planety, dla Wenus waha się w granicach $5'' - 34''$. Dla obiektu znajdującego się w odległości $1\ AU$, jego paralaksa nosi nazwę *paralaksy słonecznej*. Poza drobnymi różnicami jest ona bardzo bliska średniej paralaksie prawdziwego Słońca.

9.3 Dygresja. Jednostka astronomiczna — 1 AU

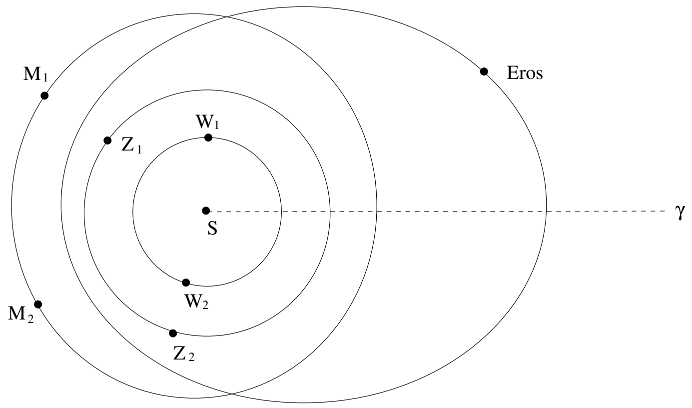
Pomiary paralaksy geocentrycznej umożliwiają wyznaczenie odległości pomiedzy ciałami Układu Słonecznego. Jednak obecnie nie jest to już podstawowy sposób pomiaru odległości bowiem w wielu przypadkacch zastąpiła go technika radarowa. Ze względów historycznych warto poświęcić mu nieco uwagi.

Pomiary pozycyjne planet są interpretowane przez mechanikę nieba w oparciu o prawa dynamiki grawitacyjnej. Jeżeli w stosunku do masy Słońca zaniedbamy masy planet, to możemy pominąć skomplikowany opis ruchu planet zastępując go prostym ruchem keplerowskim. Trzecie prawo Keplera powiada wówczas, że sześciany półosi orbit a_p planet są proporcjonalne do kwadratów ich okresów obiegu T_p,

$$k^2 a_p^3 = T_p^2 \tag{9.13}$$

gdzie k^2 jest stałą.

Pozycyjne obserwacje w długich interwałach czasu pozwalają dokładnie wyznaczyć okres orbitalny planety. Z równania (9.13) daje się wówczas obliczyć względne rozmiary orbit planet. Aby wyznaczyć rozmiary absolutne, potrzeba jeszcze wartości stałej k^2, ta zaś wyrażona jest m.in. poprzez nieznaną masę Słońca. A zatem, można skonstruować model całego Układu Słonecznego w pewnej skali, na to jednak by był to model np. w kilometrach konieczny jest pomiar obległości choćby do jednej planety.



Rysunek 9.4: Rzuty orbit planet: Venus, Ziemi, Marsa oraz planetoidy Eros na płaszczyźnie ekliptyki.

Odległości do planet wyznaczane z obserwacji ich geocentrycznych paralaks, które z natury rzeczy są nieprecyzyjne. Główną przyczyną są tu bardzo małe wartości samej paralaksy. Jeżeli zależy nam na możliwie dokładnym pomiarze trzeba dokonać wyboru odpowiedniego do tego celu obiektu, a więc obiektu najbliższego Ziemi czyli o największej paralaksie. Zagwarantuje to najwyższą procentową precyzję wyznaczonej odległości, co pozwoli dobrze wyskalować rozmiary Układu Słonecznego. Na rysunku **??** na płaszczyźnie orbity Ziemi narysowano rzuty orbit Wenus Marsa i planetoidy Eros. Zaznaczono również położenia tych obiektów dla dwóch wybranych epok. Punkty Z_1, W_1, M_1 oznaczają konfigurację, w której Mars znajduje się w opozycji ze Słońcem. W parę miesięcy później mamy konfigurację Z_2, W_2, M_2, w której Wenus jest w konjunkcji dolnej względem Ziemi. Jasne jest, że dla tych właśnie konfiguracji mamy najlepszą okazję do pomiarów paralaksy. Warto jeszcze zauważyć, że ze względu na spory mimośród orbity Marsa $(e \approx 0.1)$ jego odległość od Ziemi w momencie kolejnych opozycji zmienia się i to dość wyraźnie. Wenus posiada bardziej kołową orbitę dlatego w jej wypadku takich zmian nie obserwujemy. Jednak w momencie konjunkcji dolnej Wenus jest trudna do obserwacji bowiem przeszkadza tu światło słoneczne a obserwacja jest możliwa jedynie podczas przejścia planety przez tarczę Słońca. Wartość paralaksy daje się wówczas wyznaczyć w oparciu o pomiary czasowe zjawiska przejścia Wenus przez tarczę Słońca, obserwowanego z kilku punktów na powierzchni Ziemi. Niestety gęsta atmosfera Wenus bardzo utrudnia dokładne pomiary i była przyczyną niepowodzenia kampanii obserwacyjnej podczas przejścia Wenus przez dysk Słońca w końcu XIX stulecia.

Dlatego wzrosło zainteresowanie obserwacjami Marsa a także małej planety Eros, którą odkryto pok koniec XIX wieku. Jak widać na rysunku 9.4 orbita Erosa jest silnie ekscentryczna, sama zaś planetka może znacznie zbliżyć się do Ziemi (na odległość $0.16\ AU$). Dlatego główne programy pomiaru paralaksy geocentrycznej w 1901 i 1931 roku poświęcono tej planetce. Obserwacje zakończyły się sukcesem co w następstwie doprowadziło do rewizji skali Układu Słonecznego. Wyznaczena w roku 1931 paralaksa Erosa stanowiła podstawę do wyznaczania wartości paralaksy słonecznej aż do lat 1960-tych.

Dopiero technika radarowa umożliwiła bardziej bezpośrednie pomiary odległości do planet. Stosunek sygnału do szumu w radarowym echu jest bardzo czuły na odległość, jest bowiem odwrotnie proporcjonalny do czwartej potęgi odległości obiektu. Wenus była pierwszą planetą, której odległość wyznaczono metodą radiową, udało się tego dokonać podczas konjunkcji w roku 1959. Te i kolejne pomiary w następnych latach doprawadziły do nowego określenia paralaksy słonecznej. W adoptowanym przez MUA systemie stałych mamy, że

$$\begin{aligned} &1\ [\mathrm{AU}] = A = 1.49597870 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}] \\ &P_0 = 8\overset{''}{.}794148 \qquad \text{(paralaksa soneczna)} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Wielkości te są ze sobą związane, z równania (9.10) mamy, że

$$\sin P_0 = a/A \tag{9.15}$$

Jednostki astronomicznej nie definiuje się już jako długości półosi wielkiej orbity Ziemi, ponieważ półoś ta zmienia się z powodu perturbacji planetarnych. Obecnie definiuje się ją za pomocą teorii grawitacji. Stała k z równania (9.13) znana jako stała grawitacji Gaussa, w systemie stałych zalecanych przez MUA jej wartość wynosi

$$k = 0.01720209895 \tag{9.16}$$

Wartość ta przetrwała ostatnie zmiany systemu stałych i nic nie wskazuje by miało być inaczej w najbliższej przyszłości. Przy takiej stałej k, jednostkę astronomiczą (AU) definiuje się jako jednostkę długości w jakiej musi być wyrażona półoś a_p z równania (9.13), gdy okres T_p podany jest w dobach.

Wartość paralaksy słonecznej wyznaczona za pomocą metod radarowych określona jest z dokładnością do jednej mikrosekundy łuku. Jest to poza zasięgiem współczesnych metod obserwacji pozycyjnych i dlatego kolejne zbliżenie Erosa do Ziemi wykorzystano jedynie do badań jego własności topograficznych. Nawiasem mówiąc, dokonano tego technikami radarowymi.

Ze względu na bliską odległość, paralaksę Księżyca daje się określić dokładniej aniżeli paralaksy planet. Ale i tutaj techniki radarowe wyeliminowały klasyczne metody optyczne, te zaś po pewnym czasie, zastąpiono nowoczesną techniką optyczną — techniką laserową. Umożliwiły to misje księżycowe Apollo, kiedy to astronauci na początku lat 1970-tych umieścili na Księżycu odbłyśniki laserowe.

Jeśli chodzi o wyznaczanie odległości paralaksa geocentryczna ma obecnie mniejsze znaczenie, ale nadal jest istotna jako efekt pozycyjny podczas określania dokładnych położeń ciał niebieskich. ↱

9.3.1 Wpływ paralaksy geocentrycznej na wspólrzędne równikowe

Powiedziano wcześniej, że paralaksa geocentryczna powiększa geocentryczną odległość zenitalną obiektu nie zmieniając jego azymutu. Jeżeli paralaksa jest dostatecznie mała, zmianę odległości zenitalnej można wyrazić jako

$$dz = z' - z = \frac{\rho}{r} \sin z \tag{9.17}$$

A zatem nic nie stoi na przeszkodzie by i w tym wypadku zastosować formuły na małe przesunięcie na sferze (patrz paragraf 3.2 rozdział **??**), podstawiamy zatem:

- $k = \frac{\rho}{r}$,
- (α_0, δ_0) identyfikujemy z geocentrycznym zenitem, czyli $\delta_0 = \phi'$, natomiast $\alpha_0 = T$, miejscowy czas gwiazdowy,
- $\alpha_0 - \alpha = t$, kąt godzinny obiektu.

Przy takich oznaczeniach, dla obiektu o (α, δ), formuły na małe przesunięcie mają postać

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \alpha' - \alpha = -\tfrac{\rho}{r} \cos\phi' \sin t \sec\delta \\
d\delta &= \delta' - \delta = \tfrac{\rho}{r}(\cos\phi' \cos t \sin\delta - \sin\phi' \cos\delta)
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

Są to formuły przybliżone (pierwszy rząd ze względu na (ρ/r)), dlatego nie należy ich używać w przypadku Księżyca praz sztucznych satelitów Ziemi. Nadają się dla pozostałych ciał niebieskich o ile ciała te nie znajdują się w zbyt bliskim sąsiedztwie Ziemi, kiedy to paralaksy geocentryczne przekraczają wartości kilku sekund łuku.

Dla obiektów bardzo dalekich jak planety zewnętrzne, paralaksy geocentryczne są bardzo małe i dlatego w formułach (9.18) nie ma potrzeby rozróżnienia pomiędzy szerokościami geodezyjną i geocentryczną, jako ρ można do wzorów podstawić wartość a równikowego promienia Ziemi.

Formuły przybliżone należy stosować z rozwagą, a w sytuacjach wątpliwych opłaca się stosowanie rozwiązań dokładnych. Mianowicie, niech $\mathbf{r}$ i $\mathbf{R}$ będą geocentrycznymi wektorami położenia obserwowanego obiektu S i obserwatora O. Wówczas wektor $\vec{OS} = \mathbf{r}'$ od obserwatora do źródła promieniowania dany jest jako różnica

$$
\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} \tag{9.19}
$$

Rysunek 9.3 odpowiada właśnie tej sytuacji. Załóżmy, że wektor $\mathbf{R}$ jest znany dokładnie, jest to wektor o długości ρ skierowany na geocentryczny zenit obserwatora, a zatem we współrzędnych równikowych ma on składowe

$$
\mathbf{R} = \rho(\cos\phi' \cos T, \cos\phi' \sin T, \sin\phi') \tag{9.20}
$$

gdzie T jest miejscowym czasem gwiazdowym w momencie obserwacji.

Równanie (9.19) może być wykorzystane w obie strony, zależnie od tego, który wektor jest znany.

Przyjmijmy, że np. dla Księżyca, z rocznika astronomicznego na pewien moment czasu zaczerpnęliśmy jego geocentryczne współrzędne równikowe (α, δ) oraz paralaksę horyzontalną P. Wówczas korzystając z równania (9.10) możemy obliczyć geocentryczną odległość księżyca

$$
r = a \csc P
$$

gdzie a jest średnim promieniem równikowym Ziemi.

Gocentryczny wektor położenia Księżyca ma zatem składowe

$$
\mathbf{r} = a \csc P(\cos\delta \cos\alpha, \cos\delta \sin\alpha, \sin\delta) \tag{9.21}
$$

Oznaczmy przez (x', y', z') składowe wektora $\mathbf{r}'$, opisującego obserwowane położenie Księżyca, odpowiadające im współrzędne sferyczne oznaczymy przez (α', δ'). Równanie (9.19) w wersji skalarnej będzie wówczas dane jako układ

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\delta'\cos\alpha' = a\csc P\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\phi'\cos T \\ y' &= r'\cos\delta'\sin\alpha' = a\csc P\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\phi'\sin T \\ z' &= r'\sin\delta' = a\csc P\sin\delta - \rho\sin\phi' \end{aligned} \tag{9.22}$$

Dysponując składowymi (x', y', z') łatwo obliczymy (α', δ')

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arctan(y'/x') \\ \delta' &= \arctan(z'/\sqrt{(x'^2 + y'^2)}) \end{aligned} \tag{9.23}$$

Równanie (9.23) wymaga pewnej ostrożności podczas normowania rektascensji do odpowiedniej ćwiartki.

Przykład.

W stacji o szerokości geodezyjnej $39°42'48''$ dokonano obserwacji sztucznego satelity Ziemi zarówno radiowo jak i optycznie. Wysokość stacji wynosi 456 metrów nad poziomem morza. Z obserwacji otrzymano następujące równikowe współrzędne satelity:

$$\begin{aligned} r' &= 1735.87\ km \\ \alpha' &= 7^h 12^m 19^s \\ \delta' &= -21°42'21'' \\ T &= 9^h 17^m 34^s \quad \text{(miejscowy czas gwiazdowy momentu obserwacji)} \end{aligned}$$

Oblicz geocentryczne miejsce i odległość satelity.

Rozwiązanie wymaga kilku kroków.

1. Należy obliczyć składowe wektora $\mathbf{R}$ położenia obserwatora na moment obserwacji. W tym celu przyjmujemy $a = 6378.14$ km, $f = 3.35281 \cdot 10^{-3}$ i zamieniamy jednostki $\phi = 39{.}^\circ7133$, $T = 139{.}^\circ3917$.
   Kolejno obliczamy:

$$\begin{aligned} h/a &= 7.15 \cdot 10^{-5} \\ C(\phi) &= 1.0013693 && \text{(rownanie (9.6))} \\ S(f) &= 0.9946658 && \text{(rownanie (9.6))} \\ \rho\cos\phi' &= 4913.459\ [\text{km}] && \text{(rownanie (9.7))} \\ \rho\sin\phi' &= 4053.845\ [\text{km}] && \text{(rownanie (9.7))} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = (-3730.183, 3198.095, 4053.845)\ [\text{km}] \quad \text{(rownanie (9.20))}$$

2. Wykorzystując wyniki obserwacji obliczymy składowe wektora $\mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} r' &= 1735.87\ [\text{km}] \\ \alpha' &= 108.0792 \\ \delta &= -21.7058 \\ \mathbf{r}' &= (-500.498, 1533.162, -641.997)\ [\text{km}] && \text{(rownania (9.22))} \end{aligned}$$

3. Geocentryczny wektor $\mathbf{r}$ ma zatem składowe

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} = (-4230.681, 4731.257, 3411.849)\ \ [\text{km}]$$

4. Po przejściu do współrzędnych sferycznych mamy geocentryczne współrzędne sferyczne (r, α, δ):

$$\begin{array}{lcll} r & = & 7205.843 \;\; [\mathrm{km}] & \\ \alpha & = & 8^h 47^m 13^s & \qquad \text{rownania (9.22), (9.23))} \\ \delta & = & 28^\circ 15' 38'' & \end{array}$$

9.4 Aberacja dobowa

Podczas transformacji współrzędnych topocentrycznych w geocentryczne, paralaksa jest ważną poprawką jedynie dla obiektów z Układu Słonecznego. W przeciwieństwie do niej poprawka aberracyjna — aberracja dobowa — jest niezależna od odległości źródła promieniowania i musi być uwzględniona w pozycji każdego ciała niebieskiego.

Nie jest to jednak bardzo duża poprawka. Ponieważ liniowa szybkość obserwatora na równiku ziemskim stanowi jedynie $1.6 \cdot 10^{-6}$ szybkości światła, przemieszczenie położenia ciała z powodu *aberracji dobowej* nie przekracza $0\rlap{.}''33$ łuku. Dlatego można tu stosować bez zastrzeżeń przybliżenie małych przesunięć jak i pominąć aberracyjne efekty relatywistyczne.

Powtórzmy tu (patrz paragraf 7.5.2 rozdział 4) nieco zmnienione równania na aberacyjną zmianę położenia źródła dla obserwatora poruszającego się z szybkością V w kierunku wektora jednostkowego **n**

$$d\mathbf{s} = -(V/c)\, \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \tag{9.24}$$

Jeżeli interesują nas zmiany z tytułu aberracji we współrzędnych równikowych, to w oparciu o formuły na małe przesunięcie na sferze (3.12) możemy wyprowadzić wzory

$$\begin{aligned} d\alpha &= (V/c) \sec\delta \cos\delta_0 \sin(\alpha_0 - \alpha) \\ d\delta &= (V/c)(\cos\delta \sin\delta_0 - \sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha_0 - \alpha)) \end{aligned} \tag{9.25}$$

gdzie (α_0, δ_0) są równikowymi współrzędnymi kierunku jaki wskazuje wektor jednostkowy $\mathbf{n}$. Formuły (9.25) są ogólnymi wyrażeniami na aberracyjne zmiany rektascensji i deklinacji.

Rozpatrzmy teraz przypadek obserwatora znajdującego się na pewnej szerokości i odległości geocentrycznej ϕ', ρ. Jeśli ω oznacza kątową szybkość wirowania Ziemi, liniowa szybkość obserwatora względem środka Ziemi dana jest wzorem

$$V = \rho\omega\cos\phi' \tag{9.26}$$

Ruch dobowy obserwatora oczywiście odbywa się w kierunku na wschód co oznacza, że wektor $\mathbf{n}$ skierowany jest na punkt wschodu horyzontu obserwatora, będziemy zatem mieli

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= T + 6^h \\ \delta_0 &= 0 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Co po podstawieniu do równania (9.25), wobec równości $(\alpha_0 - \alpha) = t$ daje formuły

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \alpha' - \alpha = (\rho\omega\cos\phi'/c)\sec\delta\cos t \\
d\delta &= \delta' - \delta = (\rho\omega\cos\phi'/c)\sin\delta\sin t
\end{aligned}
\tag{9.28}
$$

Są towzory wystarczająco dokładne dla niemal wszystkich przypadków. Ze względu na niewielki wpływ tej aberracji czynione są dalsze uproszczenia, mianowicie, pomijana jest niesferyczność kształtu Ziemi i wówczas po podstawieniach

$$
\begin{aligned}
&\rho = 6378.140 \ \ [\mathrm{km}] \\
&\phi = \phi' \\
&\omega = \tfrac{2\pi}{\text{doba gwiazdowa}} = 7.292 \cdot 10^{-5} \ \ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

mamy, że w jednostkach praktycznych poprawki na aberrację dobową wyrażają się wzorami

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= 0\overset{s}{.}0213\cos\phi\sec\delta\cos t \\
d\delta &= 0\overset{''}{.}320\cos\phi\sin\delta\sin t
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

Formuły te dają różnice pomiędzy współrzędnymi topocentrycznymi a tymi, które wyznnaczyłby ten sam obserwator znajdujący się na nieruchomej Ziemi. Aby otrzymać współrzędne odniesione do środka Ziemi trzeba jeszcze dokonać transformacji uwzględniającej wpływ paralaksy geocentrycznej.

Jeżeli paralaksa i aberracja są małe, porządek uwzględnienia poprawek nie jest istotny. W wypadku dużej paralaksy, *a natura rei*, trzeba aberrację usuwać przed zastosowaniem ścisłych formuł na paralaksę geocentryczną.

Powiedziano, że wpływy relatywistyczne mogą być pominięte ze względu na niewielki stosunek V/c. Uwaga ta dotyczyła relatywistycznych efektów w aberracji wynikających ze szczególnej teorii względności.

Pominięcie relatywistycznego efektu odchylenia światła $\delta\psi$ w polu grawitacyjnym Ziemi wymaga dalszego uzasadnienia. Odchylenie to, nie przekracza $2m/\rho$ radianów, gdzie m jest połową Schwarzschildowskiego promienia Ziemi. Ponieważ

$$
m = GM_{\oplus}/c^2 = 4.4 \ \ [\mathrm{mm}] \tag{9.30}
$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną, daje to

$$
\delta\psi = 2m/\rho < 0\overset{''}{.}0003 \tag{9.31}
$$

co usprawiedliwia pominięcie wpływu grawitacji na kierunak propagacji światła w pobliżu Ziemi. ↱

9.5 Dodatek A. Zadania

1. Jeśli a i b są równikowym i biegunowym promieniem sferoidy ziemskiej, pokaż, że największa wartość kąta wertykalnego ma miejsce dla szerokości geodezyjnej $\arctan(a/b)$.

2. Oblicz geocentryczne: odległość, szerokość oraz kąt wertykalny dla obserwatora znajdującego się na poziomie morza i szerokości geodezyjnej $52°$.

3. Korzystając z rezultatów poprzedniego zadania, oblicz maksymalną geodezyjną wysokość jaką może osiągnąć w tym miejscu obserwacji satelita, poruszający się po kołowej orbicie o promieniu 8798 km, nachylonej pod kątem $18°36'$ do równika.

4. Podaj definicje zenitu astronomicznego, geodezyjmego i geocentrycznego. Wyjaśnij co oznacza pojęcie *kąt vertykału* ? Udowodnij, że kąt ten określony jest formułą

$$\tan \nu = \frac{e^2 \sin 2\phi}{2(1 - e^2 \sin^2 \phi)}$$

   gdzie e jest mimośrodem standardowego ziemskiego sferoidu, ϕ jest szerokością geodezyjną.

5. Atmosferyczna refrakcja oraz paralaksa, obie zmieniają odległości zenitalne ciał. Względem jakich punktów zenitu zmiany te są określone?

Rozdział 10

Pomiary rektascensji i deklinacji

Streszczenie. Podstawowe tzw. absolutne obserwacje położeń gwiazd wykonywane są m.in. przy użyciu koła południkowego lub jego odmiany — instrumentu przejściowego. Obserwacje te polegają na odczycie momentu czasu i wysokości w momencie kulminacji górnej gwiazdy. Ze względu na nieuniknione błędy instrumentalne surowe obserwacje są korygowane z pomocą szeregu poprawek jak: poprawka zegara, błąd odczytu koła deklinacyjnego, poprawka nieprostopadłości osi optycznej lunety do osi poziomej narzędzia, poprawki z racji niedokładnej orientacji osi instrumentu w stosunku do układu horyzontalnego. Inne poprawki dotyczą przejścia topo-geo, a więc są to poprawki na refrakcję, aberrację dobową a jeśli trzeba uwzględnia się poprawkę z tytułu paralaksy geocentrycznej. Wreszcie, ponieważ narzędzie południkowe ustawiane jest względem chwilowego bieguna świata podczas redukcji rezultatów obserwacji uwzględniany jest tzw. ruch biegunów pociągający zmiany szerokości i długości miejsca ustawienia narzędzia. (Chodzi tu o efekt przemieszczania się skorupy ziemskiej względem nieruchomej osi obrotu.) Ze względu na specyfikę obserwacji południkowych (zerowy kąt godzinny obiektu) wyrażenia na redukcję obserwowanych wartości α', δ' są proste i mogą ujmować szereg wpływów jednocześnie. Inaczej ma się sprawa z kołem wewrtykalnym, gdzie rejestrujemy moment czasu i wysokość gwiazdy w chwili przejścia przez pierwszy wertykał.
Inne narzędzia jak astrolabia Danjon'a i fotograficzny teleskop zenitalny również nadają się do wyznaczenia absolutnych położeń ciał niebieskich. Instrumenty te cechuje wyjątkowo niewielki błąd powodowany mechanicznym ugięciem narzędzia. Ale umożliwiają obserwowanie gwiazd położonych w ograniczonym obszarze sfery. Fotograficzny teleskop zenitalny służy głównie do badania zmian szerokości i czasu gwiazdowego, zmian powodowanych ruchami biegunów i nieregularnością wirowania bryły ziemskiej. Astrolabia Danjon'a doskonale nadaje się do powiązania położeń gwiazd rozrzuconych po całej sferze i wykrywania systematycznych błędów w fundamentalnych katalogach gwiazd.
Słowa kluczowe: locus apparens, koło południkowe, astrolabia Danjon'a, fotograficzny teleskop zenitalny, koło wertykalne, ruch biegunów. [a] ↱

[a] [Modyfikowano AD 2008, kwiecień, 27]

10.1 Wstęp

Omówimy sposoby wyznaczania współrzędnych równikowych α, δ ciał niebieskich za pomocą klasycznego instrumentu astrometrycznego — koła południkowego. Nie podamy jego pełnej teorii, ograniczymy się jedynie do przedstawienia zasady obserwacji i kilku podstawowych poprawek instrumentalnych tego narzędzia.

Błędy instrumentalne każdego teleskopu astronomicznego dzielą się na:

- błędy pochodzące z niedoskonałości samego instrumentu,
- błędy wynikające z niedoskonałości montażu.

Te ostatnie mają czysto geometryczny charakter i są wyznaczane metodami astronomii sferycznej.

Poprawianie obserwacji na błędy instrumentalne niemal zawsze dokonywane jest razem z poprawkami na refrakcję, aberrację dobową i paralaksę geocentryczną. Skorygowane w taki sposób współrzędne geocentryczne ciała określane są mianem współrzędnych widomych (*locus apparens*). Ich formalna definicja jest następująca: *współrzędne widome* (pozorne) ciała na dany moment czasu T_0 są to jego współrzędne na sferze geocentrycznej, odniesione do prawdziwego równika i równonocy na ten sam moment czasu T_0. A zatem, jako geocentryczne, są to współrzędne niezależne od konkretnego obserwatora, zmieniają się jednak z czasem i to dość szybko, w szczególności z powodu aberracji rocznej i precesji.

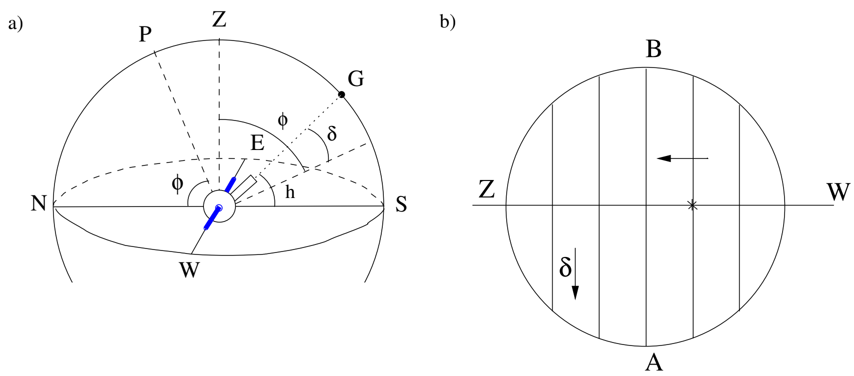
Współrzędne widome dla 1535 gwiazd są publikowane w The Apparent Places of the Fundamental Stars przez Astronomiczny Instytut Obliczeniowy w Heidelbergu, z przeznaczeniem dla obserwatorów południkowych. Wartości położeń podane są tam z dziesięciodniowym krokiem. ↱

10.2 Koło południkowe — zasada pomiaru rektascensji i deklinacji

Koło południkowe należy do grupy instrumentów przejściowych. Jest to keplerowska luneta wyposażona w montaż pozwalający na obrót lunety wokól jednej osi równoległej do horyzontu. Jeżeli oś obrotu umieszczona jest wzdłuż linii wschód-zachód, instrument nosi nazwę koła południkowego (rysunek 10.1a). Nazwa ”instrument przejściowy”– w pewnym sensie mówi nam o zasadzie pomiaru jednej ze współrzędnych. W okularze typowego instrumentu przejściowego mamy szereg pionowych nitek rozmieszczonych w pewnych odstępach (rysunek 10.1b). Obserwacja polega na rejestrowaniu momentów przejścia obrazu gwiazdy przez poszczególne nitki. Wartość średnia tych momentów czasu brana jest jako moment przejścia gwiazdy przez południk. Moment średni odpowiada przejściu przez wirtualną nitkę średnią położoną bardzo blisko nitki centralnej okularu koła południkowego.

Niech T będzie czasem gwiazdowym przejścia gwiazdy przez nitkę średnią wyznaczonym za pomocą obserwatoryjnego zegara gwiazdowego. Jeżeli poprawka zegara wynosi ΔT to obserwowana rektascensja równa się

$$\alpha' = T + \Delta T \tag{10.1}$$



Rysunek 10.1: Koło południkowe: a) zasada ustawienia montażu koła południkowego: oś wysokościowa (pozioma) biegnie wzdłuż linii wschód-zachód, narzędzie nie posiada osi azymytalnej, b) układ nitek w okularze typowego narzędzia południkowego; obraz gwiazdy po naprowadzeniu go na nitkę poziomą (pomiar δ); na skutek ruchu dobowego sfery, obraz gwiazdy przechodzi przez kolejne nitki pionowe (pomiar α).

Poprawkę ΔT można wyznaczyć porównując zegar obserwatoryjny z radiowymi sygnałami czasu. Te zaś emitowane są w skali czasu słonecznego UT, stąd trzeba będzie dokonywać zamiany czasu słonecznego na gwiazdowy w Greenwich, np. korzystając z odpowiednich tabel Rocznika Astronomicznego. Miejscowy czas gwiazdowy otrzymamy ze wzoru

$$C_{GM} = C_G + \lambda \tag{10.2}$$

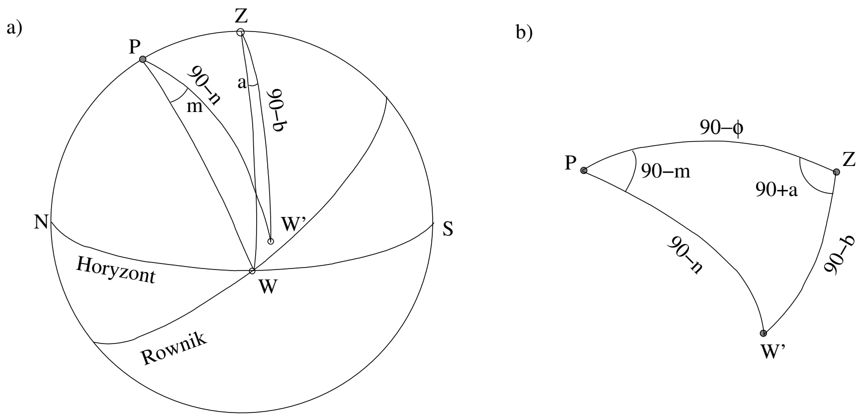
gdzie C_G — czas gwiazdowy w Greenwich, λ długość geograficzna instrumentu. Musimy zatem *a priori* znać dokładną długość geograficzną, czego zasadniczo nie można oczekiwać, gdyż współrzędne geograficzne instrumentu nieustannie doznają drobnych zmian wskutek ruchów biegunów ziemskich.

Kiedy gwiazda przebiega w polu widzenia lunety (rysunek 10.1b) wysokość instrumentu należy nastawić w taki sposób by nitka horyzontalna rozdwajała obraz gwiazdy. Gwarantuje to precyzyjny pomiar deklinacji bowiem w momencie przejścia przez południk wysokość gwiazdy jest sumą jej deklinacji i kąta $(90° - \phi)$ (rysunek 10.1a). Dlatego bezpośrednio z kół podziałowych narzędzia można odczytać deklinację D gwiazdy. Ostateczny rezultat dostajemy po uwzględnieniu poprawki d reprezentującej błędy w ustawieniu koła podziałowego instrumentu

$$\delta' = D + d \tag{10.3}$$

Podczas obrotu instrumentu przejściowego wokół jego osi, każdy punkt przecięcia nitki poziomej z pionowymi opisuje na sferze niebieskiej krzywą. Krzywe te są wzajemnie równoległymi małymi kołami o płaszczyznach prostopadłych do osi rotacji instrumentu. Równoległe do nich koło wielkie definiuje tzw. *płaszczyznę kolimacji* instrumentu. Jeśli nitki byłyby ułożone idealnie, płaszczyzna ta pokrywałaby się z nitką średnią. W praktyce tak jednak nie jest i nitka średnia przemieszczona jest względem płaszczyzny kolimacji o mały kąt c, zwany stałą kolimacji. Jest on dodatni jeśli średnia nitka znajduje się na wschód od płaszczyzny kolimacji.

Przedłużenie osi instrumentu przebija sferę w dwóch wzajemnie przeciwległych punktach E' i W' (punkty osiowe). W przypadku doskonałego instrumentu pokrywają się one



Rysunek 10.2: Błędy ustawienia koła południkowego: oś instrumentu przebija sferę w punkcie W' zamiast W; położenie punktu W' względem W określone jest parą małych kątów (a, b) lub (m, n).

z kardynalnymi punktami wschodu i zachodu. Nieprawidłowość położenia punktów osiowych instrumentu opisana jest dwoma parametrami: w azymucie tzw. stałą azymutalną a, natomiast w kierunku wertykalnym stałą wysokości b. Na rysunku 10.2, obie stałe mają wartości dodatnie. Zdefiniowane są jako

$$a = WZW' \quad b = 90° - ZW' \tag{10.4}$$

Pięcioma błedami $(\Delta T, d, c, a, b)$ zajmiemy się w dalszej dyskusji koła południkowego. Zakładamy o nich jeszcze, że są to małe wielkości, co dla dobrze zjustowanych narzędzi rzeczywiście ma miejsce.

Błędy ustawienia osi instrumentu często wygodniej jest wyrazić we współrzędnych równikowych aniżeli w horyzontalnych. W tym celu wprowadzadzono wielkości m, n, poprawki w rektascensji i deklinacji, określające odchylenie punktu W' od punktu zachodu W.

$$m = WPW' \quad n = 90° - PW' \tag{10.5}$$

Oba zestawy poprawek (m, n) i (a, b) dają się powiązać poprzez rozwiązanie trójkąta sferycznego PZW'. Jeśli (patrz rysunek 10.2):

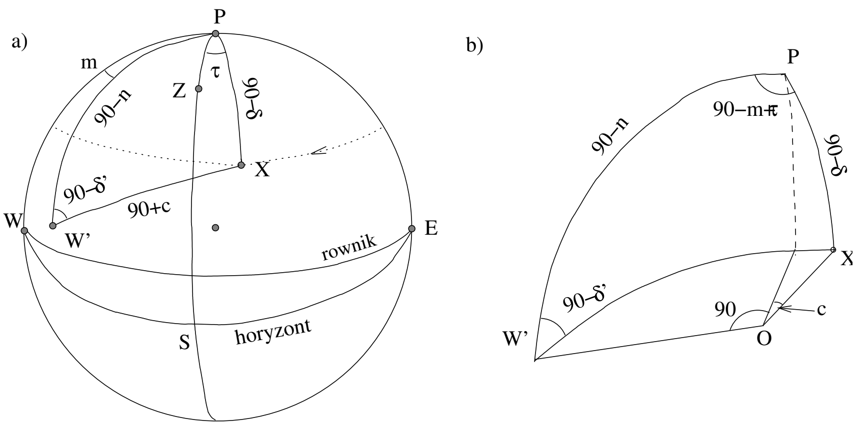
$$PW' = 90° - n$$
$$W'Z = 90° - b$$
$$PZ = 90° - \phi$$
$$W'PZ = 90° - m$$
$$W'ZP = 90° + a$$

to za pomocą cztero-elementowej formuły cotangensowej otrzymamy

$$\cos(90° - \phi)\cos(90° + a) =$$
$$= \sin(90° - \phi)\cot(90° - b) - \sin(90° + a)\cot(90° - m)$$

czyli

$$-\sin\phi\sin a = \cos\phi\tan b - \cos a\tan m$$



Rysunek 10.3: Z powodu niedokładnego ustawienia koła południkowego jak i błędu kolimacji lunety, gwiazda X góruje względem południka instrumentalnego o interwał τ za wcześnie.

co redukuje się do

$$\tan m = \tan a \sin\phi + \tan b \sec a \cos\phi \tag{10.6}$$

Wielkość n wyznaczymy z trójkąta PZW' z rysunku 10.2, ze wzoru cosinusów mamy

$$\sin n = \sin b \sin\phi - \sin a \cos b \cos\phi \tag{10.7}$$

a przy założeniu, że poprawki m, n, a, b są małe, w równaniach (10.6), (10.7) można skorzystać z przybliżenia małych kątów i wówczas

$$\begin{aligned} m &= a\sin\phi + b\cos\phi \\ n &= b\sin\phi - a\cos\phi \end{aligned} \tag{10.8}$$

Stałe instrumentalne m, n, c zwykle wyrażone są w mierze czasowej bowiem potrzebne są przy redukcji obserwacji współrzędnej rektascensji. Jedynie stałą poprawkę deklinacyjną d podaje się w sekundach łuku.

10.3 Usuwanie wpływów instrumentalnych w kole południkowym

Niech α', δ' będą współrzędnymi uzyskanymi z obserwowanej rektascensji i deklinacji po uwzględnieniu jedynie błędów pomiaru czasu oraz odczytu koła podziałowego, ΔT i d odpowiednio.

Niech α, δ będą dokładnymi wartościami współrzędnych obserwowanej gwiazdy, takimi, które zmierzono instrumentem idealnym. W przypadku braku refrakcji byłyby one od razu współrzędnymi topocentrycznymi. Na rysunku 10.3 przyjmijmy, że X oznacza położenie gwiazdy na sferze w momencie jej przejścia przez średnią nitkę (*południk instrumentu*). Jak widać, nastąpiło to nieco wcześniej aniżeli przejście przez południk prawdziwy, mianowicie, o interwał czasu τ

$$\tau = \alpha - \alpha' \tag{10.9}$$

Wyrazimy τ poprzez poprawki m, n, w tym celu rozważmy trójkąt sferyczny PXW'. Z definicji stałych instrumentalnych wynika, że

$$\begin{aligned} PW' &= 90^\circ - n \\ W'X &= 90^\circ + c \\ W'PX &= 90^\circ - m + \tau \end{aligned}$$

Dalej mamy $PX = 90^\circ - \delta$, a po zastosowaniu wzoru cosinusów do boku $90^\circ + c$

$$-\sin c = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m - \tau)$$

co w przybliżeniu małych kątów redukuje się do

$$\tau = \alpha - \alpha' = m + n \tan \delta + c \sec \delta \tag{10.10}$$

Jest to *formuła Bessel'a*, pozwalająca na obliczenie rektascensji wolnej od błędów instrumentalnych.

Poszukajmy teraz analogicznego związku na różnicę $(\delta - \delta')$. Kąt sferyczny PW'X jest w prosty sposób związany z odczytem koła deklinacyjnego. Przy odpowiednim wyborze punktu zerowego można napisać

$$PW'X = 90^\circ - \delta' \tag{10.11}$$

Wówczas, rzeczywista deklinacja (w trójkącie $W'PX$ z rysunku 10.3 korzystamy ze wzoru cosinusów) wynosi

$$\sin \delta = -\sin n \sin c + \cos n \cos c \sin \delta' \tag{10.12}$$

Ponieważ, jak się za chwilę przekonamy, δ różni się od δ' jedynie wyrazami drugiego rzędu, w praktyce jest więc obojętne, która z tych deklinacji zostanie podstawiona do wzoru (10.10) na poprawkę τ.

Ale podczas wyznaczenia wartości samego δ może być koniecznym wprowadzenie wyrazów drugiego rzędu. Dlatego wyznaczymy te wyrazy, i w tym celu w równaniu (10.12) połóżymy $\delta = \delta' + \Delta$,

$$\sin(\delta' + \Delta) = \sin \delta' \cos \Delta + \cos \delta' \sin \Delta = -\sin n \sin c + \cos n \cos c \sin \delta'$$

rozwijając funkcje trygonometryczne z kątami n i c w szeregi potęgowe, biorąc jedynie po dwa pierwsze wyrazy

$$\begin{aligned} &\sin \delta' \cos \Delta + \cos \delta' \sin \Delta = \\ &= -\left(n - \frac{1}{6}n^3\right)\left(c - \frac{1}{6}c^3\right) + \left(1 - \frac{1}{2}n^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}c^2\right) \sin \delta' \end{aligned}$$

odrzucając wyrazy rzędu wyższego niż drugi ze względu na n i c, otrzymamy

$$\sin \delta' \cos \Delta + \cos \delta' \sin \Delta = -nc + \sin \delta' - \frac{1}{2}(n^2 + c^2) \sin \delta'$$

a po podzieleniu stronami przez $\sin \delta'$ będzie

$$\cos \Delta + \cot \delta' \sin \Delta = \frac{-nc}{\sin \delta'} + 1 - \frac{1}{2}(n^2 + c^2)$$

A jeżeli Δ jest dostatecznie małe to

$$\begin{aligned}
1+\Delta\cot\delta' &= \frac{-nc}{\sin\delta'}+1-\frac{1}{2}(n^2+c^2)\\
\Delta &= -\frac{nc}{\cos\delta'}-\frac{1}{2}(n^2+c^2)\tan\delta'\\
\delta'-\delta &= 0.5\ (n^2+c^2)\tan\delta'+nc\sec\delta'
\end{aligned}$$

Ponieważ w rozwinięciu używano radianów, przejście do jednostek praktycznych wymaga wprowadzenia dodatkowych czynników

$$\delta'-\delta = 225''\sin 1''[0.5\ (n^2+c^2)\tan\delta'+nc\sec\delta'] \tag{10.13}$$

Uwaga! Wartości stałych m, n, c podane są w mierze czasowej.

Równania (10.10), (10.13) wyprowadzono dla normalnych przejść gwiazd przez południk. Są one ważne także dla górnych kulminacji gwiazd okołopolarnych, ale dla kulminacji dolnych trzeba wprowadzić drobne modyfikacje. Odpowiedni wzór Bessel'a ma wtedy postać

$$\tau = \alpha-\alpha' = m-n\tan\delta-c\sec\delta \tag{10.14}$$

gdzie τ ponownie oznacza czas prawdziwego przejścia minus czas przejścia rejestrowanego, ale α' musi być teraz rozumiana jako miejscowy czas gwiazdowy plus 12 godzin.

Teoria zawarta w równaniach (10.10) do (10.14) pozwala na uwolnienie obserwowanych wartości rektascensji i deklinacji z głównych błędów instrumentalnych, oczywiście pod warunkiem, że stałe instrumentalne są wcześniej znane. Wyznaczenie niektórych z tych stałych wymaga obserwacji gwiazd. Ponieważ bardzo pożądanym jest ciągłe kalibrowanie instrumentu astrometrycznego, dlatego wyznaczanie tych stałych, zaleca się wprowadzić jako integralną część programu obserwacji gwiazd.

10.4 Redukcja obserwacji na miejsce widome

Wartości obserwowane współrzędnych równikowych ciał niebieskich, poprawione na błędy instrumentalne stanowią fundamentalne wartości rektascensji i deklinacji. Jest jednak normalną praktyką dalsza redukcja obserwacji do położeń widomych. Wymaga to wprowadzenia poprawek na refrakcję, aberrację dobową i paralaksę geocentryczną.

W przypadku obserwacji południkowych wyrażenia na te poprawki dają się wyraźnie uprościć. Np. kładąc w formułach (9.25) na aberrację dobową kąt godzinny $t = 0$, wpływ aberracji na współrzędne równikowe wyrazi się następująco

$$\begin{aligned}
d\alpha &= 0.^s0213\cos\phi\sec\delta\\
d\delta &= 0.
\end{aligned} \tag{10.15}$$

Jak widać, wpływ w rektascensji jest podobny do poprawki kolimacji instrumentu w formule Bessel'a — oba efekty są proporcjonalne do $\sec\delta$. Można zatem połączyć obie poprawki w jedną poprzez podstawienie

$$c^* = c-0.^s0213\cos\phi \tag{10.16}$$

Wpływ refrakcji atmosferycznej jest bardziej poważny, bowiem poprawka refrakcyjna ma zwykle największą wartość. Refrakcja zmniejsza odległość zenitalną pozostawiając bez zmian azymut. Oznacza to, że skoro południk obserwatora jest jednocześnie kołem wertykalnym, refrakcja zmieniając deklinację nie zmienia momentu czasu przejścia przez południk.

Wyznaczony np. z tablic refrakcji, kąt refrakcji R trzeba zatem odjąć od zmierzonej wartości deklinacji, chyba, że mamy przypadek kulminacji pomiędzy biegunem i zenitem, wówczas należy zmienić znak poprawki.

Poprawka z tytułu paralaksy geocentrycznej, jest w przypadku obserwacji gwiazd zawsze do pominięcia. Pozostałe poprawki (na refrakcję i aberację dobową) można włączyć do równań obserwacyjnych koła południkowego. Niech (α', δ') będą współrzędnymi obserwowanymi poprawionymi na błędy czasu i odczytu koła podziałowego, dalej, niech (α, δ) oznaczają współrzędne widome gwiazdy, wówczas z dokładnością do małych rzędu drugiego

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + m + n \tan \delta' + c^* \sec \delta' \\ \delta &= \delta' - R \end{aligned} \tag{10.17}$$

Równania te można udokładnić włączając człony drugiego rzędu np. dla deklinacji wyraz taki dany jest równaniem (10.13).

Dla obiektów z Układu Słonecznego może się okazać koniecznym włączenie do równań obserwacyjnych paralaksy geocentrycznej. Podstawiając w równaniach (9.18) za kąt godzinny wartość $t = 0$, przekonamy się, że poprawka paralaktyczna w rektascensji wynosi zero, natomiast obserwowaną deklinację trzeba powiększyć o

$$\Delta\delta = \frac{\rho}{r} \sin(\phi' - \delta)$$

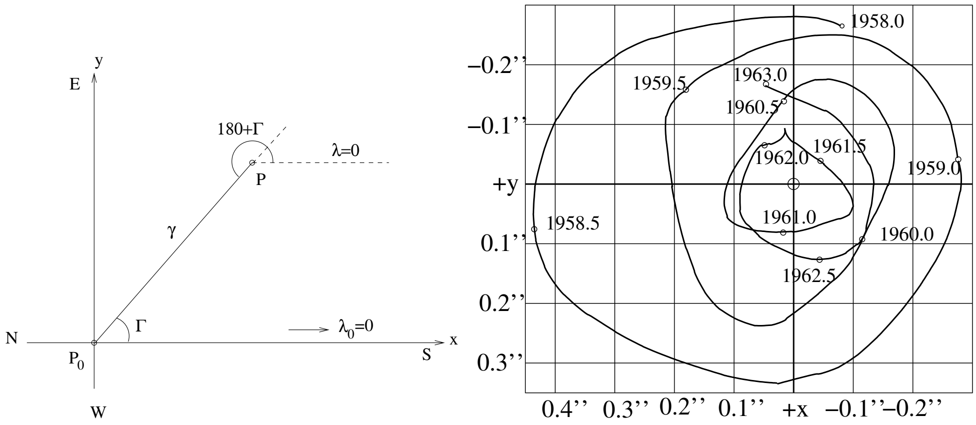
gdzie ρ — geocentryczna odległość obserwatora, r — geocentryczna odległość obiektu, ϕ' — geocentryczna szerokość obserwatora. Znak poprawki zmieniamy jeśli obserwowana kulminacja gwiazdy wypadła między biegunem i zenitem.

Podejście to jest jednak niewystarczające dla Księżyca i sztucznych satelitów Ziemi, dla których nie można paralaksy traktować jako wielkości małej. Trzeba wówczas postąpić następująco:

- wartości obserwowane poprawiamy za pomocą równań (10.17) otrzymując geometryczny kierunek źródła względem topocentrycznego obserwatora,
- po czym dokonujemy translacji do miejsca geocentrycznego za pomocą metody wektorowej podanej w poprzednim wykładzie.

10.5 Ruch biegunów

Przez pojęcie *ruch biegunów* rozumiemy powolne i niewielkie przemieszczanie się geograficznych biegunów po powierzchni Ziemi (nie względem gwiazd!). Chwilowy kierunek osi ruchu wirowego definiuje bieguny rotacji na powierzchni Ziemi i prawdziwe



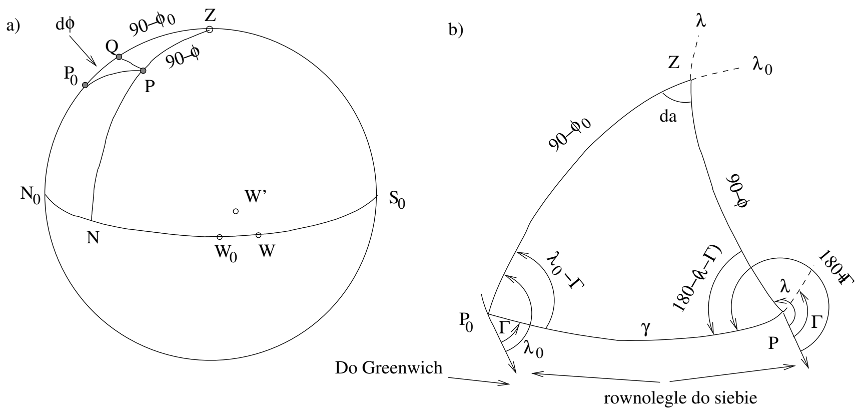
Rysunek 10.4: Ruch biegunów ziemskich: a) położenie na powierzchni Ziemi chwilowego bieguna P względem bieguna P_0, opis w trekście, b) trajektoria chwilowego bieguna ziemskiego względem bieguna średniego w latach 1958.0 – 1963.0.

bieguny świata na sferze niebieskiej. Bieguny świata przemieszczają się na sferze wskutek precesji luni-solarnej i nutacji. Obecnie tego typu ruchem biegunów się nie interesujemy. W dalszych rozważaniach będziemy traktować oś rotacji Ziemi jako posiadającą niezmienne położenie względem gwiazd. Interesuje nas pozorny ruch tej osi względem powierzchni Ziemi.

Wobec tego co powiedziano wyżej, skoro ruch biegunów po powierzchni Ziemi nie wpływa na położenie biegunów świata, to nie przyczynia się do zmian rektascensji i deklinacji gwiazd. Wpływa jednak na proces redukcji obserwacji tych współrzędnych wykonanych z pomocą instrumentów przejściowych. Jest tak gdyż montaż teleskopu ustawiony jest względem powierzchni Ziemi, a to oznacza, że na skutek ruchu skorupy ziemkiej cały zbiór gwiazd jest przesuwany względem instrumentu. W efekcie z powodu ruchu biegunów zmieniają się stałe instrumentalne narzędzia.

Na rysunku 10.4a, naszkicowano obszary polarne widziane ”z lotu ptaka”. Punkt P oznacza *chwilowy biegun* rotacji, P_0 jest jego średnim położeniem nazywanym niezbyt trafnie *biegunem figury ziemskiej*. W przeciwieństwie do chwilowego, biegun figury jest stałym punktem na powierzchni Ziemi. Przemieszczenie γ punktu P względem P_0 wynosi około $0\overset{\prime\prime}{.}3$, co na powierzchni Ziemi odpowiada odległości bliskiej 10 m (patrz rysunek 10.4b). Wschodnia długość Γ tego przesunięcia najczęściej zwiększa się, a zatem biegun chwilowy obiega P_0 w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Jest to ruch skomplikowany, nie dający się opisać dokładnie, ale jego główne składowe są znane. Są to okres 428 dniowy i okres roczny. Przyczyny ruchów bieguna są niemal w całości natury geofizycznej. Gdyby Ziemia była swobodnie wirującą bryłą sztywną, odchylenie bieguna rotacji od osi symetrii Ziemi spowodowałoby jednostajny ruch kołowy bieguna chwilowego wokół bieguna figury z okresem 305 dniowym. Ze względu na plastyczność Ziemi okres ten uległ silnemu wydłużeniu (okres 428 dniowy jest zmodyfikowanym okresem swobodnego ruchu wirowego Ziemi). Składowa roczna ruchu biegunów, jest składową wymuszoną narzuconą przez ulegające ciągłej zmianie warunki geofizyczne.

Przemieszczenie P względem P_0 wyrażone jest zwykle za pomocą współrzędnych prostokątnych (x, y), przy czym oś x skierowana jest wzdłuż południka zerowego, oś y



Rysunek 10.5: Szerokość i długość obserwatora względem bieguna figury P_0 i bieguna chwilowego

wzdłuż południka o $\lambda = 270°$, (patrz rysunek 10.4a),

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma \cos \Gamma \\
y &= -\gamma \sin \Gamma
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

Wartości x, y są publikowane z pewnym opóźnieniem, przez Międzynarodową Służbę Rotacji Ziemi na minione momenty czasu.

W rezultacie ruchu biegunów zmienia się szerokość i długość danego miejsca obserwacji. Niech (λ_0, ϕ_0) są geograficznymi współrzędnymi obserwatora względem bieguna figury, natomiast (λ, ϕ) względem bieguna chwilowego. Definicja szerokości względem P jest bardzo prosta, ale nieco uwagi wymaga określenie zerowego południka dla bieguna P. Na rysunku 10.4a pokazano, że południk zerowy dla P jest wybrany tak, by styczna w P leżąca w jego płaszczyźnie biegła równolegle do stycznej w P_0 do głównego południka figury Ziemi. Obydwa południki przecinają się gdzieś na równiku, a więc południk zerowy bieguna rotującego nie musi przechodzić przez punkt odniesienia w Greenwich. Taka definicja oznacza także, że południk o długości Γ, jest wspólny dla obu systemów. Spójrzmy teraz na rysunek 10.5a. Obserwator znajduje się w środku sfery, jego zenit będziemy traktowali jako punkt stały, co miałoby miejsce naprawdę gdyby punkt Z oznaczał zenit geocentryczny. Stałe instrumentalne są jednak wyznaczane w oparciu o zenit astronomiczny, a ten również wykazuje drobne ruchy; zenit astronomiczny określony jest kierunkiem lokalnej grawitacji, a m.in. siły pływowe precesji luni-solarnej wnoszą tu niewielkie zmiany. Więcej, siły te indukują pewne efekty geofizyczne, które ponownie zmieniają kierunek widomej grawitacji. Jest to efekt czysto geometryczny i nie zniekształcający procesu redukcji obserwacji gwiazd, pod warunkiem, że stałe instrumentalne będą wyznaczane względem stałego kierunku zenitalnego. Dlatego zmiany astronomicznego zenitu zostaną tu pominięte, i jedynie będą wzięte pod uwagę zmiany astronomicznej szerokości i długości $d\phi, d\lambda$ wywołane ruchami bieguna.

Możemy zatem przejść do wyprowadzenia formuł wiążących współrzędne obserwatora podane względem bieguna figury P_0 i bieguna chwilowego. Niech na rysunku 10.5ab, P i P_0 oznaczają położenia bieguna chwiloweg i bieguna figury odpowiednio. Mamy wówczas $P_0Z = 90° - \phi_0$, oraz $PZ = 90° - \phi$. Dalej N_0, W_0, S_0 są punktami kardynalnymi horyzontu wyznaczonymi w oparciu o P_0, natomiast N i W w oparciu o punkt P.

Małe koło przechodzące przez P przecina łuk P_0Z w punkcie Q, przy czym $P_0Q = d\phi = \phi - \phi_0$. Traktując trójkąt P_0PQ jako płaski i prostokątny w wierzchołku Q, mamy

$$d\phi = P_0P\cos(QP_0P) = P_0P\cos ZP_0P$$

Mamy też $P_0P = \gamma$, P_0Z jest południkiem o długości λ_0, P_0P jest południkiem o długości Γ. Zatem $ZP_0P = \lambda_0 - \Gamma$, oraz

$$d\phi = \gamma\cos(\lambda_0 - \Gamma) \tag{10.19}$$

Z drugiej strony, PZ jest południkiem o dłudości λ, PP_0 południkiem o długości $(180^\circ + \Gamma)$, oba względem bieguna P.

Stąd kąt sferyczny $P_0PZ = 180^\circ - (\lambda - \Gamma)$, a formuła czteroczęściowa zastosowana do trójkąta sferycznego P_0ZP daje

$$\cos\gamma\cos(180^\circ - (\lambda - \Gamma)) = \sin\gamma\cot(90^\circ - \phi) - \sin(\lambda - \Gamma)\cot(\lambda_0 - \Gamma)$$

Ze względu na małe wartości kąta γ, w przybliżeniu można napisać

$$\gamma\tan\phi\sin(\lambda_0 - \Gamma) = \sin(\lambda - \Gamma)\cos(\lambda_0 - \Gamma) - \cos(\lambda - \Gamma)\sin(\lambda_0 - \Gamma)$$

a korzystając ze znanych tożsamości trygonometrycznych mamy

$$d\lambda = \lambda - \lambda_0 = \gamma\tan\phi\sin(\lambda_0 - \Gamma) \tag{10.20}$$

Jeżeli w równaniach (10.19) i (10.20) zastosujemy wzory na sumę, różnicę sinusa i cosinusa po czym wykorzystamy równanie (10.18), wówczas dostaniemy wyrażenia na chwilową długość i szerokość geograficzną w postaci

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + x\cos\lambda_0 - y\sin\lambda_0 \\ \lambda &= \lambda_0 + (x\sin\lambda_0 + y\cos\lambda_0)\tan\phi \end{aligned} \tag{10.21}$$

Możemy teraz pokazać jak ruchy bieguna wpływają na poprawki instrumentalne koła południkowego. Punkt W' (rysunek 10.5a), zachodni koniec osi poziomej instrumentu z powodu ruchu bieguna nie zmienia swego położenia na sferze. Podobnie nie zmieni się stała kolimacji narzędzia. A ponieważ założyliśmy, że zenit obserwatora jest nieruchomy, wartość stałej wysokości instrumentu również pozostanie taka sama. Przemieszczenie bieguna zmniejszy jednak wszystkie zachodnie azymuty, w tym stałą azymutalną narzędzia o kąt N_0N, a więc

$$da = -P_0ZP$$

Kąt ten łatwo otrzymać z trójkąta sferycznego P_0ZP (rysunek 10.5b), mianowicie, stosując wzór sinusów i przybliżenie małych kątów dostaniemy

$$da = -\gamma\sin(\lambda_0 - \Gamma)\sec\phi \tag{10.22}$$

A za pomocą wzoru (10.20)

$$da = -d\lambda\csc\phi \tag{10.23}$$

Zmiana w długości $d\lambda$ musi jeszcze zostać uwzględniona w poprawce zegara, z którego pomocą mierzono moment przejścia gwiazdy przez południk instrumentalny. Oczywistym jest, że błąd poprawki zegara wynosi

$$d(\Delta T) = d\lambda. \tag{10.24}$$

Wpływ ruchów bieguna na odczyt zegara T odpowiadający momentowi przejścia geiazdy przez nitkę średnią, najłatwiej policzyć zastępując stałe instrumentalne m, n parzez ich odpowiedniki horyzontalne a, b. Wprowadzając do równania (10.10) wielkości dane wzorami (10.1) i (10.8), dostaniemy alternatywę wzoru Bessel'a na poprawioną rektascensję gwiazdy, mianowicie

$$\alpha - T = \Delta T + a \sin(\phi - \delta) \sec\delta + b \cos(\phi - \delta) \sec\delta + c \sec\delta$$

a po zróżniczkowaniu, z wystarczającą dokładnością będzie

$$d(\alpha - T) = d\lambda + da \sin(\phi - \delta) \sec\delta$$

Zauważając, że prawdziwe α, δ nie ulegają zmianie z powodu ruchów bieguna, po podstawieniu wzoru (10.23) będziemy mieli

$$dT = -d\lambda \cot\phi \tan\delta \tag{10.25}$$

Jest to zmiana momentu czasu obserwowacji przejścia gwiazdy przez południk spowodowana ruchami biegunów ziemskich. Zmiana szerokości obserwatora, powoduje odpowiednią zmianę w odczycie deklinacji z koła podziałowego.

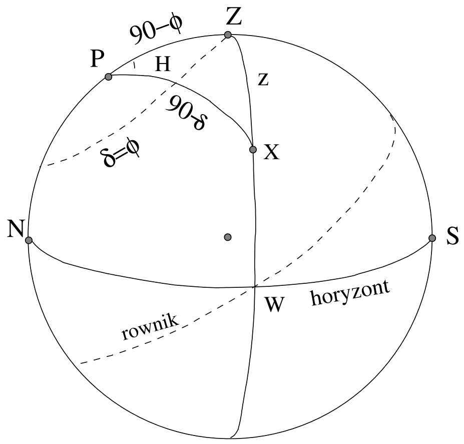
10.6 Koło wertykalne

Koło południkowe ma sporo zalet, np. pozwala na wyznaczenie (α, δ) wszystkich gwiazd widocznych na horyzoncie obserwatora gdy tymczasem inne instrumenty mają pewne ograniczenia ze względu na deklinację. Ponadto, obserwacje południkowe w zasadzie bezpośrednio dają rektascensję i deklinację, tę własność określamy mianem pomiarów absolutnych. Dlatego jeszcze w początkowych latach XX stulecia koło południkowe było podstawowym narzędziem służącym do wyznaczania absolutnych pozycji gwiazd. Obserwacje te stanowiły bazę do tworzenia fundamentalnych katalogów gwiazd.

Koło południkowe może być wykorzystywane nie tylko do pracy w południku miejscowym. Rozważmy nieco inny wariant, identyczny instrument, ale zorientowany swą osią poziomą wzdłuż lini północ-południe. Jak widać na rysunku 10.6, taki wertykalny instrument przejściowy pozwala na obserwacje gwiazd o deklinacjach wyłącznie z przedziału $[0, \phi]$. Wszystkie takie gwiazdy mają po dwa przejścia przez pierwszy wertykał, w momencie których rejestrowany jest miejscowy czas gwiazdowy. Średnia z dwóch przejść jest równa rektascensji gwiazdy. Koła podziałowe pionowe pozwalają na pomiar odległości zenitalnej z przejścia, a połowa interwału czasu między dwoma przejściami równa jest kątowi godzinnemu H w chwili przejścia przez pierwszy wertykał.

Niech punkt X na rysunku 10.6 będzie położeniem gwiazdy w momencie zachodniego przejścia, wówczas z trójkąta sferycznego PZX i wzoru sinusów mamy

$$\cos\delta = \sin z \csc H \tag{10.26}$$



Rysunek 10.6: Przejście obiektu X przez pierwszy wertykał, opis w tekście.

Z wzoru cotangensowego zastosowanego do tego trójkąta (rysunek 10.6) możemy wyznaczyć szerokość obserwatora

$$\cos\phi = \tan z \cot H \tag{10.27}$$

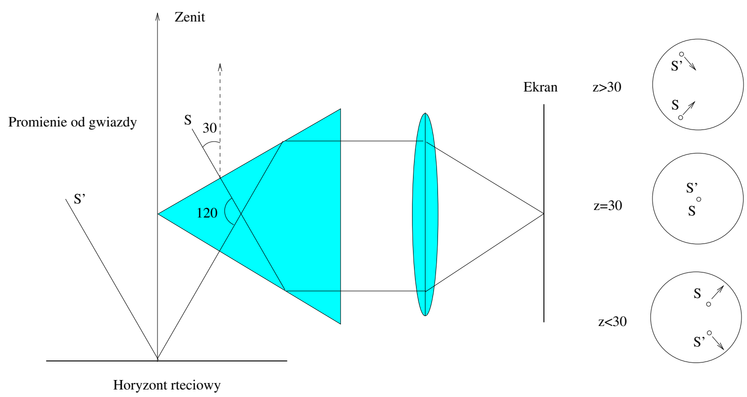
Podczas obserwacji w pierwszym wertykale błędy instrumentalne są naturalnie takie same jak dla koła południkowego, ale poprawki jakie trzeba wprowadzić do obserwacji są znacznie bardziej skomplikowane. Jedyną przewagą koła wertykalnego jest możliwość niezależnych pomiarów szerokości obserwatora. ↱

10.7 Astrolabia Danjon'a

Poza niawątpliwymi zaletami, koło południkowe ma jednak pewne wady, jedną z nich jest problem mechanicznego ugięcia lunety, co wiąże się z niestałością poprawek instrumentalnych. Zmiany poprawek mogą być nieistotne dla małych odległości zenitalnych ale dla dużych już niestety nie. Z powodu elastyczności montażu narzędzia pojawiają się wówczas błędy systematyczne, a związane z nimi poprawki są trudne do wyznaczenia.

Dlatego zaprojektowano narzędzia innego typu, pozwalające na absolutne pomiary położeń ciał niebieskich z większą precyzją, są to bezosobowa astrolabia Danjon'a i fotograficzny teleskop zenitalny (w skrócie określany jako FTZ). W przypadku FTZ możliwe jest obserwowanie gwiazd jedynie na niedużych odległościach zenitalnych. Astrolabię Danjon'a można obracać wokół osi azumutalnej, ale obserwacje wykonuje się zawsze na tym samym almukantaracie o odległości zenitalnej równej np. $30°$, co skutecznie oddala niebezpieczeństwo zmiennego błędu ugięcia teleskopu.

Zasadę pracy astrolabii Danjona zilustrowano na rysunku 10.7. Astrolabia składa się z równobocznego szklanego pryzmatu ustawionego jednym bokiem prostopadle do horyzontu. W okularze narzędzia obserwowane są dwa obrazy tej samej gwiazdy, jeden bezpośredni po odbiciu od wewnętrznej dolnej płaszczyzny pryzmatu, drugi odbity od zwierciadła rtęciowego i górnej płaszczyzny pryzmatu. Gdy odległość zenitalna gwiazdy wynosi $30°$, w okularze obserwujemy koincydencję obu obrazów. A zatem gwiazda może być obserwowana za pomocą tego instrumentu tylko wtedy gdy w wyniku ruchu dobowego przechodzi przez almukantarat $60°$. Nakłada to na gwiazdy możliwe do obserwacji



Rysunek 10.7: Bieg promieni świetlnych w astrolabii Danjon'a. Biegnące równolegle promienie S i S' z wiązki promieni od pewnej gwiazdy wpadają w różne miejsca układu optycznnego astrolabii. Promień S pada bezpośrednio na pryzmat, promień S' dopiero po odbiciu od lustra rtęciowego. Po przejściu różnych części pryzmatu oba promienie zostają skupione np. na ekranie. W momencie gdy gwiazda znajdowała się na almukantaracie $30°$ jej obrazy utworzone przez oba promienie pokrywają się.

warunek $\phi + 30° > \delta > \phi - 30°$.
Każda gwiazda musi dokonać dwóch przejść przez almukantarat, jedno wschodnie drugie zachodnie względem południka obserwatora. Średni moment czasu z dwóch momentów przejścia daje rektascensję gwiazdy; połowa interwału czasu pomiędzy przejściami daje kąt godzinny H odpowiadający odległości zenitalnej $30°$. Niech na rysunku 10.8 punkt X oznacza położenie gwiazdy obserwowanej astrolabią Danjona. Z trójkąta PZX, ze wzoru cosinusów mamy

$$\cos z = \sqrt{3}/2 = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H \tag{10.28}$$

Równanie to umożliwia obliczenie zarówno deklinacji gwiazdy jak i szerokości zakładając, że druga z wielkości jest dostępna. Jeśli znana jest szerokość, podstawiamy wówczas

$$\tan F = \cot\phi \cos H \tag{10.29}$$

co w równaniu (10.28) pozwala wyeliminować $\cos H$

$$\sqrt{3}/2 = \sin\phi \sec F \sin(\delta + F)$$

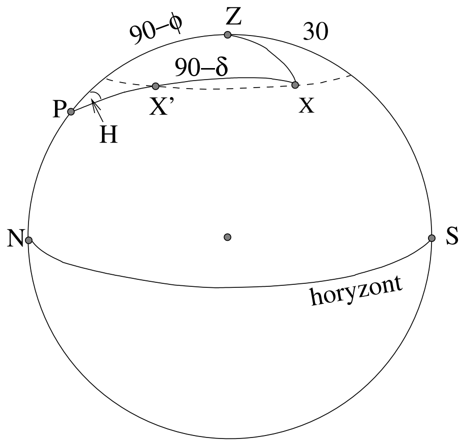
Wobec tego, deklinację obliczymy jako

$$\delta = \arcsin\left(\sqrt{3}/2 \cos F \csc\phi\right) - F \tag{10.30}$$

Ze względu na niejednoznaczność funkcji arcsin, równanie (10.30) ma dwa rozwiązania. Na rysunku 10.8 odpowiadają one położeniom oznaczonym przez X i X' . Zwykle nietrudno jest wybrać rozwiązanie właściwe. ↱

10.8 Fotograficzny teleskop zenitalny

Rysunek 10.9a, schematycznie przedstawia powstawanie obrazu gwiazdy w FTZ. Instrument ten składa się z horyzontalnej soczewki objektywowej, z oprawy na klisze fotogra-



Rysunek 10.8: Gwiazda X znajduje się na almukantaracie o $Z = 30^{\circ}$. Z rozwiązania trójkąta sferycznego PXZ możemy wyznaczyć wartość jej deklinacji. Istnieją jednak dwa rozwiązania, jedno odpowiada gwieździe położonej na tym almukantaracie w miejscu X, drugie gwieździe znajdującej się w punkcie X'.

ficzne (umieszczona tuż pod soczewką), oraz z ciekłego lustra rtęciowego. Obraz gwiazdy po odbiciu od lustra rtęciowego rejestrowany jest na kliszy fotograficznej.

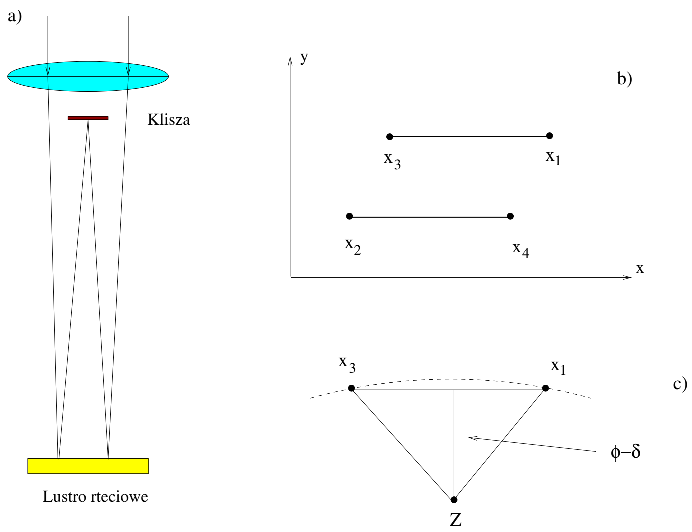
Ważną cechą tego narzędzia jest to, że na emulsji fotograficznej leży punkt węzłowy soczewki objektywu, wówczas dobierając odpowiednio odległość powierzchni rtęci otrzymujemu na kliszy zogniskowane obrazy gwiazd. Takie rozwiązanie doskonale eliminuje błędy wysokości i kolimacji narzędzia.

Podczas ekspozycji oprawa z kliszą jest z odpowiednią szybkością przesuwana prostopadle do osi optycznej teleskopu. Przy czasach naświetlania kliszy od 10-20 sekund, technika ta pozwala na uzyskanie punktowych obrazów gwiazd a więc na fotografowanie gwiazd nawet stosunkowo slabych. W czasie obserwacji rejestrowany jest automatycznie moment czasu odpowiadający środkowi interwału eksponowania kliszy. Jednakże kompletna obserwacja za pomocą FTZ wymaga czterech ekspozycji. Po każdej ekspozycji, soczewka wraz z kliszą są obracane o 180° i w rezultacie cztery obrazy danej gwiazdy tworzą na kliszy równoległobok, przykładowo pokazany na rysunku 10.9b. Niech t_1, t_2, t_3, t_4 będą momentami czterech obserwacji danej gwiazdy. Gdyby kamery FTZ w czasie obserwacji nie obracano o 180°, pomijając niewielkie zakrzywienie, cztery obrazy leżałyby na liniach prostych. Ze względu na obroty, jjedynie odcinki X_1X_3 i X_2X_4 odzwierciedlają ruch dobowy sfery. Przy obrocie kliszy dokładnie o kąt 180°, odcinki są do siebie równoległe. W czasie obracania FTZ, punkt zenitu na kliszy pozostaje nieruchomy. Jest on jednakowo odległy od odcinków X_1X_3 i X_2X_4.

Określmy w dowolnym mmiejscu kliszy układ współrzędnych (x, y) , o osi OX równoległej do tych odcinków. Niech (x_i, y_i) są współrzędnymi punktów X_i, i=1,2,3,4. Można je oczywiście zmierzyć za pomocą precyzyjnych płytomierzy. Znając skalę kliszy (co ma miejsce, bowiem przykładowo, znamy odległość X_1X_3 na kliszy oraz interwał $(t_3 - t_1)$ odpowiadający ruchowi dobowemu od X_1 do X_3), możemy współrzędne w jednostkach liniowych łatwo zamienić w kątowe. Zauważmy też, że $y_1 = y_3,\ y_2 = y_4$.

Niech (x_0, y_0) będą współrzędnymi obrazu zenitu miejsca obserwacji. Współrzędna x_0 jest nieznana ale y_0 możemy wyznaczyć z formuły

$$y_0 = 0.5\ (y_1 + y_4) = 0.5\ (y_2 + y_3)$$



Rysunek 10.9: Fotograficzny teleskop zenitalny: a) powstawanie obrazu gwiazdy w układzie optycznym, b) obrazy gwiazd zarejestrowane na kliszy w trakcie obserwacji fotograficznym teleskopem zenitalnym, c) odległość zenitalna odcinka $x_3 x_1$ wynosi $\phi - \delta$. Szczegóły w tekście.

Łatwo zauważyć, że odległość pomiędzy równoległymi odcinkami $X_1 X_3$ i $X_2 X_4$ równa jest dwukrotnej odległości zenitalnej gwiazdy w momencie przejścia przez południk obserwatora (patrz rysunek 10.9c), stąd

$$\phi - \delta = 0.5\,(y_1 - y_4) = 0.5\,(y_2 - y_3) \tag{10.31}$$

Zatem znając szerokość miejsca obserwacji możemy obliczyć deklinację gwiazdy.

Kąt godzinny gwiazdy w momencie t_1 eksponowania kliszy, wynosi $(x_0 - x_1)$ (pomijamy zakrzywienie śladu gwiazdy na kliszy), a w momencie t_4, ze względu na odwrócenie kliszy wynosi $(x_4 - x_0)$. A zatem w momencie $0.5(t_1 + t_4)$ kąt godzinny jest równy $0.5(x_4 - x_1)$. Wykorzystując wszystkie cztery obrazy gwiazdy, średni moment obserwacji wyliczamy jako

$$t_0 = 0.25\,(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \tag{10.32}$$

przy czym warto wyrazić go w czasie gwiazdowym. Odpowiadający mu średni kąt godzinny wynosi

$$H_0 = 0.25(x_4 - x_1 + x_3 - x_2) \tag{10.33}$$

a rektascensję obserwowanej gwiazdy wyliczamy ze znanej formuły

$$\alpha = t_0 - H_0 \tag{10.34}$$

Największą zaletą FTZ jest — ze względu na niewielkie odległości zenitalne — zredukowanie do minimum wpływu refrakcji na rezultaty obserwacji. Wadą natomiast jest niewielki zakres deklinacji gwiazd (mniej niż $1°$), jakie można tym narzędziem w danym miejscu obserwować.

Mimo, że są to narzędzia precyzyjniejsze, ani astrolabium Danjon'a, ani FTZ nie nadają się do wyznaczenia rektascensji i deklinacji w sposób fundamentalny. Mogą one natomiast dokładnie powiązać położenia rozrzucone po całej sferze i wykryć błędy w katalogach fundamentalnych opracowanych w oparciu o obserwacje południkowe.

Doskonale nadają się do wyznaczania zmian szerokości i czasu w miejscu obserwacji, nie tylko wynikających z ruchów bieguna ale także powodowanych nieregularnością ruchu wirowego Ziemi.

10.9 Dodatek A. Zadania

1. Pokaż, że błąd momentu przejścia gwiazdy przez południk, obserwowanej kołem południkowym, obok wzoru Bessel'a dany jest także wzorem Mayer'a

$$\tau = [a \sin(\phi - \delta) + b \cos(\phi - \delta) + c] \sec \delta$$

2. Gwiazdę o $\delta = 79°35'$ obserwowano instrumentem przejściowym w miejscu o szerokości $51°16'38''$. W następstwie poprawek instrumentalnych błędów w wysokości i kolimacji, czasy uniwersalne górnej i dolnej kulminacji okazały się równe $18^{\mathrm{h}}03^{\mathrm{m}}18\overset{\mathrm{s}}{.}4$ i $6^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}45\overset{\mathrm{s}}{.}1$. Oblicz błąd azymutu tego narzędzia.

3. Wyjaśnij zasadę obserwacji gwiazd za pomocą astrolabii Danjon'a. Pokaż, że można ją zastosować do pomiaru deklinacji gwiazd, dla których

$$\phi - 30° < \delta < \phi + 30°$$

Udowodnij, że precyzja wyznaczenia δ jest największa na końcach tego przedziału, oraz, że osiąga zero gdy

$$\delta = \arcsin\left[\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}}\right]$$

Pokaż, że precyzja wyznaczenia rektascensji jest największa gdy

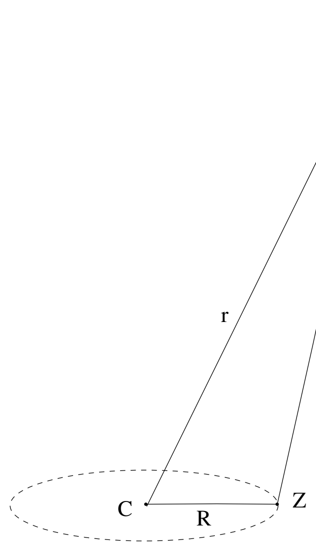
$$\delta = \arcsin\left[\sqrt{3}/2\sin\phi\right]$$

Rozdział 11

Współrzędne helio- i barycentryczne

Streszczenie. Położenia gwiazd wyznaczone z obserwacji wykonanych z powierzchni orbitującej wokół Słońca Ziemi, wykazują cykliczne zmiany. Zmiany te są złożeniem dwóch zjawisk: paralaksy i aberracji rocznej. Paralaksa roczna gwiazd jest niewielkim kątem, zawsze mniejszym od $1''$, który zależy od odległości gwiazda obserwator. Z tego powodu paralaksa ma fundamentalne znaczenie w wyznaczaniu odległości do gwiazd. Metoda paralaksy trygonometrycznej jest metodą podstawową, służącą do kalibrowania innych sposobów wyznaczania odległości do gwiazd. Aberracja roczna powoduje zmiany współrzędnych gwiazd niezależnie od ich oddalenia od obserwatora. Są to zmiany duże dochodzące do około $20''$. Przybliżony opis paralaksy i aberracji rocznej w ekliptycznym układzie współrzędnych pozwala, dla każdej gwiazdy, na wyprowadzenie równań tzw. paralaktycznych i aberracyjnych elips, czyli trajektorii po których, na skutek omawianych zjawisk, w ciągu roku przemieszcza się obserwowane położenie gwiazdy. Elipsy te różnią się rozmiarami, a odbywający się po nich ruch paralaktyczny obrazu gwiazdy jest przesunięty w fazie w stosunku do ruchu aberracyjnego.
Aberracja roczna jest konsekwencją niezerowej prędkości obserwatora. W przypadku gwiazd druga poprawka aberracyjna, tzw. aberracja wiekowa jest ignorowana w trakcie przejścia z geocentrum do barycentrum Układu Słonecznego. Jest to poprawka wynikająca z niezerowj względem obserwatora prędkości samej gwiazdy, wskutek czego, w interwale czasu jaki kwant promieniowania potrzebuje na przebycie odległości gwiazda obserwator — gwiazda zmienia położenie. Inaczej ma się sprawa dla ciał z Układu Słonecznego. Tutaj poprawka z tytułu czasu propagacji światła musi być zawsze uwzględniona. Poprawka łączna obejmująca aberację roczną i czas propagacji nosi nazwę aberacji planetarnej.
W czasach współczesnych formuły transformacyjne przejścia geo-barycentrum uwzględniają pełną aberrację roczną — czyli skutek ruchu obserwatora po orbicie eliptycznej. W przeszłości, do roku 1984, stosowano podejście uproszczone, polegające na usuwaniu ze współrzędnych geocentrycznych jedynie tzw. aberracji kołowej, pozostawiając te części poprawek, które były konsekwencją eliptyczności ziemskiej orbity. Pozostawione części poprawki aberracyjnej określano mianem aberracyjnych członów E. Wszystkie średnie miejsca katalogowe gwiazd, wyliczone przed rokiem 1984 zawierają nieusunięte człony E.
Słowa kluczowe: współrzędne heliocentryczne i barycentryczne, paralaksa roczna, aberracja roczna, aberracja planetarna, aberracyjne człony E, parsek. [a] ↱

[a][Modyfikowano AD 2008, Kwiecień 27.]



Rysunek 11.1: Paralaksa roczna. Położenie gwiazdy X obserwowane przez obserwatorów znajdujących się w punktach Z i C różni się o kąt paralaksy p.

11.1 Paralaksa roczna

Omówimy transformację współrzędnych ciał niebieskich z miejsca geocentrycznego do heliocentrycznego lub barycentrycznego, czyli do środka masy Słońca lub środka masy Układu Planetarnego. Potrzebna do tego celu poprawka paralaktyczna zwana w tym przypadku paralaksą gwiazdową, gra kluczową rolę przy wyznaczaniu odległości do gwiazd.

Niech na rysunku 11.1 punkt X oznacza obserwowany obiekt, C barycentrum Układu Planetarnego, Z środek Ziemi. Oznaczmy przez $\mathbf{r}$ i $\mathbf{R}$ barycentryczne wektory położenia obiektu i Ziemi, odpowiednio. Niech $\mathbf{r}'$ będzie geocentrycznym wektorem położenia obiektu. Oczywiście

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \tag{11.1}$$

Jest to dokładne równanie, i jeśli X oznacza ciało z Układu Słonecznego taką postać równania należy zachować w zastosowaniach praktycznych. Gdy mamy do czynienia z gwiazdami można dokonać pewnych uproszczeń.

Kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ nazywany jest paralaksą roczną p. W interwale jednego roku kąt ten zmienia się wraz ze zmianami położenia Ziemi na orbicie. Dla trójkąta CZX, z twierdzenia sinusów wynika

$$\sin p = \frac{R}{r} \sin Z \tag{11.2}$$

gdzie Z elongacja gwiazdy (kąt CZX). Ze względu na konieczność standaryzacji *paralaksa roczna* gwiazdy definiowana jest jako kąt π [1]

$$\sin \pi = \frac{1}{r} \tag{11.3}$$

[1]Oznaczenie to wprowadza nieco zamieszania i dlatego należy zachować ostrożność aby nie pomylić paralaksy rocznej z oznaczeniem liczby niewymiernej 3.1415... .

przy czym odległość r wyrażona jest w jednostkach astronomicznych.

Zatem, paralaksa π odpowiada warunkom, w których $R = 1$ [AU], $Z = 90°$. Na przestrzeni roku, w efekcie zjawiska paralaksy gwiazda opisuje na sferze elipsę o półosi wielkiej w przybliżeniu równej π.

Paralaksy roczne gwiazd są bardzo małe, nie znamy ani jednego przypadku gwiazdy z paralaksą π większą od $1''$ dlatego, na podstawie równania (11.3), przy zachowaniu dużej dokładności, odległość gwiazdy może być określona formułą

$$r = \pi^{-1} \tag{11.4}$$

gdzie r wyrażone jest w parsekach. *Parsek* jest to odległość odpowiadająca paralaksie $\pi = 1''$. Gdyby w formule (11.4) π było wyrażone w radianach, wówczas r byłoby w jednostkach astronomicznych. Aby w równaniu (11.4) r było w parsekach, paralaksa π musi być podstawiona w sekundach łuku. Zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} &1 \text{ prc} = 206265 \quad [\text{AU}] \\ &1 \text{ prc} = 3.2616 \quad [\text{lat wietlnych}] \\ &1 \text{ prc} = 3.0857 \cdot 10^{13} \quad [\text{km}] \end{aligned} \tag{11.5}$$

Wspomniano już, że wobec bardzo małych wartości paralaksy istnieje możliwość przybliżenia zależności (11.1). Niech s i s′ będą wersorami wektorów **r** i **r**’, mamy więc

$$r\mathrm{s} - r'\mathrm{s}' = \mathbf{R}$$

Mnożąc to równanie dwukrotnie wektorowo przez s, stosując prawa iloczynu wektorowego będziemy mieli

$$\begin{aligned} &\mathrm{s} \times \mathrm{s} \times (r\mathrm{s}) - \mathrm{s} \times \mathrm{s} \times (r'\mathrm{s}') = \mathrm{s} \times \mathrm{s} \times \mathbf{R} \\ &-((\mathrm{s} \cdot \mathrm{s}')\mathrm{s} - (\mathrm{s} \cdot \mathrm{s})\mathrm{s}') = r'^{-1}(\mathrm{s} \times (\mathrm{s} \times \mathbf{R})) \end{aligned}$$

Kładąc $\mathrm{s} \cdot \mathrm{s}' \approx 1$, $r = r'$ uwzględniając (11.4) dostaniemy

$$\mathrm{s}' - \mathrm{s} = \pi \cdot (\mathrm{s} \times (\mathrm{s} \times \mathbf{R}))$$

po kolejnym zastosowaniu twierdzeń iloczynu wektorowego

$$d\mathrm{s} = \pi((\mathrm{s} \cdot \mathbf{R})\,\mathrm{s} - \mathbf{R}) \tag{11.6}$$

We współrzędnych równikowych, składowe wektora $\mathbf{R}$ położenia Ziemi oraz wersora s wynoszą

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} = (X, Y, Z) \\ &\mathrm{s} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta) \end{aligned}$$

Różniczkując składowe wersora s po α i δ mamy

$$d\mathrm{s} = (-\sin\alpha\cos\delta\, d\alpha - \cos\alpha\sin\delta\, d\delta, \cos\alpha\cos\delta\, d\alpha - \sin\alpha\sin\delta\, d\delta, \cos\delta\, d\delta)$$

Składowe równania wektorowego (11.6) mają zatem postać

$$\begin{aligned} -\sin\alpha\cos\delta\, d\alpha - \cos\alpha\sin\delta\, d\delta &= \pi((\mathrm{s} \cdot \mathbf{R})\cos\alpha\cos\delta - X), \\ \cos\alpha\cos\delta\, d\alpha - \sin\alpha\sin\delta\, d\delta &= \pi((\mathrm{s} \cdot \mathbf{R})\sin\alpha\cos\delta - Y), \\ \cos\delta\, d\delta &= \pi((\mathrm{s} \cdot \mathbf{R})\sin\delta - Z) \end{aligned}$$

Z dwóch pierwszych równań dostaniemy

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\pi}{15}\sec\delta(X\sin\alpha - Y\cos\alpha), \\ d\delta &= \pi(X\cos\alpha\sin\delta + Y\sin\alpha\sin\delta - Z\cos\delta) \end{aligned} \tag{11.7}$$

Paralaksę π wyrażono w sekundach łuku, zatem $d\alpha$ będzie w sekundach czasowych, $d\delta$ w sekundach łuku.

11.2 Aberacja roczna

Wyprowadzenie poprawki na *aberrację roczną* jest bardzo podobne do poprawki na przesunięcie paralaktyczne. Wyprowadzimy wzory na klasyczną, uproszczoną poprawkę pierwszego rzędu. Szybkość orbitalna Ziemi wynosi $30\,\mathrm{km/s}$ co stanowi 10^{-4} szybkości światła. Oznacza to, że aberracyjne przemieszczenie będzie rzędu 10^{-4} radianów, co odpowiada około $20''$ łuku. Dlatego efekty drugiego rzędu (są one na poziomie 10^{-8} radianów) nie zawsze są zaniedbywalne, szczególnie w precyzyjnych pracach astrometrycznych. Jednak udokładnianie klasycznego podejścia mija się z celem, gdyż efekty relatywistyczne są tego samego rzędu co drugi wyraz rozwinięcia klasycznego.

Na rysunku 11.1, wektor $\mathbf{r}'$ odpowiada kierunkowi, w którym gwiazda X byłaby widziana przez obserwatora znajdującego się w punkcie Z, ale pozostającego w spoczynku względem barycentrum C. Niech kierunek do tej gwiazdy, gdy mamy do czynienia ruchem obserwatora, czyli z aberracją określony jest przez wersor $\mathbf{s}^*$. Stosując wzory pierwszego rzędu na przesunięcie aberracyjne (patrz podrozdział 7.5.2), podstawiając w nich za $\mathbf{V}$ prędkość Ziemi $\dot{\mathbf{R}}$, otrzymamy

$$d\mathbf{s} = \mathbf{s}^* - \mathbf{s}' = -\frac{1}{c}\mathbf{s}' \times (\mathbf{s}' \times \dot{\mathbf{R}}) \tag{11.8}$$

Zmieniając $\mathbf{s}'$ przez jego kierunek barycentryczny $\mathbf{s}$, nie poniesiemy istotnego uszczerbku na precyzji wyznaczanej poprawki, otrzymamy wówczas

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{R}} - (\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s}) \tag{11.9}$$

Jak widać formuła (11.6) różni się od (11.9) tym, że wektor położenia $\mathbf{R}$ zastąpiono w (11.9) pochodną $\dot{\mathbf{R}}$, a paralaksę π przez $1/c$. Dlatego po dokonaniu stosownych zmian w równaniach (11.7), możemy wyrazić aberacyjny przyrost $d\mathbf{s}$ we współrzędnych α, δ jako

$$\begin{aligned} d\alpha &= c^{-1}\sec\delta(\dot{Y}\cos\alpha - \dot{X}\sin\alpha) \\ d\delta &= c^{-1}(\dot{Z}\cos\delta - \dot{X}\cos\alpha\sin\delta - \dot{Y}\sin\alpha\sin\delta) \end{aligned} \tag{11.10}$$

W równaniu (11.10) szybkość światła i składowe $\dot{\mathbf{R}}$ muszą być wyrażone w identycznych jednostkach. W systemie stałych astronomicznych szybkość wyraża się w jednostkach $\mathrm{AU/doba}$. W tych jednostkach

$$c = 173.14 \quad [\mathrm{AU/doba}] \tag{11.11}$$

W powyższym wywodzie milcząco przyjęto, że źródło promieniowania ma prędkość równą zeru względem barycentrum Układu Słonecznego. Co oczywiście nie jest prawdą.

Prędkości gwiazd ujawniają się przecież w ich ruchach własnych, a te są czymś bardzo powszechnym.

A zatem poprawienie obserwowanego położenia gwiazdy na paralaksę i aberrację metodą dopiero co opisaną, nie daje geometrycznej barycentrycznej pozycji na moment obserwacji powiedzmy t_0. Opisana tutaj redukcja daje położenie jakie gwiazda zajmowała o interwał τ wcześniej. Czas τ jest czasem propagacji światła pomiędzy gwiazdą i obserwatorem. W celu otrzymania geometrycznego położenia na moment t_0, musimy do obliczonej podaną wyżej metodą pozycji dodać rezultat iloczynu

$$\tau \cdot \text{ ruch wasny}$$

Poprawka ta nazywana jest *aberracją wiekową*. Ze względu na duże niepewności w pomiarach odległości gwiazd, tym samym i duże niepewności w τ w praktyce poprawka ta nie jest brana pod uwagę. Stąd, przyczynek od aberracji wiekowej tkwi w tym co rozumiemy pod pojęciem barycentryczne położenie gwiazdy.

Poprawka czasu propagacji światła nie może być ignorowana w przypadku ciał z Układu Słonecznego. Dla tych ciał mówimy o tzw. *aberracji planetarnej*, rozumiejąc przez to łączny efekt zmiany geocentrycznego położenia, powodowany zarówno, niezerową prędkością obserwatora jak i źródła. Mamy wówczas pełną poprawkę od miejsca widomego do geometrycznego. Poprawka za aberrację roczną uwględnia jedynie wpływ ruchu środka Ziemi względem barycentrum Układu Słonecznego. ↱

11.3 Przybliżone formuły na paralaksę i aberrację

Przesunięcia paralaktyczne gwiazd nigdy nie przekraczają jednej sekundy łuku. Dlatego w równaniu (11.7), w składowych (X, Y, Z) można ograniczyć się do trzech cyfr znaczących bez poważnego uszczerbku w precyzji wyznaczanych przyrostach $d\alpha, d\delta$. Możemy więc wykorzystać uproszczone formuły na wektor położenia Ziemi $\mathbf{R}$.

Rozróżnienie pomiędzy geocentrum i barycentrum układu Ziemia-Księżyc jak dotąd nie jest nigdy potrzebne, a dla większości gwiazd podobnie ma się sprawa jeśli chodzi o środek Słońca i barycentrum Układu Planetarnego.

Mimośród orbity Ziemi wynosi około $1/60$, i jeśli nie interesują nas paralaksy mniejsze od $0\overset{''}{.}01$ wystarczy przyjąć orbitę Ziemi jako kołową.

Następny krok polega na zastosowaniu współrzędnych ekliptycznych zamiast równikowych. W tych współrzędnych, jeśli $\lambda_\odot$ jest prawdziwą długością Słońca to wektor położenia Ziemi $\mathbf{R}$ ma składowe

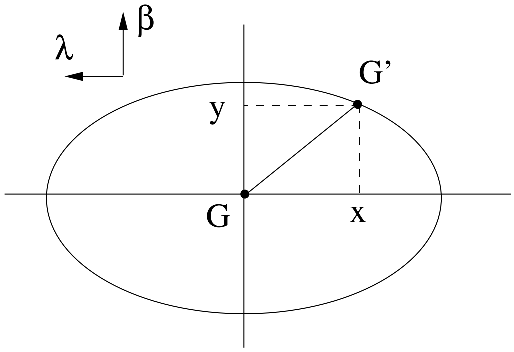
$$\mathbf{R} = (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot, 0) \tag{11.12}$$

Kładąc te składowe do równania (11.7), zastępując (α, δ) przez (λ, β), wówczas zmiany współrzędnych ekliptycznych spowodowane paralaksą opisane będą formułami

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\pi \sec\beta \sin(\lambda - \lambda_\odot) \\ d\beta &= -\pi \sin\beta \cos(\lambda - \lambda_\odot) \end{aligned} \tag{11.13}$$

Niech x i y będą składowymi przesunięcia paralaktycznego gwiazdy w kierunkach równoległym i prostopadłym do ekliptyki (rysunek 11.2),

$$\begin{aligned} x &= -d\lambda \cos\beta \\ y &= d\beta \end{aligned}$$



Rysunek 11.2: Elipsa paralaktyczna, geocentryczne położenie gwiazdy G' w przeciągu roku przemieszcza się po elipsie. Środek elipsy odpowiada barycentrycznemu położeniu gwiazdy.

W okresie roku kąt $(\lambda - \lambda_\odot)$ przebiega wartości z przedziału $[0, 360°]$. Eliminując go z równań (11.13), otrzymamy równanie śladu zakreślonego na sferze przez gwiazdę, obserwowanego ze środka Ziemi w przeciągu roku

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2 \beta} = 1 \tag{11.14}$$

Jest to *elipsa paralaktyczna* o półosi wielkiej π, półosi małej $\pi \sin \beta$ (patrz rysunek 11.2). Półoś wielka jest równoległa do płaszczyzny ekliptyki.

Niskiej precyzji formuły na aberrację roczną otrzymamy w podobny sposób. Ograniczamy się do heliocentrycznej orbity Ziemi uwzględniając jej eliptyczność przez proste podstawienie

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 \tag{11.15}$$

gdzie wektor $\mathbf{V}_0$ to składowa poprzeczna o stałej długości, natomiast $\mathbf{V}_1$ to składowa wektora prędkości ziemi równoległa do półosi małej orbity Ziemi. Z teorii ruchu orbitalnego Ziemi mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= V_0(\sin \lambda_\odot, -\cos \lambda_\odot, 0) \\ \mathbf{V}_1 &= eV_1(-\sin \tilde{\omega}, \cos \tilde{\omega}, 0) \end{aligned} \tag{11.16}$$

gdzie e — mimośród, $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, Ω długość węzła wstępującego, ω długość perihelium orbity Ziemi.

Przyczynki $\mathbf{V}_0$ i $\mathbf{V}_1$ daje się rozpatrywać oddzielnie. Kładąc składową V_0 do równania (11.10), po zamianie (α, δ) na (λ, β) dostaniemy uproszczone formuły na zmiany współrzędnych gwiazdy

$$\begin{aligned} d\lambda &= \kappa \sec \beta \cos(\lambda - \lambda_\odot) \\ d\beta &= \kappa \sin \beta \sin(\lambda - \lambda_\odot) \end{aligned} \tag{11.17}$$

gdzie κ jest bezwymiarowym stosunkiem V_0/c, jest to tzw. stała aberracji. Zgodnie z teorią ruchu orbitalnego Ziemi wynosi ona

$$\kappa = \frac{k}{c} \left[\frac{1 + m}{a(1 - e)^2} \right]^{1/2} \tag{11.18}$$

gdzie k — stała Gaussa, m masa Ziemi, a oraz e — półoś wielka i mimośród orbity Ziemi. Stała κ nie jest stałą absolutną bowiem mimośród e wykazuje drobne wiekowe zmiany. W systemie stałych MUA z roku 1976, wartością κ na epokę $J2000.0$ jest

$$\kappa = 20\overset{\prime\prime}{.}49552 \tag{11.19}$$

Analiza formuł (11.17) ukazuje, że gwiazda wokół swej pozycji heliocentrycznej, opisuje na sferze *elipsę aberracyjną* o półosi wielkiej równoległej do płaszczyzny ekliptyki. Półoś wielka elipsy równa jest κ, mimośród elipsy aberacyjnej wynosi $\kappa \sin\beta$.

Przesunięcie aberracyjne od prędkości $\mathbf{V}_1$ otrzymać można podobnie za pomocą równań (11.10), w rezultacie zmiany współrzędnych ekliptycznych mają postać

$$\begin{aligned} d\lambda &= \kappa e \sec\beta \cos(\tilde{\omega} - \lambda) \\ d\beta &= \kappa e \sin\beta \sin(\tilde{\omega} - \lambda) \end{aligned} \tag{11.20}$$

Wartości te znane są jako tzw. *człony* E aberracji rocznej. Są one niezależne od długości Słońca i stąd nie wykazują zmian rocznych. Składowe przesunięć danych wzorami (11.20) mają amplitudę $\kappa e = 0\overset{\prime\prime}{.}343$, powodują one przesunięcie całej elipsy aberracyjnej o stałą wielkość. Człony E, nie są jednak stałymi absolutnymi dla danej pary (λ, β), wykazują bowiem pewne zmiany wiekowe. ↱

11.3.1 Dygresja historyczna

Do roku 1960 przesunięcie aberracyjne było obliczane zgodnie z tym co powidziano wyżej, bowiem nie odróżniano barycentrum od środka Słońca a wpływy od $\mathbf{V}_0$ i $\mathbf{V}_1$ wyznaczano osobno. W widomych miejscach gwiazd nie uwzględniano poprawek danych wzorami (11.20), poprawki te, zwane członami E, tkwiły w tzw. położeniach heliocentrycznych gwiazd.

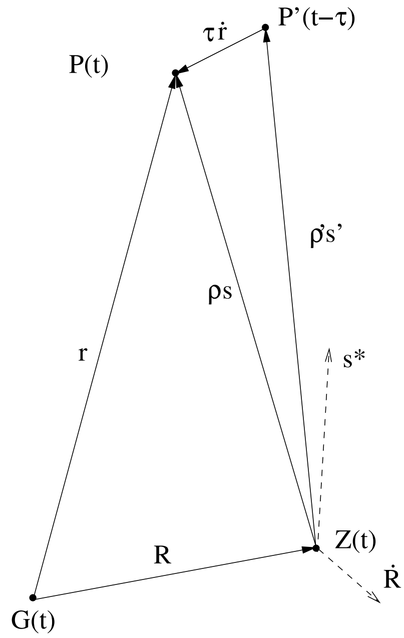
Takie podejście praktykowano zarówno w katalogach gwiazd jak i w rocznikach astronomicznych. Stąd w katalogowych tzw. miejscach średnich gwiazd wcielone były człony E. Roczniki podawały współczynniki dla transformacji od miejsca widomego do średniego, ignorując człon E. Transformacje opierały się jedynie na formule (11.17).

Po 1960, ze względu na wzrost precyzji obserwacji należało dokonać modyfikacji, a więc byłoby pożądanym by w położeniach publikowanych w rocznikach astronomicznych poprawki aberracyjne obliczano według pełnych formuł. Ale jednocześnie w użyciu były stare katalogi, stąd poczyniono jedynie pewien kompromis. Współczynniki aberracyjne obliczano najpierw ściśle, z prędkości Ziemi względem barycentrum, po czym usuwano z nich aberracyjne człony E. W ten sposób można było porównywać średnie miejsca katalogowe z rocznikowymi.

W 1976 roku MUA wydała zalecenie by w przyszłości do miejsc średnich nie włączać aberracyjnych członów E. Zadecydowano też, że aberracja roczna będzie obliczania ściśle, w oparciu o prędkość Ziemi względem barycentrum Układu Planetarnego. Od roku 1984 Astronomical Almanac podaje współczynniki aberracyjne obliczone właśnie w taki sposób. ↱

11.4 Aberracja planetarna

Umownie, *aberracja planetarna* oznacza całkowity wpływ ruchu obserwatora i źródła na położenie dowolnego ciała poruszającego się wewnątrz Układu Słonecznego. Obej-



Rysunek 11.3: Aberacja planetarna. Punkt P odpowiada miejscu geometrycznemu planety, punkt P' miejscu astrometrycznemu, wersor s* wskazuje na położenie planety obserwowane przez obserwatora poruszającego się wraz Ziemią ruchem rocznym.

muje on aberrację roczną powodowaną przez prędkość orbitalną Ziemi, oraz poprawkę powstałą w wyniku ruchu np. planety w czasie interwału τ, od emisji z powierzchni planety kwantu promieniowania do jego rejestracji na powierzchni Ziemi. Wpływ aberracji rocznej dany jest równaniem (11.9), wyrażenie na poprawkę czasu propagacji podane jest poniżej. Zakładamy, że obserwacji planety dokonano w momencie t. Niech na rysunku 11.3 punkty G, Z, P będą położeniami barycentrum, Ziemi i planety odpowiednio, wszystkie położenia w momencie t.

Niech $\mathbf{r}$ i $\mathbf{R}$ będą barycentrycznymi wektorami położeń planety i Ziemi, oznaczmy jeszcze wektor $\vec{ZP}$ przez ρs, $|\mathrm{s}| = 1$. Wektor ρs, daje geometryczny kierunek do planety w momencie t. Oczywiście

$$\mathbf{r} = \rho \mathrm{s} + \mathbf{R} \tag{11.21}$$

Ale obserwowany kwant promieniowania nie został wyemitowany w miejscu P lecz w położeniu P', w którym planeta znajdowała się w momencie $(t - \tau)$.

Oznaczmy wektor $\vec{ZP'}$ przez ρs$'$. Wersor s$'$ określa kierunek do planety poprawiony na aberrację roczną, ale nie na czas propagacji. [2] Przy takich założeniach, mamy sytuację kompatybilną z równaniem (11.8), w którym s* rozumieć należy jako widomy, geocentryczny kierunek do planety. Na podstawie równania (11.8), przesunięcie aberracyjne (wpływ ruchu obserwatora) z wystarczającą dokładnością wynosi teraz

$$d\mathrm{s}' = \mathrm{s}^* - \mathrm{s}' = -c^{-1}\,\mathrm{s} \times (\mathrm{s} \times \dot{\mathbf{R}}) \tag{11.22}$$

gdzie s$'$ zastąpiono po prawej stronie przez s.

[2] s$'$ otrzymano z s* po dodaniu doń poprawki jedynie na aberrację roczną.

Dołóżmy teraz ruch planety, z P' do P w czasie τ. Jeżeli pominiemy w tym interwale przyspieszenie planety, możemy położyć, że wektor $\vec{P'P} = \tau\dot{\mathbf{r}}$, a w konsekwencji

$$\rho'\mathbf{s}' = \rho\mathbf{s} - \tau\dot{\mathbf{r}} \tag{11.23}$$

Przy założeniu $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, jest to dokładne wyrażenie na poprawkę z tytułu czasu propagacji. Mnożąc je dwukrotnie przez s, wykorzystując twierdzenia rachunku wektorowego, otrzymamy

$$(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')\mathbf{s} - \mathbf{s}' = -\frac{\tau}{\rho'}\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{r}})$$

Skoro $\rho' = c\tau$, oraz $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}' \approx 1$, to z dokładnością do rzędu pierwszego, poprawka na czas propagacji ma postać

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s} = c^{-1}\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{r}}) \tag{11.24}$$

Równanie to jest bardzo podobne do równania (11.22) na aberrację roczną, łącząc te dwa równania dostaniemy poprawkę na aberrację planetarną w postaci

$$\mathbf{s}^* - \mathbf{s} = c^{-1}\mathbf{s}\times[(\mathbf{s}\times(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}})] \tag{11.25}$$

Jak widać zmiana położenia planety w efekcie aberracji planetarnej zależy tylko od względnej prędkości Ziemi i planety.

Różniczkując równanie (11.21) mamy

$$\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} = \dot{\rho}\mathbf{s} + \rho\dot{\mathbf{s}}$$

Podstawiając prawą stronę do równania (11.25), zauważając, że $\mathbf{s}\cdot\dot{\mathbf{s}} = 0$, kładąc $\rho \approx \rho' = c\tau$ otrzymamy wyjątkowo prosty wzór

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \tau\dot{\mathbf{s}} \tag{11.26}$$

Poprawka na aberrację planetarną jest wiec wyjątkowo łatwa do obliczenia, łatwiejsza niż wyliczenie każdej z jej składowych z osobna.

Podsumowując, widome miejsce planety obliczamy następująco:

- w kroku pierwszym należy obliczyć jej geocentryczną efemerydę, tzn. współrzędne (α, δ) oraz geocentryczną odległość ρ. Będą to współrzędne odpowiadające wersorowi s. Po czym z wystarczającą dokładnością obliczamy czas propagacji $\tau = \rho/c$,

- w kroku drugim wyliczamy współrzędne widome (α^*, δ^*), w tym celu korzystamy z formuł

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha - \tau\frac{d\alpha}{dt}\\ \delta^* &= \delta - \tau\frac{d\delta}{dt}\end{aligned} \tag{11.27}$$

Problem odwrotny, wyznaczenia barycentrycznego miejsca planety z jej miejsca widomego jest nieco bardziej złożony. Musi on obejmować wyznaczenie orbity planety. W tym celu równanie (11.26) można nieco zmodyfikować, otrzymując wyrażenie na s ze względu na s*, mianowicie

$$\mathrm{s} = \mathrm{s}^* + \tau\dot{\mathrm{s}} \tag{11.28}$$

Główna trudność polega na tym, że czas propagacji nie jest znany *a priori*. Stąd, zanim będzie można obliczyć poprawki z tytułu aberracji planetarnej, trzeba dokonać pewnych oszacowań. W tym celu dokonujemy jeszcze jednego uproszczenia, mianowicie bierzemy współrzędne widome takimi jakimi są i antydatujemy moment obserwacji o pewien interwał τ, i dalej, z co najmniej trzech obserwacji wyznaczamy orbitę planety, po czym obliczamy nową lepszą wartość τ. Porces powtarzamy aż do uzyskania zbieżności rozwiązania na τ.

11.5 Dodatek A. Zadania

1. Dana gwiazda o $\lambda = 270°, \beta = 45°$. Największa zmiana w długości ekliptycznej gwiazdy z powodu rocznej paralaksy wynosi $0\overset{\prime\prime}{.}8$. Ile wynosi największa zmiana w szerokości? Wyznacz momenty w roku, dla których występują maksymalna długość i szerokość, oraz oblicz odległość gwiazdy, przy założeniu kołowej orbi- ty Ziemi.

2. Udowodnij, że istnieją dwa punkty na sferze niebieskiej, dla których efekt rocznej aberracji znika. Pokaż, że ich współrzędne rownikowe dane są w przybliżeniu wzorami

$$\alpha = -\arctan(\cos\varepsilon\cot\lambda_\odot)$$
$$\delta = \pm\arcsin(\sin\varepsilon\cos\lambda_\odot$$

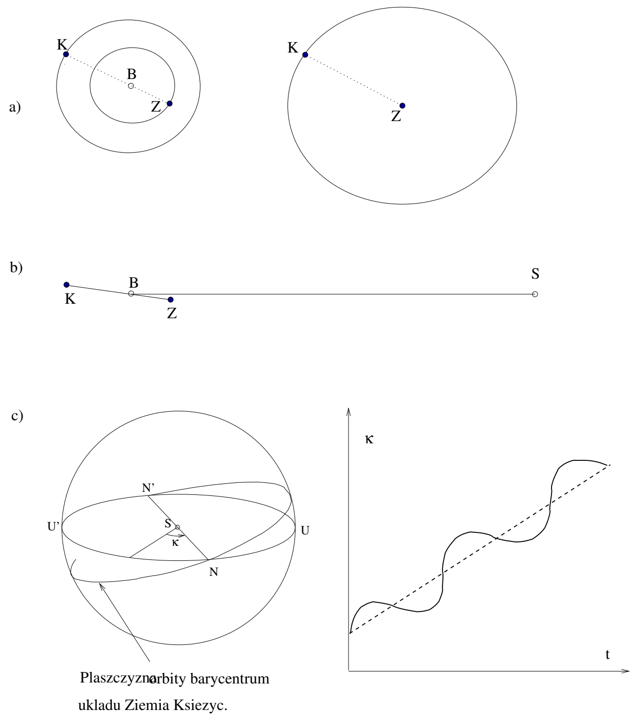
gdzie $\lambda_\odot$ jest prawdziwą długością Słońca.

Rozdział 12

Ruch Ziemi

Streszczenie. Ziemia porusza się, między innymi ruchem orbitalnym i obrotowym. Ruch orbitalny niekiedy traktuje się jako złożenie ruchu pary Ziemia- Księżyc wokół ich barycentrum oraz ruchu barycentrum Ziemi i Księżyca wokół Słońca. Płaszczyznę przechodzącą przez środek Słońca i obracającą się z w tempie wiekowej składowej szybkości rotacji orbity barycentrum Ziemi i Księżyca nazywamy ekliptyką.
Kształt Ziemi przybliżony jest trójosiową elipsoidą zwaną elipsoidą figury Ziemi. Własności dynamiczne bryły charakteryzowane są jej elipsoidą bezwładności, która ujmuje zarówno kształt jak i masę bryły. Odpowiednikiem równań Newtona w ruchu postępowym, są w ruchu wirowym równania Eulera. Rozwiązaniem równań Eulera jest wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, jego kierunek nazywamy chwilową osią obrotu Ziemi, punkty przebicia tej osi z powierzchnią elipsoidy figury Ziemi to chwilowe bieguny Ziemi, punkty przebicia ze sferą niebieską to prawdziwe bieguny świata.
Ruch obrotowy Ziemi rozkładany jest na ruch regularny (precesja) i okresowy (nutacja). Oś ruchu regularnego służy do definicji średnich biegunów świata.
Tzw. ruch biegunów ziemskich dotyczy zmian w położeniu osi obrotu w ciele Ziemi. Obejmuje on kilka drobnych niezależnych ruchów, jednym z nich jest tzw. Chandlerowski ruch biegunów o okresie około 14-tu miesięcy. Poszczególnych przyczynków w ruchu biegunów Ziemi nie da się opisać teoretycznie tak dokładnie jak precesję i nutację osi obrotu bryły ziemskiej.
Słowa kluczowe: ekliptyka (ruchoma, nieruchoma), elipsoida figury, elipsoida bezwładności, równania Eulera, precesja, nutacja, ruch biegunów, biegun średni (prawdziwy, równik średni (prawdziwy), punkt równonocy średni (prawdziwy). [a] ↱

[a] [Modyfikowano AD 2008, kwiecień, 25]



Rysunek 12.1: a) Po lewej naszkicowano barycentryczne orbity Ziemi i Księżyca, po prawej orbitę Księżyca w ruchu geocentrycznym, b) przecięcie płaszczyzny orbity ruchu Ziemi i Księżyca z plaszczyzną rysunku, odcinek BS jest śladem przecięcia płaszczyzny rysunku przez płaszczyznę orbity barycentrum B tych ciał względem Słońca. c) orbita barycentrum B przecina płaszczyznę odniesienia wzdłuż linii węzłów NN', oddaloną o kąt κ od pewnego początku. Ponieważ płaszczyzna ruchu barycentrum B obraca się, linia węzłów przemieszcza się, zmiany w czasie kąta κ pokazano na rysunku obok.

12.1 Ruch obiegowy Ziemi i Księżyca

Ziemia i Księżyc poruszają się w grawitacyjnym polu Słońca i pozostałych masywnych ciał Układu Słonecznego. Wpływ Słońca jest dominujący, wpływ pozostałych planet ma charekter niewielkich zaburzeń.

W teorii ruchu Ziemi i Księżyca ich liniowe rozmiary najczęściej są pomijane, bywa nawet tak, że ruch tych ciał utożsamiany jest z ruchem ich środka masy, barycentrum. Jeśli zaniedbamy odziaływania planet to ruch względem Słońca barycentrum B, Ziemi i Księżyca podlega prawom Keplera, czyli trajektoria ruchu jest elipsą opisaną pięcioma parametrami e, q, ω, Ω, i. Gdy uwzględnimy oddziaływania planet okaże się, że planety ´´spychają´´ barycentrum z orbity keplerowskiej.

Ruch obiegowy Ziemi i Księżyca wokół ich barycentrum odbywa się z pewnym okresem w płaszczyźnie identycznej z płaszczyzną ruchu orbitalnego Księżyca wokół Ziemi. Ruch ten wnosi w obserwowany z Ziemi ruch Słońca okresową składową zwaną **nierównością księżycową**. Płaszczyzna orbity Księżyca nie pokrywa się z płaszczyzną ruchu barycentrum B wokół Słońca (patrz rysunek 12.1a). Dlatego i Ziemia poruszając się wokół barycentrun B, okresowo wychodzi z płaszczyzny jego orbity okołosłonecznej, co łatwo daje się zauważyć gdy obserwujemy z Ziemi widomy ruch Słońca.

Grawitacyjne zaburzenia od planet ujawniają się przede wszystkim w ciągłym obrocie płaszyzny orbity barycentrum B Wielkość tego obrotu można opisać za pomocą kąta κ, liczonego od jakiegoś ustalonego nieruchomego początku. Wówczas, przykładowo, zmiany kąta κ w czasie wyglądałyby tak jak to pokazano na rysunku 12.1c. Linia przerywana opisuje ciągły obrót płaszczyzny orbity barycentrum B. Linia ta może być niewielkim fragmentem sinusoidy o bardzo dużym okresie. Linia ciągła wskazuje na okresowe wahania w tempie zmian kąta κ.

Jeżeli wykluczymy z rozważań zmiany okresowe, wówczas opisywany ruch płaszczyzny barycentrum B (tylko zmiany liniowe) będzie dotyczył pewnej płaszczyzny rotującej z szybkością taką jak średnia prędkość rotacji płaszczyzny orbity barycentrum B. Taka konceptualna płaszczyzna nosi nazwę **płaszczyzny ekliptyki**, a **ekliptyką** nazywamy koło wielkie powstałe jako rezultat przecięcia tej płaszczyzny ze sferą niebieską.

Zdefiniowana w ten sposób ekliptyka porusza się, dlatego można natknąć się na określenia **ekliptyka ruchoma**. Inne określenie to **ekpliptyka chwilowa**, którym określa się ekliptykę ruchomą, której położenie odpowiada jakiemuś szczególnemu momentowi czasu (epoce). Ciąg ekliptyk chwilowych odpowiadających pewnym epokom, niekiedy nazywany jest mianem **ekliptyk nieruchomych** na te epoki. Np. mówimy — ekliptyka nieruchoma 1900.0, ekliptyka nieruchoma epoki 2000.0, ekliptyka daty, czyli ekliptyka na bieżący moment czasu.

Zaburzenia planetarne w ruchu barycentrum Ziemi i Księżyca, nie tylko zmieniają orientację orbity barycentrum. Zmianom ulegają także parametry określające rozmiar i kształt orbity. Najczęściej, okresowe zaburzenia w ruchu Ziemu, przedstawiane są w formie sinusoidalnych poprawek do niezaburzonego ruchu średniego. Poprawek może być bardzo dużo, każda z indywidualnym okresem i amplitudą. W końcu XIX wieku, amerykański astronom **Simon Newcomb** zestawił tablice takich poprawek, uwzględniające nieregularności w ruchu Ziemi wokół Słońca. Newcomb nadał im nazwę "Tablice ruchu Ziemi wokół Słońca". W żargonie astronomów tablice te często nazywane są "Tablicami Słońca". ↱

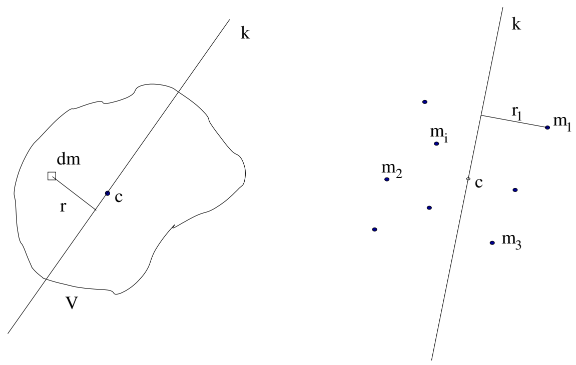
12.2 Ruch wirowy Ziemi

Kolejnym ruchem Ziemi istotnym z punktu widzenia astronomii sferycznej to ruch obrotowy Ziemi. W teorii tego ruchu zakłada się, że bryła Ziemi jest ciałem doskonale sztywnym. W rzeczywistości bryła ziemska nie jest doskonale sztywna, ale mimo tego upraszczającego założenia, uzyskany opis ruchu wirowego Ziemi jest zupełnie dobry.

Uproszczona teoria ruchu wirowego Ziemi nie uwzględnia: sprężystości bryły ziemskiej, sezonowych zmian w rozkładzie mas bryły ziemskiej, strumieni konwekcyjnych we wnętrzu Ziemi, etc. Stąd porównując teorię z obserwacjami zauważamy pewne odstępstwa przewidywań teorii od rezultatów obserwacji, np. zauważalne są niewielkie wahania w prędkości obrotowej. Z drugiej strony odstępstwa te stanowią informację wykorzystywaną do badań szeregu zjawisk geofizycznych. ↱

12.2.1 Elipsoida bezwładności, elipsoida figury

Moment bezwładności I_k ciała rozciągłego (bądź układu N cząstek materialnych) względem osi k przechodzącej przez środek masy ciała (środek masy układu N cząstek) defi-



Rysunek 12.2: Rysunek podpórka do równań definiujących względem osi k, moment bezwładności bryły o objętości V oraz moment bezwładności układu N cząstek materialnych.

niowany jest następująco (patrz rysunek 12.2)

$$I_k = \iiint\limits_V r^2 \rho dv$$

a dla układu N cząstek

$$I_k = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i$$

gdzie ρ jest gęstością ciała, r oznacza odległość od osi k danego fragmentu masy, V jest objętością ciała.

Przez środek masy bryły da się przeprowadzić nieskończenie wiele osi, względem każdej z nich można obliczyć moment bezwładności oraz jego odwrotność. Odwrotności momentów bezwładności można w formie wektorów, w identycznej skali, odłożyć wzdłuż osi względem których zostały obliczone. Przeprowadzając powierzchnię będącą obwiednią końców wektorów uzyskamy bryłę będącą trójosiową elipsoidą, tzw. *elipsoidą bezwładności*. Jak każda elipsoida trójosiowa, elipsoida bezwładności posiada trzy osie główne a, b, c, względem których mementy bezwładności nazywane są *głównymi momentami bezwładności* A, B, C. Moment bezwładności C o największej wartości jest to moment obliczony względem najkrótszej osi elipsoidy bezwładności.

Powierzchnia fizyczna bryły ziemskiej jest bardzo skomplikowana. Pomimo to istnieje zupełnie dobre jej przybliżenie geometryczne — trójosiowa elipsoida — zwana **elipsoidą figury** Ziemi. Jej oś biegunowa nosi miano **osi figury**, a prostopadła do niej płaszczyzna, przechodząca przez środek masy Ziemi, określa **równik figury**. [1]

W teorii ruchu wirowego Ziemi, jako ciała doskonale sztywnego zakłada się, że osie elipsoidy figury Ziemi pokrywają się z osiami elipsoidy bezwładności bryły Ziemi, więcej, że pokrywają się najkrótsze osie obu elipsoid. W rzeczywistości, ruch mas wewnątrz bryły ziemskiej, powoduje niewielkie skręcenie osi elipsoidy bezwładności Ziemi względem elipsoidy figury, dlatego można jedynie twierdzić, że osie elipsoidy figury pokrywają się z pewnym średnim położeniem osi elipsoidy bezwładności.

[1] Wykorzystywane dość szeroko pojęcie równika geograficznego nie ma ścisłego określenia. Wydaje się, że tak naprawdę jego użytkownicy mają na myśli równik figury.

Warto jeszcze wspomnieć, że równikowe osie ziemskiej elipsoidy bezwładności są niemal identyczne, podobnie jest w przypadku elipsoidy figury Ziemi. Stąd bryła ziemska zwykle opisywana jest za pomocą dwuosiowych elipsoid obrotowych.

12.2.2 Równania ruchu wirowego

Ruch wirowy bryły uważamy za opisany w pełni jeżeli na dowolny moment czasu możemy obliczyć składowe wektora kątowej prędkości wirowania bryły.
Niech wektorem prędkości kątowej Ziemi będzie wektor $\vec{\omega} = (\omega_A, \omega_B, \omega_C)$, jego składowe to rzuty prostokątne wektora $\vec{\omega}$ na osie A, B, C ziemskiej elipsoidy bezwładności. Wektor $\tilde{\omega}$ spełnia równania różniczkowe zwane *równaniami Eulera*

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_A + (C - B)\omega_B\omega_C &= M_A \\ B\dot{\omega}_B + (A - C)\omega_A\omega_C &= M_B \\ C\dot{\omega}_C + (B - A)\omega_A\omega_B &= M_C \end{aligned} \tag{12.1}$$

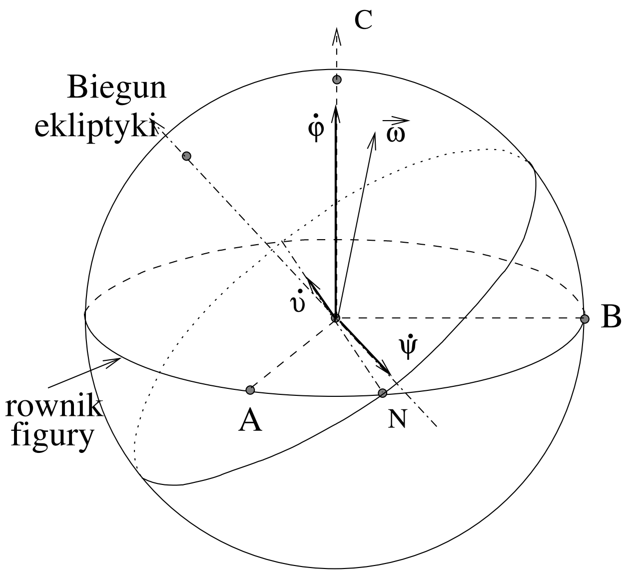
gdzie M_A, M_B, M_C — są to składowe wetora M momentu sił zewnętrznych, wyznaczonego względem środka masy Ziemi. Moment M ma przyczynę głównie w efekcie grawitacyjnego przyciągania równikowych wybrzuszeń elipsoidy figury Ziemi przez Słońce i Księżyc. Ze względu na wirowanie Ziemi oraz na zmiany wzajemnej konfiguracji przestrzennej Ziemi, Słońca i Księżyca — długość wektora M, jego składowe względem osi A, B, C szybko zmieniają się w bardzo złożony sposób. Mimo to, korzystając z teorii ruchu orbitalnego Ziemi i Księżyca można te składowe wystarczająco dokładnie policzyć na dowolny moment czasu. A zatem, na dowolny moment czasu możemy podać rozwiązanie układu równań Eulera.

Wiadomo, że rozwiązanie równania różniczkowego składa się z *rozwiązania ogólnego* (tzn. rozwiązania równania Eulera z prawymi stronami równymi zeru, tzw. równania jednorodne) oraz z *rozwiązania szczególnego* (równania niejednorodne). W przypadku równań Eulera, rozwiązanie ogólne opisuje swobodny ruch bieguna z amplitudą występującą w rozwiązaniu jako parametr, który trzeba wyznaczyć z obserwacji. Rozwiązania szczególne dają składowe $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ wymuszonego ruchu wirowego Ziemi wynikającego z niezerowych składowych wektora mementu zewnętrznych sił.

12.2.3 Oś i składowe ruchu obrotowego Ziemi

Oznaczmy przez $\vec{\omega}$ szczególne rozwiązanie równań Eulera, wektor ten przechodzi przez środek masy Ziemi, jego kierunek nazywa się osią ruchu obrotowego, a ściślej *chwilową osią obrotu* Ziemi. Punkty przecięcia osi wirowania z powierzchnią Ziemi (powierzchnią elipsoidy figury) nazywają się *chwilowymi biegunami* Ziemi, a w przypadku sfery geocentrycznej — biegunami świata lub *prawdziwymi biegunami* świata. Przecięcie z powierzchnią Ziemi płaszczyzny przechodzącej przez środek masy Ziemi i prostopadłej do chwilowej osi obrotu — nazywamy *równikiem chwilowym*. Analogicznie, przecięcie tej płaszczyzny ze sferą niebieską nazywamy *prawdziwym równikiem* niebieskim lub równikiem świata.

Gdyby oś obrotu Ziemi była prostopadła do równika figury Ziemi, czyli gdyby pokrywała się z osią figury, wówczas składowe $\omega_A = \omega_B = 0$. Niestety, rzeczywistość jest bardziej złożona, chwilowa oś wirowania Ziemi nie pokrywa się z osią figury Ziemi, w rezultacie składowe ω_A, ω_B niewiele różnią się od zera.



Rysunek 12.3: Wektor ω chwilowej prędkości wirowania bryły Ziemi rozłożony na składowe: $\dot{\psi}$ wzdłuż kierunku na bieguny ekliptyki, $\dot{\varphi}$ w kierunku bieguna figury C oraz $\dot{\vartheta}$ wzdłuż lini węzłów ekliptyki i równika figury.

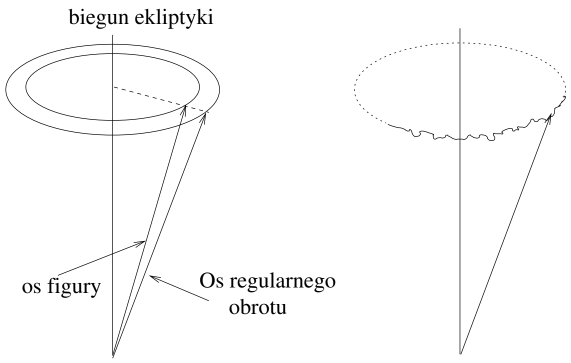
Z równań Eulera możemy wyznaczyć wektor $\vec{\omega}$, a jego składowe wyrazić względem dowolnych osi np. osi związanych z ekliptyką. Postulując, że znane jest położenie osi A, B, C względem osi związanych z ekliptyką, wówczas za pomocą składowych $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ i odpowiednich transformacji obrotu, można wyliczyć składowe wektora $\vec{\omega}$ względem trzech osi ekliptycznych. Osie te mogą być określone dowolnie w szczególności mogą to być osie wzajemnie nieortogonalne, ich wzajemne położenie może zmieniać się w czasie. Może to dziwne, ale dogodną triadą osi okazała się być:

- normalna do płaszczyzny ekliptyki,
- linia przecięcia płaszczyzny ekliptyki z płaszczyzną równika figury Ziemi (linia węzłów równika figury),
- oś C figury Ziemi.

Prostokątne rzuty wektora prędkości obrotowej Ziemi $\vec{\omega}$ na tak wybrane osie oznaczane są przez $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ (patrz rysunek 12.3). Fizyczna interpretacja tych składowych jest następująca:

- $\dot{\psi}$ to szybkość precesji osi C figury ziemskiej względem normalnej do płaszczyzny ekliptyki,
- $\dot{\vartheta}$ powoduje zmianę kąta nachylenia równika figury do ekliptyki,
- $\dot{\varphi}$ jest po prostu szybkością wirowania Ziemi wokół jej osi figury.

W mechanice teoretycznej, składowa $\dot{\varphi}$ nazywana jest szybkością właściwego obrotu, dlatego możemy napotkać takie pojęcia jak oś właściwego obrotu, równik właściwego obrotu. Tempo właściwego obrotu Ziemi $\dot{\varphi}$ jest niewspółmiernie większe od szybkości $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$. Tak właśnie powinno być, bowiem w myśl podstawowej zasady mechaniki bryły,



Rysunek 12.4: Na lewo ilustracja ruchu precesyjnego osi figury i chwilowej osi regularnego wirowania Ziemi, po prawej ilustracja ruchu rzeczywistego osi wiropwania bryły ziemskiej.

jej ruch wirowy odbywa się wokół osi bliskiej osi największego momentu bezwładności, czyli najkrótszej osi elipsoidy bezwładności bryły.

W wyrażeniach na każdą ze składowych $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ tkwią: składnik stały (prawie stały) oraz suma dużej liczby niewielkich wyrazów okresowych. Te ostatnie wyrazy noszą nazwę *nutacji*, chwilowo zostawimy je na boku a zajmiemy się regularnym ruchem wirowym Ziemi. ↱

12.2.4 Regularny ruch obrotowy Ziemi

Stała część składowej $\dot{\psi}$ (pamiętamy, że składowa ta leży wzdłuż normalnej do ekliptyki), nosi nazwę *precesji* w długości. Jej efektem jest jednostajne przemieszczanie osi figury po pobocznicy stożka oraz ruch po ekliptyce linii przecięcia równika z ekliptyką, w kierunku zegarowym, jeśli obserwator obserwuje zjawisko z północnego bieguna ekliptyki (co wobec reguły śruby prawoskrętnej oznacza, że wektor precesji jest skierowany w kierunku południowego bieguna ekliptyki). Tempo precesji w długości wynosi około $50''/rok$.

Stała część składowej $\dot{\vartheta}$ w naszej epoce wynosi w przybliżeniu $0.5''/rok$ i sprawia, że średnie nachylenie równika figury do ekliptyki, niewiele, ale systematycznie zmniejsza się.

Stała część składowej $\dot{\varphi}$ definiuje średni właściwy ruch obrotowy Ziemi. Odbywa się on z okresem bliskim jednej dobie, wokół osi C, antyzegarowo jeśli obserwujemy to zjawisko z północnego bieguna Ziemi.

Chwilowa prędkość regularnego ruchu wirowego Ziemi jest wektorową sumą części stałych składowych $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$. Punkty przecięcia kierunku wektora tej chwilowej regularnej prędkości ze sferą niebieską nazywamy **średnimi biegunami świata** danej epoki. Sprzężone z tymi biegunami koło wielkie nosi miano **średniego równika**.

Jako ciekawostkę podamy tu, że oś regularnego ruchu wirowego powinna zawsze leżeć w jednej płaszczyźnie z normalną do ekliptyki i osią figury, stąd w rezultacie precesji oś figury i regularna chwilowa oś obrotu przemieszczają się w przestrzeni tak jak to pokazano na rysunku 12.4. ↱

12.2.5 Nutacja

Wyrazy nutacyjne w wyrażeniach na składowe $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ zniekształcają nakreślony przed chwilą obraz wirowania Ziemi. Nutacje w $\dot{\psi}$ i $\dot{\vartheta}$ wywołują kołysanie osi figury i regularnej chwilowej osi obrotu Ziemi względem ekliptyki. W rezultacie obie osie w swej wędrówce wokół normalnej do ekliptyki nieustannie odchylają się od pobocznic stożków, a ślady jakie rysują w przestrzeni końce tych osi nie są okręgami jak na rysunku 12.4, ale złożonymi liniami falistymi.

Nutacja w $\dot{\varphi}$ sprawia niewielkie wahania wokół wartości średniej prędkości dobowego wirowania Ziemi.

Szybkości $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ to szybkości przemieszczania się osi figury Ziemi w przestrzeni względem tła gwiazd. W ciele Ziemi oś figury jest nieruchoma.

12.3 Ruch biegunów

Oś wirowania Ziemi nie zachowuje stałego położenia nie tylko względem tła gwiazd, ale także i w ciele Ziemi. Ruch osi wirowania w ciele Ziemi czy odpowiadający mu ruch biegunów po powierzchni Ziemi, obejmuje kilka niezależnych ruchów:

- Swobodny ruch biegunów o amplitudzie 0.5”, definiowany jest jako ogólne rozwiązanie różniczkowych równań ruchu Eulera, czyli przy $M_A = M_B = M_C = 0$, stąd ruch ten nazywany bywa eulerowskim ruchem biegunów. Ze względu na odstępstwa Ziemi od doskonałej sztywności, realny ruch nie zawsze jest podobny do teoretycznych przewidywań. Np. zgodnie z rozwiązaniem ogólnym, chwilowe bieguny powinny przemieszczać się po powierzchni Ziemi z okresem bliskim 305 dni, po okręgach o środkach w tzw. biegunach średnich. Tymczasem ich ruch rzeczywisty trwa około 14 miesięcy (okres Chandlerowski) i wykazuje zmienną amplitudę.

- Druga składowa ruchu biegunów o amplitudzie współmiernej z ruchem eulerowskim, uwarunkowana jest procesami geofizycznymi zachodzącymi we wnetrzu Ziemi i ziemskiej atmosferze. Obserwacje pozwoliły na wykrycie rocznego i półrocznego okresu tego ruchu.

- Istnieją jeszcze składowe ruchu biegunów o okresie doby i o bardzo nikłej amplitudzie (ułamki setnych części sekundy). Przyczyną tych drobnych ruchów jest konieczność ciągłych zmian wzajemnej orientacji osi figury i osi obrotu w ciele wirującej Ziemi (względem otaczającej przestrzeni wzajemna orientacja osi figury i obrotu praktycznie jest stała). Ruch ten wynika głównie z niezerowej wartości składowej $\dot{\psi}$ prędkości obrotowej Ziemi, rezultatu przyciągania Słońca i Księżyca. Dlatego nazwano te ruchy wymuszonym ruchem biegunów (ruchem słoneczno-księżycowym). W wielu zagadnieniach praktycznych (jak np. rachunki redukcyjne) ze względu na niewielkie amplitudy ruchu wymuszonego, mówiąc o ruchu biegunów przyczynek ruchu wymuszonego pomija się.

Ruch biegunów o jakim mowa w tym rozdziale, odzielany jest od precesji i nutacji w pewnym stopniu na zasadzie konwencji. Kierowano się tu tym, że precesja i nutacja mogą być określone precyzyjnie nawet na lata wprzód, czego nie da się w żaden sposób zrobić w wypadku ruchu biegunów. We współczesnym podejściu do ruchów bieguna od takiego rodzielenia odchodzi się.

Dodatkowy niewielki ruch biegunów Ziemi o jakim mowa w tym rozdziale oznacza, że istnieje pewna dodatkowa składowa kątowej prędkości Ziemi. Po dodaniu jej do wektora $\vec{\omega}$, wypadkowy wektor $\vec{\omega}^*$ będzie nowym wektorem prędkości kątowej Ziemi. A skoro tak, to powinniśmy na nowo przedefiniować pojęcia chwilowej osi obrotu Ziemi, chwilowego równika. I faktycznie tak należałoby postąpić, ale ze względu na pewne racje praktyczne tak się nie robi. Dlatego pod pojęciem biegunów chwilowych rozumiemy punkty przecięcia z powierzchnią elipsoidy figury nie przedłużenia wektora wypadkowej prędkości $\vec{\omega}^*$, ale chwilowej osi obrotu pokrywającej się z wektorem $\vec{\omega}$.

Amplitudy wszystkich ruchów biegunów są zmienne, dlatego przemieszczenie chwilowych biegunów Ziemi wokół biegunów średnich odbywa się po nieregularnych krzywych. Problem co należy rozumieć jako bieguny średnie nie ma rozwiązania, które zaakceptowaliby wszyscy zainteresowani. W teorii wirowania Ziemi przez *bieguny średnie* rozumie się bieguny elipsoidy figury Ziemi.

12.4 Punkt równonocy wiosennej

Punkt równonocy wiosennej to punkt przecięcia ekliptyki z równikiem. Obserwując Słońce z barycentrum układu Ziemia Księżyc, widzielibyśmy, że w pobliżu tego punktu Słońce przechodzi z półsfery południowej do północnej. Jak wiemy ekliptyka obraca się na skutek oddziaływania planet, a to oznacza, że w rezultacie, punkt równonocy wiosennej przemieszcza się po równiku. Wiadomo nam, że na skutek przyciągania Słońca i Księżyca również równik świata nie zajmuje stałej orientacji w przestrzeni. W konsekwencji obu zjawisk, punkt równonocy przemieszcza się po ekliptyce i po równiku. Ruch punktu równonocy po równiku i po ekliptyce można rozpatrywać jako rozdzielony na składową regularną — precesję, i okresową — nutację. Precesja L-S oraz precesja planetarna dają pełną precesją punktu równonocy przebiegającą jednostajnie. Punkt równonocy, którego położenie określane jest bez uwzględnienia nutacji — czyli jako przecięcie ekliptyki chwilowej i średniego równika danej epoki — nazywamy *średnim punktem równonocy*.

Nutacja powoduje okresowe wahania *prawdziwego punktu równonocy* określanego jako punkt przecięcia chwilowej ekliptyki z prawdziwym równikiem daty.

Rozdział 13

Precesja i nutacja

Streszczenie. Płaszczyzny kół ekliptyki i równika świata stanowią płaszczyzny odniesienia sferycznych układów współrzędnych. Punkty przecięcia tych kół, czyli punkty równonocy, służą jako początek rachuby współrzędnych sferycznych: rektascensji i długości ekliptycznej. Dlatego wobec zmiennej orientacji przestrzennej równika i ekliptyki, zmianom ulegają zdefiniowane z ich pomocą układy odniesienia a w konsekwencji zmieniają się współrzędne określające położenia ciał niebieskich w tych układach.
Ruch ekliptyki jest rezultatem grawitacyjnego oddziaływania planet na orbitę barycentrum Ziemi i Księżyca i określany jest mianem precesji planetarnej. Ruch równika niebieskiego powodowany jest momentem pary sił pochodzących od Słońca, Księżyca i planet na wirującą bryłę ziemską. Ruch ten można rozdzielić na dwie składowe: na precesję będącą gładkim długo-okresowym ruchem średniego bieguna świata wokół bieguna ekliptyki, i na nutację reprezentującą ruch krótkookresowy prawdziwego bieguna świata wokół bieguna średniego. Termin precesja (precesja ogólna) oznacza superpozycję precesji luni-solarnej i precesji planetarnej.
Zmiany wartości współrzędnych ciał niebieskich spowodowane precesją i nutacją wygodnie jest obliczyć za pomocą rachunku macierzowego. Elementy macierzy precesji $\mathbf{P}$ łatwo otrzymać za pomocą kątów Newcomb'a-Andoyer'a ζ_A, z_A, θ_A. Kąty te zależą od interwału czasu dzielącego epoki t_0 i t wybranych średnich układów odniesienia. Macierz $\mathbf{P}$ umożliwia transformację średnich współrzędnych sferycznych z epoki t_0 w średnie współrzędne na epokę t, i odwrotnie.
Elementy macierzy nutacyjnej $\mathbf{N}$ na wybraną datę np. t, wyliczane są za pomocą katowych wartości $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ nutacji w długości i nachyleniu oraz średniego nachylenia ekliptyki do równika ε_0. Macierz nutacji $\mathbf{N}$ służy do transformacji średnich współrzędnych odpowiadających epoce t we współrzędne prawdziwe na tę samą epokę, i odwrotnie.
Słowa kluczowe: precesja luni-solarna, precesja planetarna, precesja ogólna, nutacja, macierz precesji, macierz nutacji, kąty Newcomb'a-Andoyer'a, nutacja w długości, nutacja w nachyleniu. [a] ↱

[a][Modyfikowano AD 2008, kwiecień 18.]

13.1 Wstęp

W rozdziale tym zajmiemy się zjawiskami precesji i nutacji nieco bardziej szczegółowo niż to miało miejsce wcześnniej. Jak wiemy w wyniku tych zjawisk ulegają zmmianie współrzędne ciał niebieskich, ale są to zmiany spowodowane ruchem biegunów ekliptyki i biegunów równika świata oraz sprzężonych z nimi płaszczyzn ekliptyki i równika. Zatem mamy tu do czynienia ze zmianami układu odniesienia jako całości, a nie z ruchem poszczególnych gwiazd, planet etc.

Podział na precesję i nutację jest arbitralny, dokonano go kierując się wygodą w pracach pozycyjnych. Regularne długoterminowe przemieszczenie biegunów nazwano precesją, nutacją nazwano przemieszczenia krótkookresowe zachodzące wokół średniego położenia bieguna świata.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że gwiazdy na sferze nie wykonują żadnych ruchów a ich współrzędne ulegają zmianom jedynie w wyniku ruchu układu współrzędnych.

13.2 Precesja luni-solarna

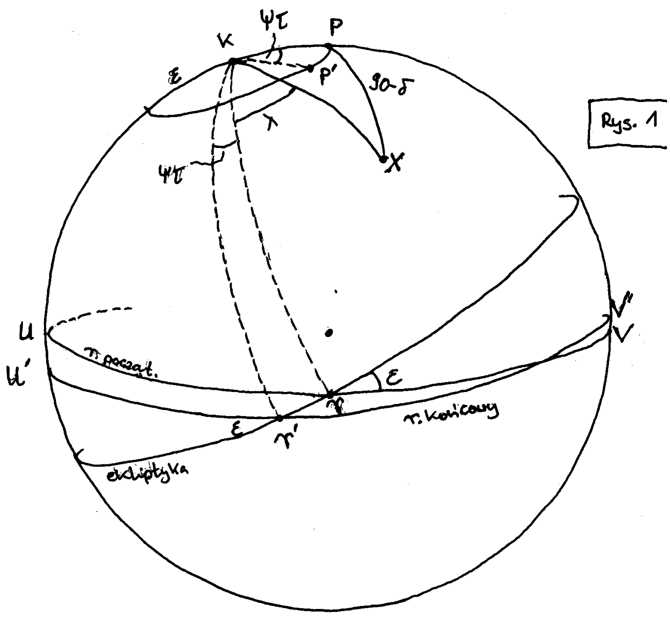
Precesja luni-solarna (L-S) obejmuje jedynie ruch regularny bieguna świata na sferze niebieskiej. Rozważając to zjawisko, o ekliptyce zakłada się, że jest nieruchoma.

Niech na rysunku 14.1 punkt P będzie średnim biegunem świata, K biegunem ekliptyki, Υ średnim punktem równonocy, wszystkie punkty odpowiadają tej samej epoce t. Ponadto, mamy tu następujące ustalenia:

- łuk $KP = \varepsilon$,
- gwiazda w punkcie X ma współrzędne (α, δ), łuk $PX = 90^{\circ} - \delta$, natomiast kąt $KPX = 90^{\circ} + \alpha$,
- w układzie ekliptycznym gwiazda ma współrzędne (λ, β), $KX = 90^{\circ} - \beta$ i $PKX = 90^{\circ} - \lambda$.

Precesja luni-solarna jest dominującym efektem precesyjnym, powoduje ruch bieguna świata wokół bieguna ekliptyki po kole małym PP' w czasie około 26000 lat. Roczne tempo tego ruchu tradycyjnie oznaczane jest przez greckie ψ i wynosi okolo $50''/rok$. Opis ten jest oczywiście przybliżeniem gdyż biegun ekliptyki K nie jest nieruchomy, podlega on tzw. precesji planetarnej, ale w krótkich interwałach czasu podane przybliżenie jest wystarczająco dobre.

W zjawisku precesji luni-solarnej podstawową rolę gra *średni* moment skręcający pary sił, efektu oddziaływania Księżyca i Słońca na równikowe wybrzuszenia bryły Ziemi. W przypadku Słońca, na mocy symetrii kierunek działania tego średniego momentu sił leży zarówno w płaszczyźnie równika jak i w płaszczyźnie ekliptyki, a zatem jest skierowany ku punktowi Υ. Chwilowy moment pędu bryły ziemskiej skierowany jest na biegun świata P. Stąd, średni moment skręcający przemieszcza oś wirowania Ziemi w kierunku zawsze prostopadłym do łuku KP.
Przedstawiona na rysunku 13.2 para sił F_1, F_2, a ściśle ich składowe prostopadłe do płaszczyzny równika, usiłują obrócić Ziemię tak by równik znalazł się w płaszczyźnie ekliptyki. Gdyby równik i ekliptyka pokrywały się składowe sił F_1, F_2 prostopadłe do równika miałyby długość równą zeru. Podobnie jest w przypadku oddziaływania Księżyca. Para sił dąży do ustawienia równika ziemskiego w płaszczyźnie orbity Księżyca. Jednak ze względu na szybki ruch tej płaszczyzny (spowodowany perturbacjami od Ziemi,



Rysunek 13.1: Precesja luni-solarna to ruch średniego bieguna świata P wokół nieruchomego bieguna ekliptyki K.

Słońca, planet) jej położenia względem ekliptyki ciągle ulegają zmianie. Dwa skrajne pokazano na rysunku 13.2. Stąd średnio biorąc, para sił wywołana przyciąganiem wybrzuszeń bryły ziemskiej przez Księżyc, również dąży do ustawienia równika Ziemi w płaszczyźnie ekliptyki.

Niech na rysunku 13.1 punkt P' będzie położeniem bieguna świata w momencie $t+\tau$, zatem kąt $PKP' = \psi\tau$. Nowy równik (widoczny na rysunku 13.1) przebiega przez punkty U', Υ', V'. Punkt Υ' jest nowym punktem równonocy. Ponieważ $PK\Upsilon = P'K\Upsilon' = 90^\circ$, stąd łuk $\Upsilon\Upsilon' = \psi\tau$. Czyli w takim ujęciu, równonoc porusza się po ekliptyce ruchem wstecznym z jednostajną szybkością ψ.

Zmiany współrzędnych gwiazdy, powodowane precesją luni-solarną, są wyjątkowo proste do opisania w układzie ekliptycznych współrzędnych sferycznych. Ponieważ założyliśmy, że biegun ekliptyki K jest nieruchomy, stąd nie mamy żadnych zmian w szerokości ekliptycznej gwiazdy. Z drugiej strony punkt początkowy rachuby długości ekliptycznej zostaje przesunięty o $\psi\tau$ wzdluż ekliptyki, czyli długość ekliptyczna gwiazdy zwiększa się o tą samą wartość. Mamy zatem, że zmiany współrzędnych ekliptycznych z powodu precesji luni-solarnej wynoszą

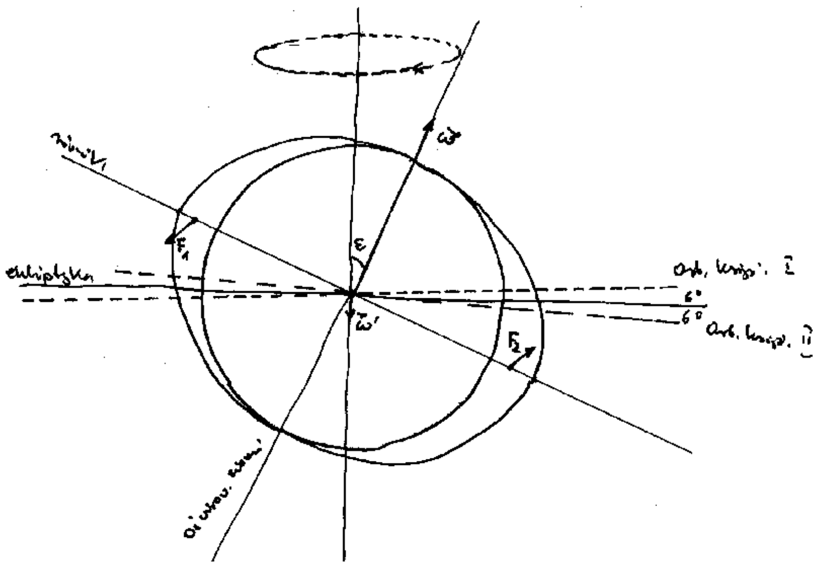
$$\begin{aligned} d\lambda &= \psi\tau \\ d\beta &= 0 \end{aligned} \tag{13.1}$$

Zmiany we współrzędnych równikowych są bardziej złożone. Otrzymamy je rozważając trójkąt PKX z rysunku 13.1. Z wzoru cosinusów mamy

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda$$

Ponieważ rozważamy przemieszczanie się bieguna świata z punktu P do P', to w równaniu powyżej jedynie δ i λ są zmienne, dlatego różniczkując obie strony równania otrzymamy

$$\cos\delta d\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda d\lambda$$



Rysunek 13.2: Zjawiskko precesji bryły ziemskiej można opisać za za pomocą pary sił F_1, F_2, będącej rezultatem grawitacyjnego oddziaływania Słońca i Księżyca na równikowe wybrzuszenia Ziemi. Wypadkowy, średni moment składowych tych sił prostopadłych do płaszczyzny równika, dąży do ustawienia równika Ziemi w płaszczyźnie ekliptyki.

Natomiast stosując do trójkąta PKX wzór sinusów możemy napisać

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \tag{13.2}$$

możemy zatem wyeliminować współrzędne ekliptyczne z poprzednich zależności różniczkowej, i w efekcie będzie

$$d\delta = \psi\tau\sin\varepsilon\cos\alpha \tag{13.3}$$

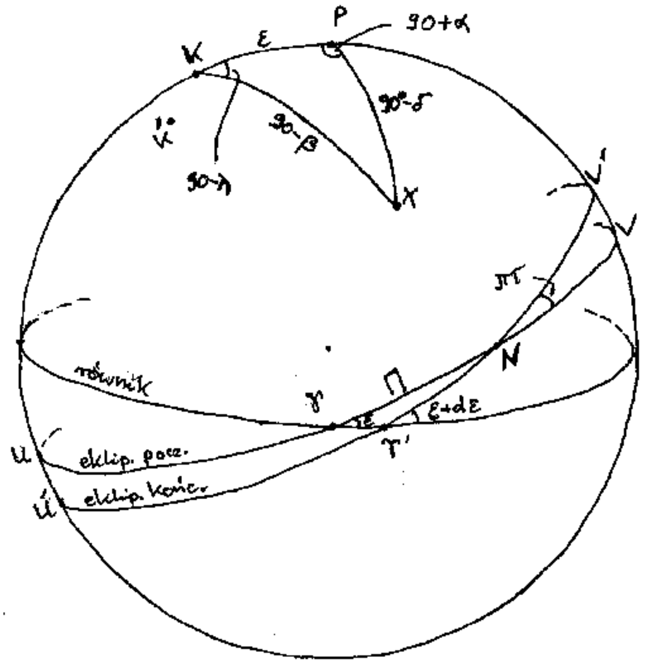
Zmianę w rektascensji otrzymamy różniczkując równanie (13.2). Eliminacji sinusów i cosinusów współrzędnych λ, β dokonać można wykorzystując do trójkąta PKX stosowny wzór pięcioelementowy i dodatkowo równania (13.1) i (13.3). Dostaniemy

$$d\alpha = \psi\tau(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta) \tag{13.4}$$

Równania (13.3) i (13.4) określają jedynie przybliżone precesyjne zmiany w α i δ, dlatego ich stosowalność ograniczona jest do interwałów rzędu jednego roku.

Roczne tempo precesji L-S można wyjaśnić w kategoriach dynamiki Newtonowskiej z małą poprawką relatywistyczną rzędu $\sim 0.02''$, zwaną precesją geodezyjną. Z ogólnej teorii względności wynika bowiem, że inercjalny układ odniesienia w pobliżu orbitującej Ziemi posiada niewielką rotację względem inercjalnego układu heliocentrycznego. Rotacja ta wchodzi do obliczeń ψ.

Wartość ψ zależy od szeregu parametrów jak: dynamiczna figura Ziemi, nachylenie ekliptyki do równika, masy oraz elementy orbit Słońca i Księżyca. W szczególności, ψ jest wprost proporcjonalne do $\cos\varepsilon$, a ponieważ nachylenie ekliptyki do równika wykazuje drobne zmiany wiekowe (z powodu precesji planetarnej) w konsekwencji i ψ zmienia



Rysunek 13.3: Precesja planetarna — ruch bieguna ekliptyki K względem nieruchomego bieguna świata P.

swą wartość. Z teorii precesji wynika. że

$$\psi = 50.''3878 + 0.''0049T \tag{13.5}$$

gdzie T to czas w stuleciach od epoki fundamentalnej J2000, $T = (t - 2000)/100$.

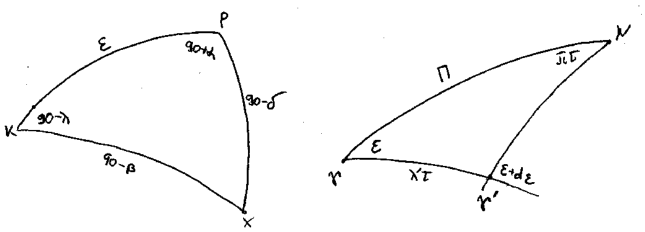
13.3 Precesja planetarna

Planety wywierają zaniedbywalny wpływ na położenie osi rotacji Ziemi. Jednakże perturbacje od planet wyraźnie wpływają na heliocentryczną orbitę Ziemi. Elementy orbity Ziemi zmieniają się w czasie, w szczególności zmian doznaje położenie płaszczyzny orbity.

Ekliptyka zdefiniowana jest jako rezultat uśrednienia płaszczyzny orbitalnej barycentrum układu Ziemia-Księżyc. Jako taka nie podlega wpływom krótkookresowym, a jedynie wiekowym a wynikające z tego zmiany układu odniesienia dają się opisać jako zmiany precesyjne zwane precesją planetarną. I dlatego (z definicji) nie zawierają żadnych członów nutacyjnych.

Rozważmy sytuację z rysunku 13.3, tym razem biegun świata P będzie nieruchomy, K i Υ będą biegunem ekliptyki i równonocą w pewnej epoce początkowej. Niech K', Υ' będą analogicznymi punktami z epoki o niewielki interwał τ późniejszej. "Starą" ekliptyką jest koło $U\Upsilon V$, nową koło $U'\Upsilon'V'$. Te dwie ekliptyki przecinają się w punktach N i N', na rysunku 13.3 pokazano tylko punkt N.

Ruch ekliptyki można przyjąć jako powolny obrót płaszczyzny odniesienia wokół osi NN'. Tempo tego ruchu ($0.''5$ na rok) oznaczamy grecką literą π. A zatem łuk $\Upsilon N \Upsilon' =$



Rysunek 13.4: Powiększenie trójkątów $\Upsilon\Upsilon' N$, PKX, podpórki do wyprowadzenia wzoru na $d\varepsilon$, $d\beta$ oraz $d\lambda$.

$\pi\tau$. Położenie osi obrotu NN' określone jest przez jej długość ekliptyczną (względem ekliptyki początkowej) i oznaczane jest przez Π. Wobec tego $\Upsilon N = \Pi$. Zauważmy też, że N i N' są biegunami łuku KK' jaki biegun ekliptyki zakreśla na sferze niebieskiej.

Precesja planetarna wpływa na (α, δ) gwiazd w sposób bardzo prosty. Ponieważ punkt P jest teraz nieruchomy to $d\delta = 0$, równonoc zaś doznaje przesunięcia po łuku $\Upsilon\Upsilon'$. Długość tego łuku wyrażona jest w formie iloczynu $\lambda'\tau$, gdzie λ' zwana jest roczną precesją planetarną. Zatem w efekcie precesji planetarnej

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\lambda'\tau \\ d\delta &= 0 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Parametr λ' daje się wyznaczyć z trójkąta sferycznego $\Upsilon\Upsilon' N$ z rysunku **??** lub 13.4. Mamy w nim, że:

- $\Upsilon N = \Pi$,
- $\Upsilon\Upsilon' = \lambda'\tau$,
- $\Upsilon N \Upsilon' = \pi\tau$,
- kąt nachylenia ẗarejękliptyki do równika $N\Upsilon\Upsilon' = \varepsilon$,
- $\Upsilon\Upsilon' N = 180^{\circ} - (\varepsilon + d\varepsilon)$.

Ze wzoru sinusów mamy

$$\sin\Pi \sin(\pi\tau) = \sin(\lambda'\tau)\sin(\varepsilon + d\varepsilon)$$

Dla τ dostatecznie małego, gdy $\sin(\pi\tau) \approx \pi\tau$, $\sin(\lambda'\tau) \approx \lambda'\tau$ oraz $\sin(\varepsilon + d\varepsilon) \approx \sin\varepsilon$ będzie

$$\lambda' = \pi \sin\Pi \csc\varepsilon \tag{13.7}$$

Wyznaczymy teraz zmianę nachylenia ekliptyki do równika. Stosując do trójkąta sferycznego $\Upsilon\Upsilon' N$ z rysunku 13.4 wzór cztero-elementowy otrzymamy

$$\cos\varepsilon\cos(\lambda'\tau) = \sin(\lambda'\tau)\cot\Pi + \sin\varepsilon\cot(\varepsilon + d\varepsilon)$$

a po przemnożeniu przez $\sin(\varepsilon + d\varepsilon)$

$$\sin(\varepsilon + d\varepsilon)\cos\varepsilon\cos(\lambda'\tau) - \cos(\varepsilon + d\varepsilon)\sin\varepsilon = \sin(\lambda'\tau)\cot\Pi\sin(\varepsilon + d\varepsilon)$$

Stosując najpierw przybliżenia dla małych kątów $\cos(\lambda'\tau) \approx 1, \sin(\lambda'\tau) \approx \lambda'\tau$, a następnie wykorzystając w lewej stronie równania znaną tożsamość dotyczącą sinusa sumy dwóch kątów, korzystując jeszcze z równania (13.7) otrzymamy

$$\sin d\varepsilon = \pi\tau \cos \Pi \frac{\sin(\varepsilon + d\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$$

a przy założeniach: $\sin d\varepsilon \approx d\varepsilon$ oraz $\sin(\varepsilon + d\varepsilon) \approx \sin \varepsilon$ będziemy mogli napisać

$$d\varepsilon = \pi\tau \cos \Pi \tag{13.8}$$

Możemy teraz, z trójkąta sferycznego KPX z rysunku 13.4, wyprowadzić wzory na zmiany współrzędnych (λ, β) gwiazdy wywołane precesją planetarną. Zmiany te muszą być wyrażone w postaci różniczek np. $d\beta$, zatem potrzeba nam wyrażenia postaci $\sin \beta = \ldots$ lub $\cos \beta = \ldots$, i szczęśliwie, w trójkącie KPX ze wzoru cosinusów mamy

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

Różniczkując to równanie dostaniemy

$$\cos \beta \ d\beta = -(\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha) d\varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta \cos \alpha \ d\alpha$$

Aktualnie "pracujemy"we współrzędnych ekliptycznych dlatego trzeba wyeliminować stąd współrzędne równikowe. I tak, za pomocą równań (13.2) i (13.6) pozbywamy się wyrażeń $\cos \delta \cos \alpha \ d\alpha$, a ze wzoru cosinusów zastosowanego do boku $(90^{\circ} - \delta)$ w trójkącie PKX z rysunku 13.4 usuniemy $\sin \delta$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

wreszcie, pozostając w trójkącie PKX i posługując się wzorem 5-cio elementowym trygonometrii sferycznej, wyrugujemy $\cos \delta \sin \alpha$

$$\sin(90^{\circ} - \delta) \cos(90^{\circ} + \alpha) = \cos(90^{\circ} - \beta) \sin \varepsilon - \sin(90^{\circ} - \beta) \cos \varepsilon \cos(90^{\circ} - \lambda)$$

czyli

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda$$

Podstawiając te wyrażenia do równania na $\cos \beta d\beta$ dostaniemy

$$\begin{aligned} \cos \beta d\beta = -(&\sin \varepsilon \sin \beta \cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \\ &\cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \beta + \cos \beta \cos^2 \varepsilon \sin \lambda) d\varepsilon - \\ &(-\lambda'\tau) \sin \varepsilon \cos \beta \cos \lambda \end{aligned}$$

Po obustronnym podzieleniu przez $\cos \beta$, redukcji podobnych wyrazów, zastosowaniu wzoru jedynkowego otrzymamy

$$d\beta = -\sin \lambda d\varepsilon + \lambda'\tau \sin \varepsilon \cos \lambda$$

a korzystając z równań (13.7) i (13.8), po paru przekształceniach przekonamy się, że

$$d\beta = \pi\tau \sin(\Pi - \lambda) \tag{13.9}$$

Wyrażenie na $d\lambda$, określające zmiany długości ekliptycznej otrzymamy różniczkując równanie (13.2)

$$\cos\beta \sin\lambda d\lambda = \cos\delta \sin\alpha \; d\alpha - \sin\beta \cos\lambda d\beta$$

Czynnik $\cos\delta \sin\alpha$ już wiemy jak wyeliminować, mamy też, że $d\alpha = -\lambda'\tau$. Z kolei $(-\lambda')$ można z gracją zastąpić prawą stroną równania (13.7), natomiast zamiast $d\beta$ możemy wziąć prawą stronę równania (13.9) — zatem, po podstawieniach będzie

$$\begin{aligned}\cos\beta \sin\lambda d\lambda = (-\sin\beta \sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda)\cdot(-\pi\tau\sin\Pi\cdot\frac{1}{\sin\varepsilon}) - \\ \sin\beta\cos\lambda\cdot\pi\tau\sin(\Pi-\lambda)\end{aligned}$$

po wymnożeniu wyrażeń w nawiasach, obustronnym podzieleniu przez $\cos\beta\sin\lambda$, mamy

$$d\lambda = \pi\tau\frac{1}{\sin\lambda}\sin\Pi\tan\beta - \pi\tau\cot\varepsilon\sin\Pi - \pi\tau\tan\beta\cot\lambda\sin(\Pi-\lambda)$$

$$d\lambda = \pi\tau\left[\sin\Pi\tan\beta\cdot\frac{1}{\sin\lambda} - \tan\beta\cot\lambda\sin(\Pi-\lambda) - \cot\varepsilon\sin\Pi\right]$$

w kroku następnym ótwieramy"$\sin(\Pi-\lambda)$ i z pierwszych dwóch składników wyłączamy przed nawias $\tan\beta$

$$\begin{aligned}d\lambda = \pi\tau\left[\tan\beta\left(\sin\Pi\cdot\frac{1}{\sin\lambda} - \sin\Pi\cot\lambda\cos\lambda + \cos\Pi\cot\lambda\sin\lambda\right) - \right. \\ \left. \cot\varepsilon\sin\Pi\right]\end{aligned}$$

po wyłączeniu $\sin\Pi$ z dwóch pierwszych wyrazów w nawiasach okrągłych

$$d\lambda = \pi\tau\left[\tan\beta\left(\sin\Pi\cdot\frac{1-\cos^2\lambda}{\sin\lambda} + \cos\Pi\cos\lambda\right) - \sin\Pi\cot\varepsilon\right]$$

czyli

$$d\lambda = \pi\tau\left[\tan\beta\left(\sin\Pi\sin\lambda + \cos\Pi\cos\lambda\right) - \sin\Pi\cot\varepsilon\right]$$

a dalej mamy

$$d\lambda = \pi\tau[\tan\beta\cos(\Pi-\lambda) - \sin\Pi\cot\varepsilon]$$

Ostatecznie, wpływ precesji planetarnej na współrzędne ekliptyczne gwiazd wyraża się wzorami

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\lambda'\tau\cos\varepsilon + \pi\tau\tan\beta\cos(\Pi-\lambda) \\ d\beta &= \pi\tau\sin(\Pi-\lambda) \end{aligned} \tag{13.10}$$

Kierując się chęcią uproszczenia rysunku **??** naniesiono na nim kąt Π jako kąt ostry. W rzeczywistości punkt N leży w pobliżu punktu równonocy jesiennej i $\Pi \simeq 175°$. Łuk KK' natomiast leży znacznie bliżej południka KP. Różnice te nie mają jednak wpływu na wyprowadzone wyżej rezultaty. Jedynie zmiany nachylenia ekliptyki do równika są inne niż sugeruje rysunek **??**. Aktualnie, nachylenie to w miarę upływu czasu maleje.

Roczne tempo λ' precesji planetarnej wyrażone jest za pomocą parametrów π i Π. Długość Π otrzymuje się metodami mechaniki nieba z badań perturbacji ruchu Ziemi przez planety. Oba parametry nie są stałymi absolutnymi. Szybkość π rotacji płaszczyzny ekliptyki wykazuje zmiany wiekowe. Długość Π oprócz charakterystycznego dla niej przemieszczenia wiekowego z powodu ruchu punktu równonocy doznaje zmian precesyjnych. Parametr ten wymaga precyzyjniejszej definicji aniżeli podana wyżej.

Wartości parametrów Π oraz π dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \Pi &= 174.^\circ 8764 + 0.^\circ 9137T \\ \pi &= 0.''4700 - 0.''007T \end{aligned} \tag{13.11}$$

gdzie T — to czas liczony w stuleciach od epoki J2000.

Parametr λ' (roczna zmiana w rektascensji z powodu precesji planetarnej) oraz ε (nachylenie ekliptyki do równika) z wystarczającą dokładnością dają się policzyć z formuł

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0.''1055 - 0.''0189T \\ \varepsilon &= 23°26'21.''45 - 46.''81T \end{aligned} \tag{13.12}$$

13.4 Precesja ogólna

Podejście jakie zastosowano do opisu precesji planetarnej jest nieco sztuczne. Przyjęto w nim, że równik niebieski jest nieruchomy, ignorując fakt jego ruchu w efekcie precesji luni-solarnej. Mimo tego takie podejście daje pożyteczne rezultaty.

Precesja łączna — tzw. *precesja ogólna* — wynikająca ze zmian położenia zarówno równika jak i ekliptyki może być traktowana jako superpozycja precesji luni-solarnej i planetarnej. Zasada superpozycji będzie jednak ważna jedynie w niewielkim interwale czasu τ.

Rozważmy precesję ogólną we współrzędnych (α, δ) gwiazdy. Dodając równania (13.3) i (13.4) do równania (13.6) otrzymamy

$$\begin{aligned} d\alpha &= \psi\tau(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta) - \lambda'\tau \\ d\delta &= \psi\tau\sin\varepsilon\cos\alpha + 0 \end{aligned}$$

a wprowadzając nowe stałe precesyjne

$$\begin{aligned} m &= \psi\cos\varepsilon - \lambda' \\ n &= \psi\sin\varepsilon \end{aligned} \tag{13.13}$$

mamy

$$\begin{aligned} d\alpha &= m\tau + n\tau\sin\alpha\tan\delta \\ d\delta &= n\tau\cos\alpha \end{aligned} \tag{13.14}$$

Stałe m i n nazywane są roczną perecesją w rektascensji i deklinacji, odpowiednio. Podobnie dla współrzędnych (λ, β), łącząc równania (13.1) i (13.10) dostaniemy

$$\begin{aligned} d\lambda &= p\tau + \pi\tau \tan\beta \cos(\Pi - \lambda) \\ d\beta &= \pi\tau \sin(\Pi - \lambda) \end{aligned} \tag{13.15}$$

gdzie p — jest roczną tzw. precesją ogólną (w długości ekliptycznej).

$$p = \psi - \lambda' \cos\varepsilon \tag{13.16}$$

Stałe m, n, p nie są stałymi absolutnymi bowiem doznają zmian wiekowych. Na podstawie podanych wcześniej formuł można napisać, że

$$p = 50.''2910 + 0.''0222T \tag{13.17}$$

$$\begin{aligned} m &= 3.^s07496 + 0.^s00186T \\ n &= 1.^s33621 - 0.^s00057T = 20.''0431 - 0.''0085T \end{aligned} \tag{13.18}$$

gdzie T — interwał czasu liczony w stuleciach od epoki J2000.

13.5 Ścisłe formuły precesji

Sprowadzenie rezultatów obserwacji, wykonanych w odległych momentach czasu w różnych układach odniesienia, do wspólnego układu określonego na ten sam wybrany momentu czasu (epokę) wymaga zastosowania innych formuł aniżeli (13.14), (13.15).

Rozważmy tego typu transformację dotyczącą współrzędnych równikowych gwiazdy z pewnej epoki t i epoki standardowej t_0. [1] Na rysunku 13.5, punkty P_0 i Υ_0 oznaczają biegun niebieski i punkt równonocy z epoki t_0. Równik dla tej epoki jest kołem wielkim $U_0\Upsilon_0, V_0$. Gwiazda X ma w epoce t_0 współrzędne (α_0, δ_0).

Niech P jest położeniem bieguna niebieskiego w epoce t. Łuk $P_0P = \theta_A$, jest łukiem koła wielkiego, ale nie reprezentuje on trajektorii po jakiej przesuwał się biegun P, łuk ten jedynie jest jej dość bliski.

Ruch bieguna P, kierunek ruchu, przynajmniej na początku odbywał się wzdłuż koła wielkiego $P_0\Upsilon_0$. W konsekwencji kąt $PP_0\Upsilon_0$ będzie małym kątem, dążącym do zera gdy różnica $(t - t_0)$ dąży do zera. Oznaczamy ten kąt przez ζ_A.

W epoce początkowej rektascensja $\alpha_0 = \Upsilon_0 P_0 X$, a więc w trójkącie PP_0X mamy, że $PP_0X = \alpha_0 + \zeta_A$ oraz $P_0X = 90° - \delta_0$.

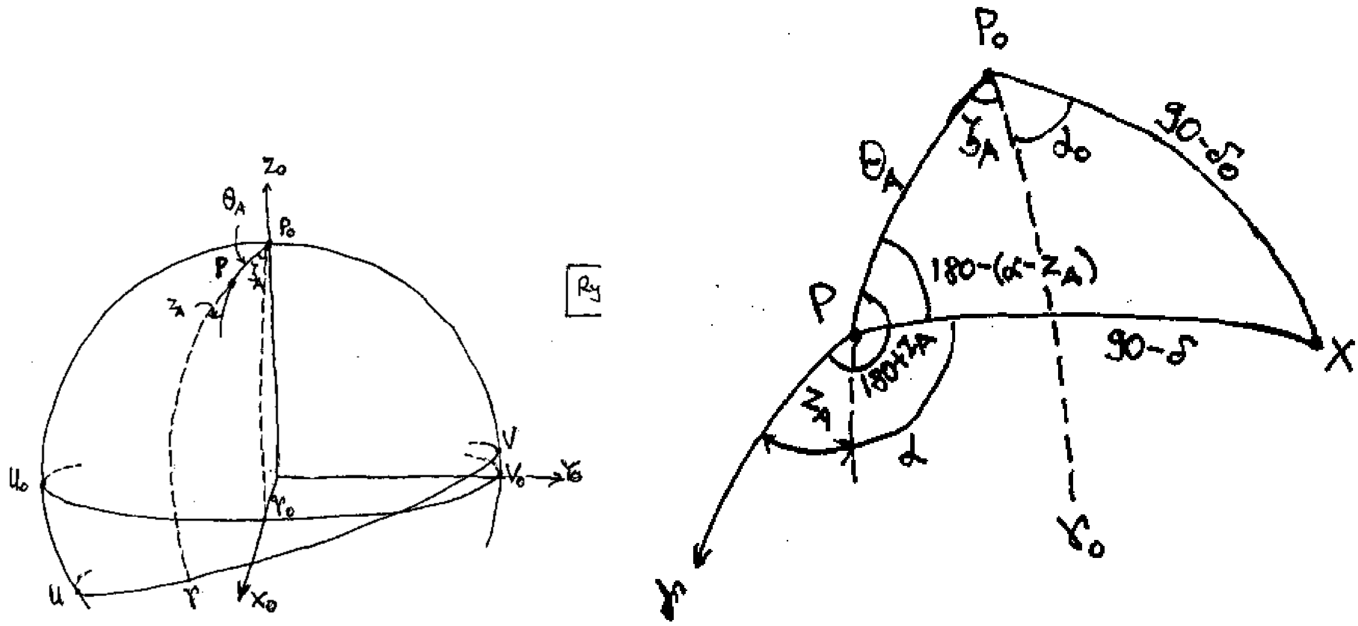
Niech teraz $U\Upsilon V$ będzie równikiem w epoce t, punkt Υ jest nową równonocą. Z przyczyn, dla których kąt $PP_0\Upsilon_0$ uważać można za mały, kąt ΥPP_0 będzie bliski 180°. Mamy zatem, że $\Upsilon PP_0 = 180° + z_A$.

Na rysunku 13.5 mamy, że oba kąty ζ_A, z_A — są to małe kąty dodatnie, a w interwale czasu $(t - t_0)$ są one identyczne co do rzędu pierwszego.

Oznaczmy przez (α, δ) współrzędne gwiazdy X względem nowego równika i równonocy. Mamy $\alpha = \Upsilon PX$, co pociąga $P_0PX = 180° - (\alpha - z_A)$ oraz $PX = 90° - \delta$.

Ustaliliśmy zatem pięć elementów trójkąta sferycznego P_0PX:

[1] Epoki mogą być dowolne, jako standardowe wybrano epoki 1950.0, J2000.0.



Rysunek 13.5: Wpływ precesji na współrzędne równikowe można obliczyć za pomocą kątów Newcomba-Andoyera ζ_A, z_A, θ_A definiujęcych wzajemną orientację układów współrzędnych określonych za pomocą biegunów P i P'.

- $P_0P = \theta_A$,
- $P_0X = 90° - \delta_0$,
- $PP_0X = \alpha + \zeta_A$,
- $PX = 90° - \delta$,
- $P_0PX = 180° - (\alpha - z_A)$.

Możemy teraz powiązać ze sobą współrzędne (α_0, δ_0) z epoki t_0 ze współrzędnymi (α, δ) z epoki t. W wyprowadzonych formułach będą tkwiły parametry kątowe θ_A, ζ_A, z_A. I tak za pomocą trygonometrii sferycznej, słynnego już wzoru 5-cio elementowego, wzoru sinusów i wzoru cosinusów, odpowiednio, mamy

$$\begin{aligned}
\cos\delta\cos(\alpha - z_A) &= \cos\theta_A\cos\delta_0\cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin\theta_A\sin\delta_0 \\
\cos\delta\sin(\alpha - z_A) &= \cos\delta_0\sin(\alpha_0 + \zeta_A) \\
\sin\delta &= \sin\theta_A\cos\delta_0\cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos\theta_A\sin\delta_0
\end{aligned} \tag{13.19}$$

albo wzory odwrotne

$$\begin{aligned}
\cos\delta_0\cos(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos\theta_A\cos\delta\cos(\alpha - z_A) + \sin\theta_A\sin\delta \\
\cos\delta_0\sin(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos\delta\sin(\alpha - z_A) \\
\sin\delta_0 &= -\sin\theta_A\cos\delta\cos(\alpha - z_A) + \cos\theta_A\sin\delta
\end{aligned} \tag{13.20}$$

Wzory (13.19) i (13.20) są ścisłe, nie dokonaliśmy w trakcie ich wyprowadzania żadnych założeń upraszczających. Oczywiście by je zastosować, konieczna jest znajomość kątów

ζ_A, z_A, θ_A, te zaś można uzyskać z teorii precesji ziemskiej osi obrotu. W praktyce są one obliczone za pomocą szeregów potęgowych interwału czasu $(t - t_0)$, o wyrazach do trzeciego rzędu włącznie. Współczynniki szeregów różnią się nieco od epoki do epoki. Dla epoki J2000 mamy formuły

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0^\circ\!.6406161T + 0^\circ\!.0000839T^2 + 0^\circ\!.0000050T^3 \\ z_A &= 0^\circ\!.6406161T + 0^\circ\!.0003041T^2 + 0^\circ\!.0000051T^3 \\ \theta_A &= 0^\circ\!.5567530T - 0^\circ\!.0001185T^2 - 0^\circ\!.0000116T^3 \end{aligned} \tag{13.21}$$

gdzie T jest interwałem $(t - t_0)$ wyrażonym w stuleciach juliańskich (przypomnijmy, że stulecie juliańskie liczy 36525 dni).

Kąty precesyjne ζ_A, z_A, θ_A definiują w pełni położenie bieguna P i punkt równonocy Υ względem ich położeń początkowych, i można z ich pomocą obliczyć zmiany precesyjne współrzędnych `równikowych` gwiazd. Ale znajomość tych kątów nie wystarcza do wyznaczenia odpowiednich zmian we współrzędnych ekliptycznych.

Na rysunku 13.5, w epoce t_0, biegun ekliptyki K_0 leży na kole wielkim P_0U_0 prostopadłym do koła Υ_0P_0. Podobnie można powiedzieć o biegunie K, ale nic więcej. Aby określić położenie bieguna ekliptyki dokładnie, trzeba znać nachylenie ekliptyki do równika. Podamy tu od razu, za teorią precesji, że nachylenie ekliptyki do równika wynosi

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21''\!.448 - 46''\!.815T - 0''\!.001T^2 + 0''\!.002T^3 \tag{13.22}$$

gdzie T — interwał w juliańskich stuleciach od epoki J2000.

Współrzędne ekliptyczne (λ, β) na epokę t można więc obliczyć ze współrzędnych (α, δ) dokonując odpowiedniej transformacji obrotu o kąt ε dany równaniem (13.22).

13.6 Precesyjna macierz obrotu

Wzory (13.19), (13.20) dają się zgrabnie zastąpić prostszymi formułami wyrażonymi w formaliźmie wektorowym. Wówczas transformacje pomiędzy różnymi układami współrzędnych sprowadzają się do transformacji obrotu, do operacji macierzowych na wektorach położeń gwiazd.

Niech s_0 będzie wersorem kierunku gwiazdy o składowych wyznaczonych w układzie współrzędnych prostokątnych równikowych. Osie tego układu określone są za pomocą punktu równonocy i płaszczyzny równika w pewnej epoce t_0. Mamy zatem

$$\mathrm{s}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0 \end{bmatrix} \tag{13.23}$$

Podobnie będzie dla innej epoki t, kierunek do tej samej gwiazdy podany jest wówczas wersorem s

$$\mathrm{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{13.24}$$

Transformację daną równaniami (13.19) można zmodyfikować za pomocą wyrażeń (13.23) i (13.24). W tym celu przepisujemy ostatnią formułę kompletu (13.19) na składową z (przy okazji otwieramy $\cos(\alpha_0 + \zeta_A)$) w postaci

$$z = \sin\theta_A \cos\delta_0 (\cos\alpha_0 \cos\zeta_A - \sin\alpha_0 \sin\zeta_A) + \cos\theta_A \sin\delta_0$$

a korzystając z równań (13.23)

$$z = \cos\zeta_A \sin\theta_A \cdot x_0 - \sin\zeta_A \sin\theta_a \cdot y_0 + \cos\theta_A \cdot z_0 \tag{13.25}$$

W celu napisania odpowiednich wyrażeń na x i y trzeba pokombinować pierwsze dwa z równań (13.19). Zauważając, że [2]

$$\begin{aligned}
x &= \cos\delta \cos(\alpha - z_A) \cos z_A - \cos\delta \sin(\alpha - z_A) \sin z_A \\
y &= \cos\delta \cos(\alpha - z_A) \sin z_A + \cos\delta \sin(\alpha - z_A) \cos z_A
\end{aligned}$$

Wprowadzając tu odpowiednie prawe strony rownań (13.19), np. do równania na współrzędną x

$$\begin{aligned}
x &= [\cos\theta_A \cos\delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin\theta_A \sin\delta_0] \cos z_A - \cos\delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) \sin z_A \\
x &= [\cos\theta_A \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \cos\zeta_A - \cos\theta_A \cos\delta_0 \sin\alpha_0 \sin\zeta_A - \sin\theta_A \sin\delta_0] \cos z_A \\
&\quad - [\cos\delta_0 \sin\alpha_0 \cos\zeta_A + \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \sin\zeta_A] \sin z_A
\end{aligned}$$

Podobny związek możemy uzyskać dla składowej y. Po skorzystaniu z równań (13.23) i dalej po drobnych przekształceniach mamy

$$\begin{gathered}
x = (\cos\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A - \sin\zeta_A \sin z_A) \cdot x_0 - \\
(\sin\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A + \cos\zeta_A \sin z_A) \cdot y_0 - \cos z_A \sin\theta_A \cdot z_0 \\
y = (\cos\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A + \sin\zeta_A \cos z_A) \cdot x_0 + \\
(-\sin\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A + \cos\zeta_A \cos z_A) \cdot y_0 - \sin z_A \sin\theta_A \cdot z_0
\end{gathered} \tag{13.26}$$

Równania (13.25) i (13.26) można wyrazić bardziej elegancko w notacji macierzowej. W tym celu, zauważając, że współczynniki przy x_0, y_0, z_0 są cosinusami kierunkowymi osi nowego układu względem starego, oraz wprowadzając w miejsce (x, y, z) oznaczenia (x_1, x_2, x_3) równania (13.25) i (13.26) można zwięźle napisać jako

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} P_{ij} x_j \tag{13.27}$$

gdzie $i = 1, 2, 3$, natomiast współczynniki P_{ij} są określone wyrażeniami

$$\begin{aligned}
P_{11} &= -\sin\zeta_A \sin z_A + \cos\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A \\
P_{12} &= -\cos\zeta_A \sin z_A - \sin\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A \\
P_{13} &= -\cos z_A \sin\theta_A \\
P_{21} &= \sin\zeta_A \cos z_A + \cos\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A \\
P_{22} &= \cos\zeta_A \cos z_A - \sin\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A \\
P_{23} &= -\sin z_A \sin\theta_A \\
P_{31} &= \cos\zeta_A \sin\theta_A \\
P_{32} &= -\sin\zeta_A \sin\theta_A \\
P_{33} &= \cos\theta_A
\end{aligned} \tag{13.28}$$

[2] Faktycznie łatwo to zauważyć, ale o wiele łatwiej to sprawdzić otwierając kosinusy i sinusy różnicy dwóch kątów.

Grupując elementy P_{ij} w macierz 3×3, transformacja (13.27) może otrzymać postać

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{s}_0 \tag{13.29}$$

gdzie $\mathbf{P}$ nosi miano macierzy precesji.

Transformacja (13.29) jest superpozycją trzech transformacji obrotu. Mianowicie, na rysunku 13.5 można zauważyć, że dokonując obrotu:

- wokół początkowej osi Z o kąt $-\zeta_A$,
- wokół powstałej osi Y o kąt θ_A,
- wokół powstałej osi Z o kąt $-z_A$,

wówczas biegun P_0 przejdzie w biegun P, punkt Υ_0 w punkt Υ. Czyli możemy napisać

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}(-z_A)\mathbf{q}(\theta_A)\mathbf{r}(-\zeta_A)$$

gdzie $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ są macierzami obrotu wokół osi Y i osi Z odpowiednio.

Transformacja odwrotna do (13.29) ma postać

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{s} \tag{13.30}$$

Wobec ortogonalności macierzy obrotu $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ mamy

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T = \mathbf{r}(\zeta_A)\mathbf{q}(-\theta_A)\mathbf{r}(z_A)$$

a więc

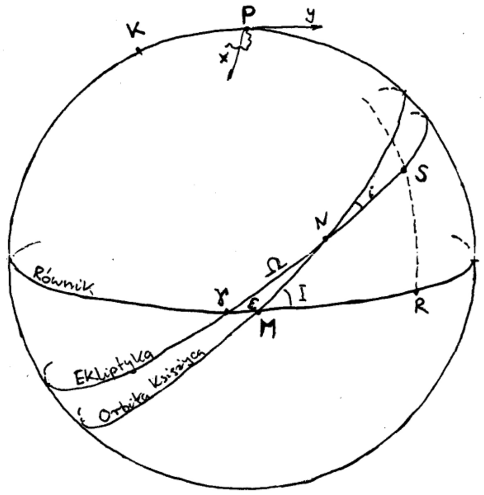
$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{P}^T\mathbf{s} \tag{13.31}$$

13.7 Nutacja

Nie będziemy zajmowali się dynamiczną teorią precesji i nutacji. Są to bardzo złożone teorie wykraczające poza ramy naszego wykładu. Podamy jednak pewne użyteczne komentarze ilustrujące podstawowe aspekty zagadnienia.

Wiemy już, że rzeczywisty ruch bieguna świata po sferze niebieskiej jest bardzo złożony. Z tego też względu rozdzielono go na precesję luni-solarną i nutację. Nutacja obejmuje wszystkie okresowe składowe zmian w położeniu prawdziwego bieguna względem jego położenia średniego.

Wiemy, że przyczyną precesji i nutacji jest moment skręcający pary sił (patrz rysunek 13.2) usiłujący ustawić płaszczyznę równika ziemskiego w płaszczyźnie ekliptyki, wiemy też, że główną przyczyną tego zjawiska są grawitacyjne oddziaływania pomiędzy Ziemią, Księżycem i Słońcem. Precsja L-S to regularny ruch średniego bieguna świata wokół nieruchomego bieguna ekliptyki. Skąd biorą się wyrazy nutacyjne? Rozważmy najpierw moment skręcający pary sił pochodzący od Słońca działający na oś obrotu Ziemi w chwili gdy Słońce znajduje się w położeniu (α_s, δ_s). Z teorii wirowania doskonale sztywnej Ziemi wiadomo nam, że wielkość momentu skręcającego okazuje się być proporcjonalna do $\sin 2\delta_s$. Skoro tak, to moment ten ma charakter okresowy i np. w warunkach równonocy znika.



Rysunek 13.6: Rysunek pomocniczy do dyskusji przyczyn powstawania nutacji bieguna świata.

Skręcający moment sił można wyobrazić sobie jako wektor **k**, który z powodu symetrii rozważanego zagadnienia jest prostopadły do linii Ziemia-Słońce oraz do chwilowej osi obrotu Ziemi. A więc wektor **k** leży w płaszczyźnie równika i jest skierowany ku punktowi o rektascensji $\alpha_s - 90°$. Jego składowe w układzie współrzędnych równikowych określone są z pomocą związku

$$\mathbf{k} = k_0 \sin 2\delta_s[\cos(\alpha_s - 90°), \sin(\alpha_s - 90°), 0]$$

gdzie k_0 oznacza stałą. A zatem

$$\mathbf{k} = 2k_0 \sin\delta_s[\sin\alpha_s \cos\delta_s, -\cos\alpha_s \cos\delta_s, 0] \tag{13.32}$$

Składowe wektora **k** wyrazimy we współrzędnych ekliptycznych. Na rysunku 13.6 narysowano równik, ekliptykę oraz orbitę Księżyca; punkt N jest węzłem wstępującym orbity Księżyca na ekliptyce, punkt M jest węzłem wstępującym tej orbity na równiku. Oznaczmy $\Upsilon NM = i$, $\Upsilon N = \Omega$, $N\Upsilon M = \varepsilon$. Dalej, niech punkt S oznacza położenie Słońca. Zaniedbując eliptyczność orbity Ziemi możemy podstawić $\Upsilon S = \lambda_s = L$, gdzie L — oznacza średnią długość Słońca [3]. Ponieważ szerokość ekliptyczna Słońca wynosi zero (w przybliżeniu oczywiście), standardowe związki pomiędzy współrzędnymi (α_s, δ_s) i (λ_s, β_s) przyjmują postać

$$\begin{aligned} &\cos\alpha_s \cos\delta_s = \cos L \\ &\sin\delta_s = \sin L \sin\varepsilon \\ &\sin\alpha_s \cos\delta_s = \sin L \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{13.33}$$

Kładąc te związki do (13.32) dostaniemy

$$\mathbf{k} = 2k_0 \sin L \sin\varepsilon[\sin L \cos\varepsilon, -\cos L, 0]$$

[3] Mimo wszystko przypomnijmy, że długość planety $L = M + \Omega + \omega$, gdzie M to anomalia średnia.

a dalej

$$\mathbf{k} = k_0 \sin\varepsilon[\cos\varepsilon(1 - \cos 2L), -\sin 2L, 0] \tag{13.34}$$

Wektor momentu pędu ruchu wirowego Ziemi jest skierowany ku punktowi P, czyli ku biegunowi świata (rysunek 13.6). Jak powiedziano wcześniej, moment skręcający $\mathbf{k}$ jest prostopadły do kierunku chwilowej osi obrotu Ziemi i dlatego nie może zmienić długości wektora momentu pędu Ziemi. Może jednak zmienić jego kierunek, a więc położenie bieguna P.

Aby móc dyskutować zmiany tego położenia, czyli śledzić ruch bieguna P, dobrym pociągnięciem jest posłużenie się układem współrzędnych określonym w oparciu o jakieś wybrane, ustalone położenie bieguna. Niech zatem wersor $\mathbf{s}(x, y, z)$ będzie określał położenie bieguna na sferze, względem osi równikowych, określonych za pomocą średniego bieguna i średniej równonocy z epoki początkowej, takiej kiedy to długość Słońca $L = 0$. Wówczas, jako że mamy do czynienia z drobnymi ruchami, składowe wektora $\mathbf{k}$ będą proporcjonalne do $(dx/dt, dy/dt, 0)$, czyli

$$\begin{aligned} dx &= k_0 \cos\varepsilon \sin\varepsilon[1 - \cos 2L] \cdot dt \\ dy &= k_0 \cos\varepsilon \tan\varepsilon[-\sin 2L] \cdot dt \\ dz &= 0 \cdot dt \end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned} dx\tfrac{1}{\sin\varepsilon} &= \psi_1 dt - \psi_1 \cos 2L \cdot dt \\ x \csc\varepsilon &= \psi_1 t - 0.5 \cdot \psi_1 \left(\tfrac{dL}{dt}\right)^{-1} \sin 2L \end{aligned}$$

gdzie $\psi_1 = k_0 \cos\varepsilon$ jest stałą zależną od wielkości wirowego momentu pędu średniego momentu skręcającego i nachylenia ekliptyki do równika.

Po scałkowaniu wszystkich składowych mamy, że po upływie czasu t od momentu odpowiadającego położeniu początkowemu, współrzędne bieguna w przybliżeniu wynoszą

$$\begin{aligned} x \csc\varepsilon &= \psi_1 t - 0.5 \cdot \psi_1 \left(\tfrac{dL}{dt}\right)^{-1} \sin 2L \\ y &= 0.5\psi_1 \tan\varepsilon \left(\tfrac{dL}{dt}\right)^{-1} \cos 2L \\ z &= 1 \end{aligned} \tag{13.35}$$

Wyrażenie $x \csc\varepsilon$ jest przemieszczeniem bieguna w długości, y natomiast opisuje przyrost w nachyleniu ekliptyki do równika. W równaniu (13.35) można wyróżnić różne człony, liniowy ze względu na czas wyraz ψ_1 stanowiący przyczynek od precesji słonecznej (stanowi on około 1/3 wpływu) oraz dwa wyrazy nutacyjne, jeden w długości, drugi w nachyleniu. Oba człony nutacyjne mają okres półroczny. Jeśli czas t wyrazimy w latach to pochodna $dL/dt = 2\pi$ i wówczas równanie (13.35) wiąże amplitudy wyrazów nutacyjnych z tempem precesji słonecznej.

W równaniu (13.35) mogłyby się pojawić dalsze wyrazy pochodzenia czysto słonecznego. Pojawią się one jeśli do odpowiednich formuł wprowadzimy roczne zmiany odległości Ziemi od Słońca, czyli po uwzględnieniu mimośrodu orbity Ziemi np. do wyrazów rzędu pierwszego. Wówczas w wyniku sprzężeń z wyrazem precesyjnym powstaną nowe wyrazy nutacyjne o okresie jednego roku. A wskutek sprzężeń z istniejącymi już członami nutacyjnymi, powstaną dodatkowe dwa człony nutacyjne o okresach roku i czterech miesięcy, itd.

Podobnych rozważań można dokonać dla Księżyca. Korzystając z rezultatów uzyskanych w przypadku Słońca, wektor $\mathbf{k}'$ — czyli moment skręcający pochodzący od Księżyca wyraża się formułą

$$\mathbf{k}' = {k_0}' \sin I[\cos I(1 - \cos 2L'), -\sin 2L', 0] \tag{13.36}$$

gdzie I nachylenie orbity Księżyca do równika, L' jest kątową odległością Księżyca od punktu M, patrz rysunek 13.6.

Równanie (13.36) określa składowe momentu sił pochodzących od Księżyca w układzie związanym z płaszczyzną orbity Księżyca. Stąd zauważmy, że układ współrzędnych (x', y', z') w jakim wyrażono składowe wektora $\mathbf{k}'$, nie jest standardowym układem równikowym. Wprawdzie oś z tego układu jest skierowana na biegun ale oś x skierowana jest do punktu M a nie do punktu równonocy Υ.

Dla równania (13.36) możemy przeprowadzić analogiczną dyskusję jak dla równania (13.34). Czyli po jego scałkowaniu, w rozwiązaniu zauważymy obecność członu quasi-precesyjnego oraz dwóch członów nutacyjnych o okresie wynoszącym połowę miesiąca księżycowego, około 14 dni. Nie będą to jak by się mogło wydawać, największe wyrazy nutacyjne. Są one miejsze od głównych wyrazów słonecznych, mimo iż $k_0' = 2k_0$. Przyczyną jest czynnik księżycowy $(dL'/dt)^{-1}$ (pojawia się on w rezultacie całkowania), który jest blisko 12 razy mniejszy od jego słonecznego odpowiednika.

Okazuje się, że główne wyrazy nutacyjne ruchu bieguna świata tkwią w tym co określono wyżej jako człon quasi-precesyjny. Wyjaśnimy to nieco szerzej. Na rysunku 13.6, węzeł N średniej orbity Księżyca porusza się po ekliptyce ruchem wstecznym z okresem 18.6 lat. Dlatego kierunek osi x', (punkt M), nie jest stały, oscyluje wokół jakiegoś kierunku średniego. Ale ponieważ nachylenie i orbity księżyca do ekliptyki jest nieduże, nieduży będzie zakres tych oscylacji. W konsekwencji, część składowej x' — quasi-precesyjny człon $\psi_1' \cdot \sin I$ w momencie skręcającym $\mathbf{k}'$ wykazuje zmiany zarówno co do wielkości jak i kierunku. Względem osi standardowego układu odniesienia składowe tego członu określone są związkami

$$\mathbf{k}_P = 0.5 \cdot k_0' \sin 2I(\cos \Upsilon M, \sin \Upsilon M, 0) \tag{13.37}$$

Oszacujemy te składowe z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu kąta nachylenia I. W trójkącie sferycznym ΥMN (rys. 13.6) ze wzoru sinusów wynika

$$\sin \Upsilon M \ \sin I = \sin \Omega \ \sin i \tag{13.38}$$

Wobec niewielkiego nachylenia płaszczyzny orbity Księżyca przyjmujemy, że $\varepsilon \approx I$ oraz $\cos \Upsilon M \approx 1$, dlatego z wystarczającą dokładnością będzie

$$\begin{aligned} \sin \Upsilon M &= i \cdot \sin \Omega \csc \varepsilon \\ \cos \Upsilon M &= 1 \end{aligned} \tag{13.39}$$

Ze wzoru czteroczęściowego trygonometrii sferycznej (patrz formuła na rysunku 13.4) można otrzymać

$$\cos \Upsilon M \ \cos \varepsilon = \sin \Upsilon M \ \cot \Omega + \sin \varepsilon \ \cot I$$

Wykorzystując (13.38) i przybliżenie $\cos \Upsilon M \approx 1$ mamy

$$\begin{aligned} &\cos \varepsilon = \sin i \ \sin \Omega \csc I \cot \Omega + \sin \varepsilon \cot I \\ &\sin I \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos I = \sin i \ \cos \Omega \\ &\sin (I - \varepsilon) = \sin i \ \cos \Omega \end{aligned}$$

a z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu

$$I = \varepsilon + i\cos\Omega \tag{13.40}$$

Kładąc otrzymane wyrażenia na ΥM oraz I do równania (13.37) otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_P &= 0.5\ k_0' \sin\left[2(\varepsilon + i\cos\Omega)\right][1, i\sin\Omega\csc\varepsilon, 0]\\ \mathbf{k}_P &= k_0' \sin\left(\varepsilon + i\cos\Omega\right)\cos\left(\varepsilon + i\cos\Omega\right)[1, i\sin\Omega\csc\varepsilon, 0]\\ \mathbf{k}_P &= k_0'[(\sin\varepsilon\cos\left(i\cos\Omega\right) + \cos\varepsilon\sin\left(i\cos\Omega\right))\cdot\\ &(\cos\varepsilon\cos\left(i\cos\Omega\right) - \sin\varepsilon\sin\left(i\cos\Omega\right))][1, i\sin\Omega\csc\varepsilon, 0]\end{aligned}$$

Ponieważ $i\ \cos\Omega$ jest wielkością małą pierwszego rzędu, możemy położyć $\cos\left(i\cos\Omega\right) \approx 1$ oraz $\sin\left(i\cos\Omega\right) \approx i\cos\Omega$. Odrzucając jeszcze wyrazy drugiego rzędu ze względu na $(i\ \cos\Omega)$, uzyskamy

$$\mathbf{k}_P = k_0'(\sin\varepsilon\cos\varepsilon + i\cos\Omega\cos 2\varepsilon)[1, i\sin\Omega\csc\varepsilon, 0]$$

Dalej, po drobnych przekształceniach, ponownym odrzuceniu wyrazów małych dostaniemy

$$\mathbf{k}_P = k_0'[\sin\varepsilon\cos\varepsilon + i\cos\Omega\cos 2\varepsilon,\ i\sin\Omega\cos\varepsilon,\ 0] \tag{13.41}$$

Całkując to równanie otrzymamy wyrażennia na składowe przemieszczenia bieguna względem jego położenia początkowego, kiedy to $\Omega = 0$

$$\begin{aligned}&x\csc\varepsilon = \psi_1' \cdot t + 2\ i\ \psi_1' \cot 2\varepsilon \left(\tfrac{d\Omega}{dt}\right)^{-1} \sin\Omega\\ &y = -i\psi_1' \left(\tfrac{d\Omega}{dt}\right)^{-1} \cos\Omega\\ &z = 1\end{aligned} \tag{13.42}$$

gdzie ψ_1' jest stałą tak dobraną by reprezentowała wyraz precesyjny w długości. Składowe te wyrażone są w układzie współrzędnych o osiach zorientowanych zgodnie z osiami układu równikowego.

Podobnie jak to było dla Słońca, w równaniu (13.42) można zidentyfikować księżycowy człon precesyjny jak i księżycowe wyrazy nutacjne w długości i nachyleniu, ale tutaj mają one okresy 18.6 lat. Są to największe człony nutacyjne, około 10 razy większe od 6-cio miesięcznych członów słonecznych, które jeśli chodzi o wielkość są zaraz na drugim miejscu.

Kończymy dyskusję przebiegu zjawiska nutacji, to co powiedziano wyżej miało na celu ukazanie w jaki sposób powstają najważniejsze człony precesyjne i nutacyjne. Pełna teoria precesji i nutacji jest bardzo skomplikowana i wykracza poza ramy podstawowego kursu astronomii sferycznej.

Jeszcze nie tak dawno teoria nutacji oparta była na modelu sztywnej Ziemi. Równania (13.35) i (13.42) odpowiadają takiemu właśnie podejściu. W roku 1980 opublikowano nową teorię nutacji, którą w dwa lata później zaaprobowała MUA. Teoria ta oparta jest na bardziej realistycznym modelu Ziemi, modelu elastycznym osiowo niesymetrycznym. Jest to tzw. pełna teoria nutacji zawierająca po 106 wyrazów zarówno w długości jak i w nachyleniu. W tej teorii przemieszczenie bieguna świata w długości oznaczone zostało jako $\Delta\psi$, przemieszczenie prostopadłe do niego przez $\Delta\varepsilon$. Przemieszczenia te nazwano nutacją w długości i nutacją w nachyleniu, odpowiednio. W naszej poprzedniej notacji odpowiadają one składowym $x \csc \varepsilon$ i y.

Pełna teoria nutacji podaje formuły na $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$ w formie szeregów postaci

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_1^{106} S_i \sin\left(a_i L + b_i L' + c_i F + d_i D + e_i \Omega\right) \\ \Delta\varepsilon &= \sum_1^{106} C_i \cos\left(a_i L + b_i L' + c_i F + d_i D + e_i \Omega\right) \end{aligned} \tag{13.43}$$

gdzie a_i, b_i, c_i, d_i, e_i są liczbami całkowitymi, S_i, C_i to współczynniki amplitudowe poszczególnych członów nutacyjnych podane w formie tabel (patrz [**?**]), natomiast

- L to średnia długość Księżyca minus średnia długość perigeum orbity Księżyca,
- L' to średnia długość Słońca minus średnia długość preigeum orbity Słońca,
- F jest srednią długością Ksieżyca pomniejszoną o średnią długość węzła orbity Księżyca,
- D jest średnią długością Księżyca minus średnia długość Słońca, czyli średnią elongacją Księżyca od Słońca,
- Ω to długość średniego wstępującego węzła orbity Księżyca na ekliptyce mierzoną od punktu równonocy daty.

Wszystkie parametry L, L', F, D, Ω zmieniają się w czasie.

W teorii z 1980 roku główne człony nutacyjne dyskutowane w tym rozdziale dane są formułami :

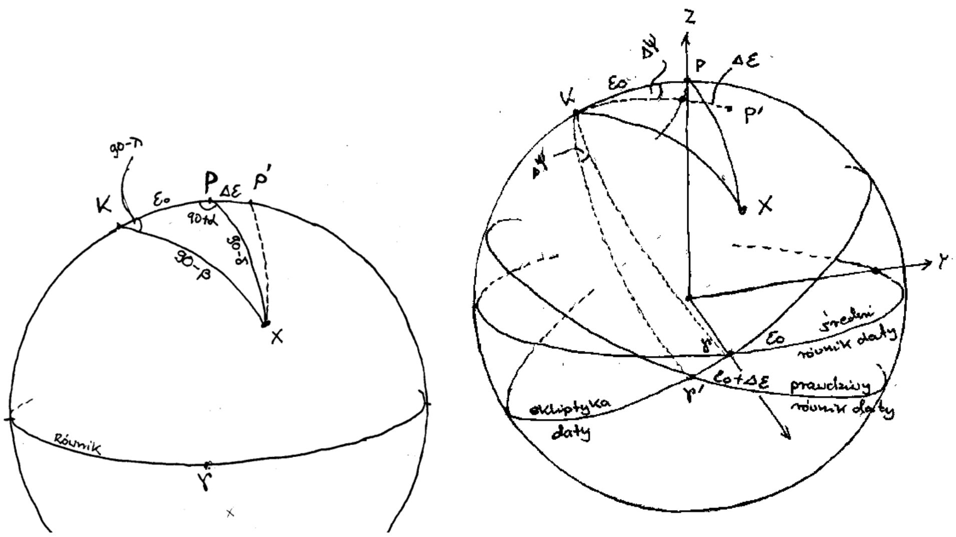
$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17.''1996 \sin\Omega - 1.''3187 \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0.''2274 \sin(2F + 2\Omega) + 0.''2062 \sin(2\Omega) \\ \Delta\varepsilon &= 9.''2025 \cos\Omega + 0.''5736 \cos(2F - 2D + 2\Omega) + 0.''0977\ \cos(2F + 2\Omega) - 0.''0895 \cos(2\Omega) \end{aligned} \tag{13.44}$$

Współczynniki $17.''1996$ oraz $9.''2025$, niekiedy nazywane są `stałymi nutacji`. Wartości ich jak i pozostałych współczynników w równaniu (13.44) odpowiadają epoce J2000.0 .

Niekiedy wygodnym jest podział na długo i krótkookresowe człony nutacyjne. Wyrazy długo-okresowe są to wyrazy niezależne od średniej długości Księżyca, wszystkie te wyrazy mają okresy większe od 90 dni. Pośród wyrazów krótkookresowych nie ma ani jednego o okresie przekraczającym 35 dni. Zsumowane wyrazy krótkookresowe oznaczane są przez $d\psi$ i $d\varepsilon$.

13.8 Wpływ nutacji na współrzędne gwiazd

Na rysunku 13.7a punkt P reprezentuje średni biegun świata, P' biegun prawdziwy, przesunięty względem P jedynie o kąt $\Delta\varepsilon$, K jest biegunem ekliptyki, X oznacza położenie gwiazdy o współrzędnych (λ, β) lub (α, δ) w pewnym momencie czasu JD. Na rysunku 13.7a oznaczono wszystkie znane elemetny trójkąta sferycznego KPX. Zwróćmy jeszcze uwagę na pewne dodatkowe szczegóły rysunku 13.7a, mianowicie, biegun K to biegun ekliptyki pewnej daty JD, jego kątową odległość od średniego bieguna świata tejże daty oznaczono przez ε_0 — tzw. średnie nachylenie ekliptyki do średniego równika daty.



Rysunek 13.7: Rysunek pomocniczy do dyskusji wpływu nutacji na współrzędne ciał niebieskich. a) nutacja wyłącznie w nachyleniu. b) nutacja w długości i nachyleniu.

Stąd w dalszym toku wykładu kąt ε oznancza prawdziwe nachylenie ekliptyki do prawdziwego równika na moment JD. Wielkości te dane są formułami [?]

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''\!.448 - 46''\!.8150\, T - 0''\!.00059\, T^2 + 0''\!.001813\, T^3$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$
$$T = (JD - 2451545.0)/36525$$

W przypadku współrzędnych ekliptycznych wpływy nutacyjne przejawiają się bardzo prosto: do poprawionej na precesję luni-solarną długości ekliptycznej należy dodać $\Delta\psi$ — nutację w długości, szerokość ekliptyczna nie ulega z powodu nutacji żadnym zmianom. Inaczej ma się rzecz w przypadku współrzędnych równikowych. Wpływ $\Delta\psi$ można wydedukować natychmiast z równań (13.3) i (13.4), mianowicie

$$\begin{aligned} d\alpha &= \Delta\psi(\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 \sin\alpha\ \tan\delta) \\ d\delta &= \Delta\psi \sin\varepsilon_0\ \cos\alpha \end{aligned} \tag{13.45}$$

Wpływem $\Delta\varepsilon$ — nutacji w nachyleniu musimy zająć się dodatkowo. Rozważymy go tak jak to pokazano na rysunku 13.7a, kiedy to średni biegun P został przemieszczony do punktu P' jedynie o kąt $\Delta\varepsilon$. Przemieszczenie bieguna z P do P' nie wpływa na bok KX ani na kąt PKX, zatem oznacza to brak wpływu tego przemieszczenia na współrzędne ekliptyczne. Zmiany kąta ε_0 wpływają jednak na współrzędne równikowe gwiazdy. Z trójkąta sferycznego PKX, ze wzoru cosinusów będzie, że

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon_0 + \cos\beta\sin\varepsilon_0\sin\lambda \tag{13.46}$$

Obliczając różniczki tego równania (λ, β są niezmienne) mamy

$$\cos\delta\ d\delta = (-\sin\beta\sin\varepsilon_0 + \cos\beta\cos\varepsilon_0\sin\lambda)\ \Delta\varepsilon$$

gdzie celowo różniczkę $d\varepsilon$ zastąpiono przyrostem $\Delta\varepsilon$. Wyrażenie w nawiasie daje się wyeliminować za pomocą 5-cio elementowego wzoru trygonometrii sferycznej, z którego wynika, że

$$-\cos\delta\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon_0 - \cos\beta\sin\varepsilon_0\sin\lambda \tag{13.47}$$

i stąd

$$d\delta = \Delta\varepsilon \sin\alpha$$

Wzór sinusów zastosowany do trójkąta PKX daje związek na rektascensję

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta \tag{13.48}$$

Po jego zróżniczkowaniu dostaniemy

$$\sin\alpha\cos\delta\ d\alpha + \cos\alpha\sin\delta\ d\delta = 0$$

Kładąc tu formułę na $d\delta$ otrzymamy wyrażenie na przyrost w rektascensji. Łączny rezultat wpływu nutacji w nachylemiu $\Delta\varepsilon$ na współrzędne równikowe, ma postać

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\Delta\varepsilon\ \cos\alpha\tan\delta \\ d\delta &= \Delta\varepsilon\sin\alpha \end{aligned} \tag{13.49}$$

Wzory (13.45) i (13.49) są wzorami pierwszego rzędu, ale ponieważ kąty nutacyjne są niewielkie, można wykorzystywać je niemal we wszystkich przypadkach. Całkowity wpływ nutacji można brać jako prostą superpozycję tych dwóch zestawów wzorów.

We współczesnej praktyce wpływy nutacji najczęściej uwzględnia się w formaliźmie macierzowym. Niech $\mathbf{s} = (x, y, z)$ będzie wersorem kierunku do gwiazdy, określonym względem kartezjańskich osi zdefiniowanych za pomocą średniego bieguna i średniej równonocy na daną datę JD. Składowe tego wersora określone są za pomocą równania (13.24), dla wygody przepisanego pniżej

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}$$

Niech $\mathbf{s}'$ będzie wersorem tego samego kierunku, ale określonym w oparciu o prawdziwy równik i prwdziwy punkt równonocy na daną datę JD. Na rysunku 13.7b łatwo zauważyć, że transformacja składowych wersora $\mathbf{s}$ określonych względem średniego układu współrzędnych do układu prawdziwego, wymaga złożenia trzech transformacji obrotu. Mianowicie:

- obrotu wokół osi x układu równikowego średniego o kąt ε_0, przechodzimy wówczas do średniego układu ekliptycznego daty JD,
- następnie obrotu wokół osi z średniego układu ekliptycznego o kąt $(-\Delta\psi)$, jesteśmy wówczas w prawdziwym układzie ekliptycznym daty JD,
- obrotu wokół osi x prawdziwego układu ekliptycznego o kąt $(-\varepsilon)$, co daje nam prawdziwe współrzędne równikowe — czyli składowe wersora $\mathbf{s}'$ na datę JD.

Zatem powiązania wersorów $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}'$ można dokonać za pomocą rachunku macierzowego

$$\mathbf{s}' = \mathbf{N}\ \mathbf{s} \tag{13.50}$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}(-\varepsilon)\mathbf{r}(-\Delta\psi)\mathbf{p}(\varepsilon_0) \tag{13.51}$$

lub

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\psi, & -\sin\Delta\psi\cos\varepsilon_0, & -\sin\Delta\psi\sin\varepsilon_0 \\ -\sin\Delta\psi\cos\varepsilon, & \cos\Delta\psi\cos\varepsilon\cos\varepsilon_0+\sin\varepsilon\sin\varepsilon_0, & \cos\Delta\psi\cos\varepsilon\sin\varepsilon_0-\sin\varepsilon\cos\varepsilon_0 \\ -\sin\Delta\psi\sin\varepsilon, & \cos\Delta\psi\sin\varepsilon\cos\varepsilon_0-\cos\varepsilon\sin\varepsilon_0, & \cos\Delta\psi\sin\varepsilon\sin\varepsilon_0+\cos\varepsilon\cos\varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

13.9 Łączny wpływ precesji i nutacji w formaliźmie macierzowym

W notacji macierzowej możemy napisać wyrażenie uwzględniające łączny wpływ precesji i nutacji. Niech s_0 będzie wersorem położenia gwiazdy względem średniego równika i równonocy z pewnej epoki standardowej, np. J1950.0. Wówczas wersor położenia gwiazdy względem średniego układu daty JD, uzyskamy za pomocą formuły (13.29) jako

$$\mathrm{s} = \mathbf{P}\mathrm{s}_0$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest precesyjną macierzą obrotu. Współrzędne prawdziwe tej gwiazdy na datę JD dostaniemy za pomocą równania (13.50), a więc

$$\mathrm{s}' = \mathbf{N}\,\mathrm{s} = (\mathbf{NP})\,\mathrm{s}_0 = \mathbf{R}\,\mathrm{s}_0 \tag{13.52}$$

Macierz $\mathbf{R} \equiv \mathbf{NP}$ jest także macierzą obrotu pozwalającą na jednoczesne uwzględnienie precesji i nutacji. Jej elementy publikowane są w corocznych wydaniach niektórych roczników astronomicznych.

Transformacja odwrotna, od współrzędnych prawdziwy daty JD do współrzędnych średnich daty JD, otrzymamy bez trudu z równania (13.52) działając na obie jego strony, lewostronnie, macierzą odwrotną $\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathrm{s}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\,\mathrm{s}_0 = \mathrm{s}_0 \tag{13.53}$$

A szczęśliwie, wobec ortogonalności macierzy obrotu mamy

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = (\mathbf{NP})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{N}^T \\ &\mathbf{P}^T = \mathbf{r}(\zeta_A)\mathbf{q}(-\theta_A)\mathbf{r}(z_A) \\ &\mathbf{N}^T = \mathbf{p}(-\varepsilon_0)\mathbf{r}(\Delta\psi)\mathbf{p}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{13.54}$$

13.10 Dodatek A. Zadania

1. Gwiazda Polarna ma współrzędne $\alpha = 2^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}54^{\mathrm{s}}.6$, $\delta = 89^\circ.11'39''$ na epokę J1984.5. Stosując wzory pierwszego rzędu oblicz współrzędne tej gwiazdy na epokę J1985.0 .

2. Pokaż, że dla krótkich interwałów czasu τ można przyjąć, że

$$\begin{aligned} &m\,\tau = \zeta_A + z_A \\ &n\,\tau = \theta_A \end{aligned}$$

3. Oblicz kąty precesyjne ζ_A, z_A, θ_A w celu transformacji współrzędnych od epoki standardowej J2000.0 do epoki J1985.0.

4. Pokaż, że wszystkie pozadiagonalne elementy precesyjnej macierzy obrotu są małe, diagonalne natomiast są bliskie jedności. Udowodnij, że

$$P_{12} + P_{21} = 2\sin^2(\theta_A/2) \cdot \sin(\zeta_A - z_A)$$

Rozdział 14

Koncepcja czasu w astronomii

14.1 Streszczenie

W astronomii czas odgrywa szczególną rolę. W odróżnieniu od np. fizyka, astronomowi nie wystarcza tylko zegar, czy jak kto woli chronometr odmierzający precyzyjnie krótkie interwały czasu. Astronomowie podobnie jak historycy, potrzebują skali czasu czyli sposobu przyporządkowania zdarzeniom na osi czasu punktu, czyli daty. Do współcześnie wykorzystywanych skal czasu należą: średni czas gwiazdowy w Greenwich, średni czas słoneczny UT1, czas koordynowany UTC. W definicjach pierwszych dwóch skal wykorzystywane jest zjawisko ruchu wirowego Ziemi i z tego powodu są to skale czasu niejednostajnego.
W celu utworzenia skal czasu biegnącego równomiernie posłużono się koncepcją czasu dynamicznego. Istnieje szereg realizacji tej koncepcji jak: czas efemerydalny ET, czas układowy geocentryczny TCG, czas układowy barycentryczny TCB. Obecnie najważniejszą rolę gra czas atomowy TAI. Jest to skala oparta o zjawiska atomowe a jej jednostką jest sekunda, fundamentalna jednostka układu SI.
Pomiędzy skalami czasu można określić bardziej lub mniej precyzyjne związki pozwalające na transformację daty z jednej skali do drugiej. Przy współczesnej dokładności pomiaru czasu nie stwierdzono rozbieżności pomiędzy skalami ET, TT i TAI. Dlatego skale te różnią się jedynie o stałą zwaną offsetem.
Skala TCB została tak zdefiniowaną, że różni się od TCG wyrazami wiekowym i okresowymi oraz poprawkami relatywistycznymi zależnymi od ruchu obserwatora i geocentrum względem barycentrum Układu Słonecznego.
Różnica skal czasu ET i UT1 nie może być podana precyzyjnie z wyprzedzeniem. Przyczyną tego są nieregularności w rotacji ziemskiej, których obecnie nie możemy precyzyjnie przewidywać.
W praktyce astronomicznej datę (zwaną niekiedy epoką) piszemy w formie roku z ułamkiem. Możemy podać ją jako rok Bessel'a lub rok Juliański. Inny sposób oparty na ciągłej rachubie dni nazywany jest datą Juliańską.
Słowa kluczowe: zegar, skala czasu, data, czas gwiazdowy, czas słoneczny, czas efemerydalny, UT1, UT2, UTC, południk efemerydalny, czas własny TDT, TT, skale czasu układowego TCG, TDB, TCB, czas atomowy TAI, rok zwrotnikowy, rok Bessel'a, epoka B1950, epoka J2000, data juliańska. [a]

[a][Modyfikowano AD 2006, Grudzień 19.]

14.2 Służba czasu

W naukach przyrodniczych niczego nie mówi się o naturze — istocie czasu. Jest natomiast mowa o czasie jako o pewnej koncepcji czegoś, co można mierzyć, rejestrować np. za pomocą regularnie powtarzających się zjawisk fizycznych. [1] Z życia codziennego wiemy, że aby posługiwać się czasem potrzebujemy zegara, a mówiąc ścislej potrzebna jest skala czasu. Utrzymywanie skali czasu — jej przechowywanie wymaga szczególnej postawy, a nawet pewnego poświęcenia. Dlatego w astronomii jest mowa o służbie czasu, dla podkreślenia szczególnej atmosfery badań panującej w laboratoriach czasu.

Na dowód powyższego, przypomnijmy znaną w kręgu poznańskich astronomów anegdotkę, której głównym bohatarem jest dr Ireneusz Domiński, niestety nieżyjący już pracownik Laboratorium Służby Czasu PAN w Borowcu. Otóż w dniu jego imienin, panu Ireneuszowi koledzy urządzili niezłego figla. Pan Ireneusz zamieszkiwał na terenie obserwatorium w Borowcu i w noc poprzedzającą jego imieniny spał sobie w najlepsze snem sprawiedliwego. Tymczasem koledzy pełniący dyżur obserwacyjny, punktualnie o godzinie 24 czasu środkowo europejskiego nawiedzili mieszkanie pana Ireneusza wszczynając alarm — "Domiński! Bój się ty! Zegary stoją! Padło zasilanie!" Na co pan Ireneusz — tak jak stał w piżamce i w pantofelkach — skoczył biegiem do laboratorium. A tu niespodzianka! — oczekujące go uśmiechniete koleżnki i koledzy składają mu serdeczne życzenia imieninowe, po czym całe towarzystwo śpiewa solenizantowi tradycyjne "Sto lat".

W tym rozdziale podamy kilka określeń wykorzystywanych w celu uproszczenia omawianych zjawisk i problemów.

Zegar. Zegarami mogą być wszelkie zmieniające się w ustalony sposób zjawiska fizyczne. Zmienność ta może mieć charakter narastający, okresowy, ważne jest jedynie to by była dobrze określona. Tak zdefiniowany zegar nadaje się do użytku o ile znamy funkcję określającą względem czasu stan zjawiska leżącego u podstawy działania zegara.

Pomiar czasu sprowadza się do odczytu, zatem zegary muszą dać się odczytać i dlatego są wyposażone w układy wskaźnikowe. Zegary oparte o zjawiska periodyczne, dla uniknięcia wieloznaczności posiadają systemy zliczające drgania.

Posługiwanie się zegarami ma długą historię. Od bardzo dawna posługiwano się zegarami opartymi o zjawiska astronomiczne jak ruch wirowy Ziemi (doba), ruch orbitalny Ziemi wokół Słońca (rok) czy też ruch orbitalny Księżyca względem Ziemi (miesiąc). Wszystkie te zegary nie posiadają systemu zliczającego, dlatego zastępował go człowiek swoją pamięcią i wszelkimi środkami, które mogły ją wspomagać. W celu dokładniejszego odczytu wskazań zegarów konstruowano najróżniejsze przyrządy pomiarowe, od zegara słonecznego poczynając. W czasach współczesnych zegarem wzorcowym jest zbiór zegarów atomowych tworzących międzynarodową skalę czasu atomowego TAI.

Skala czasu. Pojęcie skali czasu dotyczy sposobu przyporządkowania daty wydarzeniom — umieszczanie zdarzeń na podziałce czasu. Mamy różne skale czasu, są one realizowane przez zegary, które nie zawsze muszą być wzorcami czasu. Istnieją też skale czasu tworzone przez pewne przekształcenia skal realizowanych przez pojedyńcze zegary lub przez grupy zegarów. Mówimy wtedy, że są to "papierowe skale czasu", realizowane przez zegary "papierowe", istniejące tylko na papierze.

Między sobą skale czasu różnią się:

- epoką, czyli początkiem rachuby czasu,

[1]Skoro taka rejestracja, czyli pomiar polega na uważnej obserwacji danego zjawiska okresowego, to czy nie jest tu już wcześniej wymagana koncepcja czasu, pojęcia które właśnie usiłujeny uchwycić?

- jednostką czasu.

Istnieją zegary a więc i skale czasu o zmiennej jednostce czasu. Są nimi np. prawdziwy czas słoneczny, prawdziwy czas gwiazdowy, czas UT0, czas UT1. Trzeba tu rozróżnić zmienność jednostki czasu, która daje się precyzyjnie modelować od zmienności nie poddającej się modelowaniu. W pierwszym wypadku wystarczy znaleźć odpowiednie zależności by utworzyć papierową skalę czasu jednostajnego, w drugim przypadku jest to niemożliwe.

Określenie stopnia zmienności jednostki czasu zegara wiąże się z dokładnością jej wyznaczenia i z interwałem uśredniania. Przy bardzo małych dokładnościach, większość zegarów ma stałą jednostkę.

Data. Pod pojęciem daty jakiegoś wydarzenia należy rozumieć podanie momentu tego zdarzenia w ramach którejś ze skal czasu. Data jest współrzędną na osi czasu. Jest ona związana z całką funkcji jednostki czasu określającej zegar. Stąd by dokonać datowania niezbędne jest więc ustalenie stałej całkowania, punktu zerowego skali, tzw. epoki. [2]

Interwał jednoznaczności. Zegary mają na ogół urządzenia wskaźnikowe o ograniczonej pojemności cyfrowej. Może to spowodować, że odczytana wartość wskazania zegara jest wieloznaczna. W wielu produkowanych mechanizmach zegarowych interwałem jednoznaczności jest okres 12 godzin i gdy taki mechanizm wykorzystuje się do wskazywania czasu gwiazdowego bywa to dość kłopotliwe. Często do porównania dwóch odległych zegarów wykorzystuje się elektromagnetyczne sygnały częstotliwości wzorcowej. W tym przypadku interwałem jednoznaczności jest okres drgań sygnału.

14.3 Skale czasu

W astronomii mamy kilka koncepcji czasu określanych mianem skal czasu, mianowicie:

I – skale czasu gwiazdowego,

II – skale czasu słonecznego,

III – skale czasu dynamicznego (efemerydalnego),

IV – skala czasu atomowego,

V – skala czasu własnego,

VI – skala czasu układowego (laboratoryjnego).

Zanim niektóre z tych skal czasu omówimy bardziej szczegółowo, dokonamy ich krótkiego przeglądu.

Czas gwiazdowy

Czas gwiazdowy jest kątem godzinnym punktu równonocy. Pomijając drobne wpływy precesyjne, skala tego czasu opiera się wyłącznie o zjawisko ruchu wirowego Ziemi. Ponieważ tempo ruchu wirowego Ziemi nie jest stałe, skala czasu gwiazdowego nie jest

[2] Z pojęciem daty, epoki mamy drobne zamieszanie bowiem można napotkać sytuacje, w których słowo epoka bywa stosowane zamiast słowa data. W toku naszego wykładu epokami będziemi nazywać pewne wyróżnione punkty na osi czasu, czyli wyróżnione daty.

jednostajna, wykazuje quasi-okresowe nieregularności oraz powolne wiekowe spowalnianie.

Czas słoneczny

Czas słoneczny zdefiniowany jest jako kąt godzinny środka tarczy Słońca. Wybór Słońca stanowi przyczynę dużych nieregularności tej skali czasu. W celu ich eliminacji wprowadzono koncepcję średniego czasu słonecznego. Pomijając duże ale usuwalne nieregularności, *prawdziwy* czas słoneczny jest hybrydą (krzyżówką) dwóch nie dających się połączyć zjawisk okresowych: dobowego ruchu wirowego Ziemi i rocznego ruchu orbitalnego Ziemi wokół Słońca. Dlatego w praktyce astronomicznej stosowane są dwie odmienne skale czasu słonecznego, mianowicie: *czas uniwersalny* UT wyłącznie zależny od rotacji Ziemi oraz *czas efemerydalny* ET będący dynamiczną skalą czasu, zależną jedynie od ruchu orbitalnego Ziemi.

Czas UT określony jest jako, obserwowany w Greenwich kąt godziny ($\mathcal{H}_G$) fikcyjnego obiektu tzw. uniwersalnego słońca średniego ($U\odot_s$). Aby początek doby słonecznej przypadał o północy, do kąta godzinnego musimy dodać dwanaście godzin:

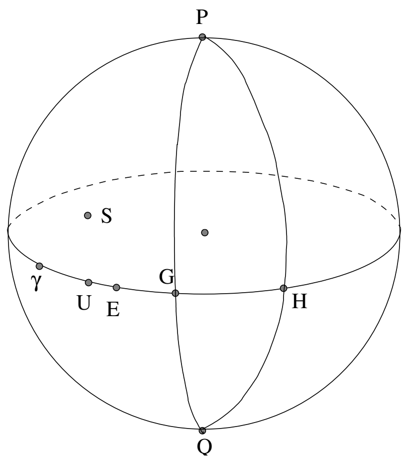
$$UT = 12^h + \mathcal{H}_G U\odot_S \tag{14.1}$$

Zgodnie z definicją, uniwersalne słońce średnie porusza się po równiku niebieskim ze stałą szybkością.

Zarówno czas gwiazdowy jak i czas słoneczny uniwersalny opierają się na ruchu wirowym Ziemi. Mimo, że jednostki czasu w obu systemach są różne, stosunek tych jednostek jest stały. Zatem rektascensja uniwersalnego słońca średniego zmienia się również jednostajnie wraz z czasem gwiazdowym.

Czas dynamiczny (efemerydalny)

W skali czasu dynamicznego, czas to zmienna niezależna występująca w grawitacyjnych równaniach ruchu. W fizyce newtonowskiej tego typu skala czasu traktowana jest jako absolutna, tzn. wszędzie taka sama. Pierwszą skalą czasu dynamicznego był czas efemerydalny ET określony za pomocą rocznego ruchu Słońca. Można ją rownież zdefiniować za pomocą kąta godzinnego innych ciał, np. kąta godzinnego ciała fikcyjnego, które nazwamy efemerydalnym słońcem średnim ($E\odot_s$). Chodzi tu o "obiekt" poruszający się jednostajnie po równiku niebieskim, w tempie odpowiadającym ruchowi średniemu Słońca prawdziwego. Jednak za pomocą kąta godzinnego mierzonego w Greenwich nie możemy zdefiniować skali dynamicznej. Jest tak dlatego, gdyż kąt godzinny określony względem południka Greenwich zależy od rotacji Ziemi, a przecież wiemy już, że ruch wirowy Ziemi wykazuje nieregularności. Potrzebny jest inny standardowy południk względem którego, kąt godzinny nie byłby obciążony nieregularnościami. Określamy go mianem *południka efemerydalnego*, i z definicji jest to taki południk jaki mielibyśmy w Greenwich gdyby ziemska rotacja była ściśle jednostajna. Dlatego, jako wirujący jednostajnie, południk efemerydalny nie odpowiada stałemu miejscu na powierzchni Ziemi. Wykazuje lekki dryft ku wschodowi. Oba południki, południk efemerydalny i południk Greenwich przedstawione są na rysunku 14.1 jako koła wielkie PHQ i PGQ odpowiednio. Punkty E i U na tym rysunku oznaczają położenia średniego słońca efemerydalnego i średniego słońca uniwersalnego, punkt S oznacza słońce prawdziwe. Łuk $HG = \lambda_E$ równa się długości geograficznej południka efemerydalnego.



Rysunek 14.1: Południk efemerydalny PHQ i południk miejscowy PGQ w Greenwich. Punkt E oznacza średnie słońce efemerydalne, U średnie słońce uniwersalne, punkt S słońce prawdziwe.

Formalnie czas ET definiowany jest poprzez równanie 14.22. Ale można go również zdefiniować za pomocą kąta godzinnego ($\mathcal{H}_E$) efemerydalnego słońca średniego, mierzonego względem południka efemerydalnego. Zatem czas efemerydalny ET można zdefiniować jako

$$ET = 12^h + \mathcal{H}_E E \odot_s \tag{14.2}$$

Jednak czas ET wprowadzono w roku 1960 inną drogą, definiując go jako argument czasu w efemerydach ciał niebieskich publikowanych w rocznikach astronomicznych.

Różnicę pomiędzy czasem UT i ET, piszemy jako

$$DT = ET - UT \tag{14.3}$$

Wielkość ta nie może być podana ściśle z wyprzedzeniem ponieważ tkwią w niej nieregularności ziemskiej rotacji, których jak dotąd nie potrafimy precyzyjnie przewidywać.

Teorie dynamiczne umożliwiają obliczenie heliocentrycznych położeń planet na dowolny moment ET. Jest tak również w przypadku położenia środka Ziemi, a więc można zestawiać geocentryczne efemerydy ciał niebieskich z czasem ET jako zmienną niezależną.

Czas atomowy

Współczesne zegary atomowe umożliwiają najbardziej dokładny i zgodny wewnętrznie pomiar czasu. Czas atomowy, tzw. międzynarodowy czas atomowy TAI jest praktycznym czasowym standardem, najbardziej zgodnym z definicją jednostki czasu w układzie SI. Czyni on zadość również potrzebom astronomów jeśli chodzi o precyzję, długotrwałą stabilność oraz niezawodność.

Skala TAI jest skalą “papierową” uśrednioną ze skal atomowych $\mathrm{AT_i}$ kilku wybranych laboratoriów czasu. Jest ona redukowana na wpływ pola grawitacyjnego do poziomu morza i odnosi się do grupy zegarów nieruchomych względem powierzchni Ziemi.

Instytucją uprawnioną do tworzenia TAI jest Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), czyli w ludzkim języku Międzynarodowe Biuro Miar i Wag w Paryżu. [3] Czas TAI wprowadzono w roku 1972, ale zegary atomowe pracowały już w latach 1950-tych, dlatego możliwą jest ekstrapolacja TAI aż do lipca roku 1955.

Koncepcja skali *czasu atomowego* polega na zliczaniu cykli sygnału o wysokiej częstości utrzymywanego w rezonansie z przejściami atomowymi cezu 133. Fundamentalna jednostka czasu w układzie SI określona jest jako interwał w trakcie którego, zliczonych zostanie 9192631770 cykli o częstotliwości magnetycznego rezonansu atomowego atomów cezu 133, odpowiadających przejściom pomiędzy poziomem $F = 4, m_f = 0$ i $F = 3, m_f = 0$ przy zerowym zewnętrznym polu magnetycznym.

Istnieje zatem koncepcyjna różnica pomiędzy skalą czasu atomowego a czasem dynamicznym ET. Jednak przy założeniu absolutnego charakteru stałych fizycznych, skale te powinny dać się powiązać ściśle. Dlatego mimo że definicje sekund TAI i ET są formalnie niezleżne, numerycznie są ze sobą zgodne, a w takiej sytuacji skale te mogą różnić się jedynie stałym przesunięciem (offsetem). Różnica między TAI i ET byłaby istotna gdyby okazało się, że np. stała grawitacji zmienia się w kosmologicznej skali czasu. Takie zmiany sugerują niektóre nieortodoksyjne teorie kosmologiczne, a to oznaczałoby, że czas dynamiczny spowalnia w porównaniu z czasem atomowym.

W fizyce klasycznej czas jest wielkością absolutną, a rozróżnienie pomiędzy skalami atomową i dynamiczną dotyczy jedynie kwestii ich odczytu i definicji. W teorii względności różnica między tymi skalami ma większe znaczenie i odpowiada różnicy pomiędzy czasem własnym i czasem laboratoryjnym (układowym).

Czas własny i czas układowy

Czas własny jest koncepcją powstałą w ramach ogólnej teorii względności. Jest to czas, mierzony przez obserwatora na jego linii świata. Czas wskazywany przez każdy zegar na powierzchni Ziemi będzie więc czasem własnym (zwanym niekiedy czasem prawdziwym), w szczególności taką skalą czasu będzie czas atomowy.

Skale czasu własnego oraz układowego (laboratoryjnego) to skale typu dynamicznego. Jednak czas własny [4] wykazuje okresowe zmiany względem czasu układowego i dlatego nie nadaje się jako podstawa ogólnej skali czasu dynamicznego, [5] Czas laboratoryjny ma tutaj oczywistą przewagę, ponieważ można go zdefiniować jako identyczny dla całego Układu Planetarnego. Jednak w ogólnej teorii względności czas laboratoryjny nie jest zdefiniowany jednoznacznie, konieczny jest zatem wybór. W 1976 roku MUA w celu zastąpienia skali ET zarekomendowała wprowadzenie dwóch nowych skal czasu nie wyrażając przy tym pełnej, definitywnej aprobaty dla ogólnej teorii względności.

Pierwsza z proponowanych przez MUA skal czasu nie wymagała dodatkowych założeń. Był to tzw. ziemski czas dynamiczny TDT (Terrestrial Dynamical Time) wprowadzony od 1977, styczeń 1.0. Skala ta oparta jest o sekundę SI, jej punkt zerowy wybrano tak, by była kontynuacją skali ET.

TDT była skalą czasu przeznaczona do obliczeń widomych geocentrycznych efemeryd. Mimo, iż nie wymaga ona żadnych założeń co do teorii grawitacji, w ramach kontek-

[3] W roku 1987 BIPM jest następcą Bereau International de l'Heurs (BIH) — Międzynarodowego Biura Czasu.

[4] Czas własny jest najdogodniejszym parametrem krzywizny dla rozwiązania geodezyjnego równania różniczkowego, i w tym sensie jest stosowany jako dynamiczna zmienna niezależna.

[5] Jest tak dlatego gdyż dla każdego masywnego ciała mamy jego indywidualny czas własny.

stu ogólnej teorii względności skala TDT jest skalą czasu własnego na powierzchni Ziemi wskazywanego przez zegary atomowe. Oznacza to, że TDT jest skalą zwiazaną z TAI, a tymczasem w celu obliczenia efemerydy geocentrycznej wymagana jest skala czasu odczytywana w geocentrum. Dlatego po roku 1991 czas TDT zastąpiono dwiema skalami czasu: skalą TT związaną z TAI, oraz ze skalą TCG (Geocentric Coordinate Time) "odczytywaną" w geocentrum i związaną z efemerydami geocentrycznymi.

Drugą skalą czasu rekomendowaną w 1976 roku przez MUA jest barycentryczny czas dynamiczny TDB (Barycentric Dynamical Time). Czas ten nadaje się do badania ruchów ciał względem barycentrum Układu Słonecznego. Nie jest to skala czasu zdefiniowana jednoznacznie, zależy bowiem od wyboru konkretnej post-newtonowskiej teorii grawitacji.

Na TDB nałożono warunek by pomiędzy tą skalą a TDT miały miejsce jedynie różnice okresowe. Warunek ten może być spełniony w dowolnej teorii grawitacji. W ogólnej teorii względności TDB odpowiada czasowi układowemu.

Od 1991 roku do obliczeń efemeryd barycentrycznych MUA zaleca skalę czasu TCB (Barycentric Coordinate Time), zastępuje ona skalę TDB, od której różni się trendem wiekowym.

14.4 Czas gwiazdowy i słoneczny

Definicja czasu gwiazdowego została już podana wcześniej, jest ona niezwykle prosta, np. czas gwiazdowy w Greenwich wynosi :

$$T_G = \mathcal{H}_{G\Upsilon} \tag{14.4}$$

gdzie $\mathcal{H}_{G\Upsilon}$ to kąt godzinny punktu równonocy wiosennej podany względem południka Greenwich.
W równaniu tym punkt równonocy zawsze odnosi się do równonocy daty, ale jeśli chodzi o nutację to może być ona brana pod uwagę lub nie. I dlatego, jeżeli w równaniu (14.4) mamy na myśli prawdziwą równonoc, definiowany czas gwiazdowy określony jest mianem *prawdziwego czasu gwiazdowego*. Jeśli Υ jest średnią równonocą, równanie (14.4) definiuje *średni czas gwiazdowy*. Różnica pomiędzy tymi czasami nazywana jest *równaniem równonocy*, oznaczymy ją przez DE. Korzystając z wyrażeń na poprawki nutacyjne w rektascensji i deklinacji można pokazać, że

$$DE = \Delta\psi \cdot \cos\varepsilon_0 \tag{14.5}$$

gdzie: $\Delta\psi$ to nutacja w długości a ε_0 jest nachyleniem ekliptyki do średniego równika daty.

W astronomii, czas gwiazdowy prawdziwy nie jest wykorzystywany jako skala czasu, jest on niekiedy potrzebny np. w obserwacjach południkowych.

Czas gwiazdowy średni różni się od okresu rotacji Ziemi, przyczyną jest zjawisko precesji rotacyjnej osi Ziemi. Z powodu precesji rektascensja gwiazdy znajdującej się w tym samym miejscu co punkt równonocy, w ciągu roku zwiększyłaby się o $\psi\cos\varepsilon_0$. Odpowiada to przyrostowi dziennemu $0\overset{s}{.}0084$ i o taką właśnie wartość okres wirowania Ziemi przewyższa długość średniej doby gwiazdowej.

Precesja wpływa również na długość roku, a ściślej długość roku zwrotnikowego. Podobnie jak i miesiąc, rok można zdefiniować na wiele sposobów. Posiadający największe znaczenie praktyczne *rok zwrotnikowy* jest średnim interwałem potrzebnym na przyrost (liczony od średniego punktu równonocy) średniej długości Słońca o $360°$. Odpowiada to interwałowi od jednej równonocy wiosennej do drugiej, czyli jest to interwał pomiędzy kolejnymi identycznymi porami roku.

Kalendarz cywilny został dopasowany właśnie do tego roku. W kalendarzu gregoriańskim uwzględniono występowanie lat przestępnych w liczbie 97-miu na każde 400 lat. Żądanie to sprawia, że czas trwania średniego roku kalendarzowego jest bliski długości średniego roku zwrotnikowego. W kalendarzu juliańskim posiadającym lata przestępne co 4 lata, długość roku wynosi 365.25 — jest to *rok julianski*. Stulecie juliańskie trwa zatem 36525 dni.

Okres obiegu Ziemi wokół Słońca, w odniesieniu do gwiazd stałych nazywamy *rokiem gwiazdowym*. Perturbacje planetarne sprawiają, że jest on nieco różny od interwału potrzebnego Ziemi na przejście od jednego perihelium do następnĺgo, zwanego *rokiem anomalistycznym*.

Mamy także *rok zaćmieniowy (smoczy)*, definiowany jako interwał między dwoma kolejnymi przejściami średniego słońca przez węzeł wstępujący średniej orbity Księżyca. Rok ten różni się wyraźnie od pozostałych, określa średnie częstości występowania zaćmień Słońca i Księżyca. Wreszcie możemy napotkać interwał nazywany *rokiem gaussowskim* wyznaczonym drogą obliczeń z II-go prawa Keplera, w którym podstawiono stałą Gaussa $k = 0.01720209895$ oraz wielką półoś równą $a = 1$. Poniżej podano długości (w średnich dobach słonecznych) odpowiadające zdefiniowanym wcześniej interwałom rocznym:

$$\begin{aligned}
&\text{rok smoczy} &&= 346.6201,\\
&\text{rok zwrotnikowy} &&= 365.2421897,\\
&\text{rok julianski} &&= 365.25,\\
&\text{rok gwiazdowy} &&= 365.25636,\\
&\text{rok anomalistyczny} &&= 365.25964\\
&\text{rok gaussowski} &&= 365.25690
\end{aligned} \tag{14.6}$$

Poza rokiem gaussowskim, wartości te ulegają zmianom wiekowym, które w większości wypadków są bardzo niewielkie.

Rok zwrotnikowy odgrywa ważną rolę w definicji związku pomiędzy czasem słonecznym i gwiazdowym. Dla dowolnego obiektu X obserwowanego w Greenwich, możemy napisać

$$CGG = \mathcal{H}_G X + \mathcal{RA}\, X \tag{14.7}$$

gdzie CGG oznacza czas gwiazdowy w Greenwwich, $\mathcal{H}_G X$ kąt godziny obiektu X mierzony w Greenwich natomiast $\mathcal{RA}\, X$ jest rektascensją obiektu.

Jeśli jako początek rachuby rektascensji obierzemy średni punkt równonocy Υ, wówczas równanie (14.7) może posłużyć do znalazienia związku między średnim czasem gwiazdowym i czasem uniwerslanym. Równanie to dla obiektu X identycznego z uniwersalnym słońcem średnim $U\odot_S$, zgodnie z (14.1), ma postać

$$UT = CGG - \mathcal{RA}\, U\odot_S + 12 \tag{14.8}$$

Tej postaci związek służy do wyznaczania czasu UT, a zatem skala UT jest skalą realizowaną za pomocą obliczeń numerycznych. O precyzyjnych obserwacjach pozycyjnych Słońca nie może być mowy, dlatego w celu wyznaczenia CGG obserwowane są kulminacje górne gwiazd bądź radioźródeł. Po obliczeniu rektascensji uniwersalnego słońca średniego, łatwo znajdujemy w skali czasu UT moment CGG w skali czasu gwiazdowego. Wyznaczona tą drogą skala UT, nosi miano skali czasu UT0. Z jej pomocą tworzone są dwie dalsze skale czasu uniwersalnego:

UT1 = UT0 + poprawka na ruch biegunów Ziemi
UT2 = UT1 + poprawka na nieregularności ruchu wirowego Ziemi

W latach powstawania koncepcji średniego czasu słonecznego (UT) nikomu się nie śniło o nieregularnościach ruchu wirowego Ziemi. Założenie o jednostajnym ruchu wirowym Ziemi zostało odrzucone dopiero w pierwszej połowie lat 1900-nych. Zaowocowało to odrzuceniem skali UT jako podstawy w precyzyjnej służbie czasu, w zamian pojawiła się skala ET czyniąca zadość wymaganiom dotyczących jednostajności czasu. Od tego momentu UT ma status skali wykorzystywanej jedynie w pomiarach ziemskiej rotacji.

W równaniu (14.8), by móc zeń korzystać w praktyce, potrzebna jest formuła umożliwiajaca obliczenie $\mathcal{RA}\ U\odot_s$. W 1898 roku Newcomb podał taką formułę w postaci

$$\mathcal{RA}\ U\odot_s = 18^h38^m45\overset{s}{.}836 + 8640184\overset{s}{.}542\ T + 0\overset{s}{.}0929\ T^2 \tag{14.9}$$

przy czym

$$T = (JD - JD_{B1900})/36525$$

gdzie JD, JD_B1900 oznaczają daty juliańskie na bieżący moment i na epokę B1900 odpowiadającą momentowi średniego południa w Greenwich

$$B1900 = AD\ 1900, sty.0, 0^h\ \text{(GMT)}$$

Kładąc (14.9) do (14.8) otrzymamy formułę

$$CGG = 6^h38^m45\overset{s}{.}836 + 8640184\overset{s}{.}542\ T + 0\overset{s}{.}0929\ T^2 + UT \tag{14.10}$$

albo jej postać praktyczną, na moment 0^h GMT

$$CGG_{0^h\ GMT} = 6^h38^m45\overset{s}{.}836 + 8640184\overset{s}{.}542\ T + 0\overset{s}{.}0929\ T^2 \tag{14.11}$$

w której T przybierać może wartości $\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Formuły (14.10), (14.11) używano od początku roku 1900 do końca roku 1959 w "British Nautical Almanac" i w "American Ephemeris", w których służyły do definicji skali UT oraz do obliczeń CGG.

W czasach Newcomba skale CGG, UT oraz T w równaniach (14.10), (14.11) — wszystkie były jednostajnymi skalami czasu. Jednak od chwili gdy niejednostajność wirowania Ziemi stała sie "łatwa" do zmierzenia za pomocą zegarów astronomicznych, zmienną T w równaniach (14.9), (14.10), (14.11) należało interpretować jako zmienną niezależną ruchu orbitalnego Ziemi a nie tylko ruchu wirowego. Odtąd skala czasu T

wykorzystywana w opisie ruchu ciał w Układzie Planetarnym, uzyskała status skali jednostajnej. I to z mocy samej koncepcji, w myśl której skala ta jest wykorzystywana w równaniach newtonowskiej dynamiki — T tkwi w tych równaniach jako zmienna niezależna.

Zatem w równaniu (14.9) zamiast T należy napisać T_E, a zamiast $\mathcal{RA}\ U\odot_S(T)$ wstawić $\mathcal{RA}\ U\odot_S(T_E) = \mathcal{RA}\ E\odot_S$, gdzie czas efemerydalny T_E liczony jest od epoki $AD1900, sty.0.12^hET$, a $\mathcal{RA}\ E\odot_S$ oznacza efemerydalne słońce średnie. Wówczas równanie (14.9) opisuje ruch fikcyjnego punktu poruszającego się jednostajnie po równiku z prędkością bliską średniej prędkości słońca prawdziwego. Ruch tego obiektu nie ma nic istotnie wspólnego z ruchem wirowym Ziemi, badanym za pomocą obserwowanych kątów godzinnych gwiazd.

Na to by równanie (14.10) było spójne z obserwowanymi kątami godzinnymi gwiazd potrzeba innej kancepcji czasu służącego jako miara ruchu wirowego Ziemi. Utworzono ją w bardzo prosty sposób. Otóż, ogłoszono, że równanie (14.10) definiuje nową skalę czasu UT, nieregularną, związaną z wirowaniem Ziemi, przy czym zmienna T w równaniu (14.10) to interwał T_U w stuleciach juliańskich liczony od epoki $AD1900, sty.0, 12^hUT$. Różnica

$$\mathcal{RA}\ E\odot_S - \mathcal{RA}\ U\odot_S = 1 + \frac{DT}{365.2422} = 1.002737909\ DT$$

$$DT = ET - UT$$

między skalami ET i UT, może być wyznaczona jedynie za pomoca obserwacji, a to oznacza, że znana będzie z pewnym opóźnieniem. Ze względu na trudne w modelowaniu nieregularności skali UT, DT może myć ekstrapolowana w przyszłość z ograniczoną precyzją.

W latach 1960-1983 równanie (14.11) z T_U było wykorzystywane w rocznikach astronomicznych do obliczenia CGG na $0^h\ UT$

Od roku 1984, w celu powiązania skal czasu gwiazdowego i UT stosowano formułę

$$(CGG1)_{0^h\ UT1} = 24110\overset{s}{.}54841 + 8640184\overset{s}{.}812866\ T_U + 0\overset{s}{.}093104\ T_U^2 - 6\overset{s}{.}2 \cdot 10^{-6} T_U^3$$

$$T_U = \frac{JD - J2000_{UT1}}{36525} \tag{14.12}$$

$$J2000_{UT1} = AD2000, sty.1, 12^H\ UT1$$

$$T_U \in [\pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5 + \ldots] \cdot \frac{1}{36525}$$

Jest to formuła zgodna z położeniem i ruchem punktu równonocy zdefiniowanym w IAU 1976 ”System stałych astronomicznych”, IAU 1980 ”Teoria nutacji” oraz zgodna z położeniem i ruchem gwiazd podanych w katalogu FK5.

Analogicznie do równania (14.11) definiującego skalę UT, równanie (14.12) definiujje skalę czasu UT1. Definicja ta zaczęła obowiązywać o epoki $AD1984, sty.1.0$, a wyraz stały w (14.12) dobrano w taki sposób, by zachować ciągłość pomiędzy starą i nową koncepcją. By zagwarantować ciągłość w tempie zmian skali UT1 w stosunku do UT dobrano współczynnik przed T_U. Jednak nie usunięto pewnych nieciągłości mających źródło w zmianach w teorii nutacji wykorzystywanej w definicji skali UT1.

W stosunku do jednostajnej skali czasu, zmienność UT1 dotyczy wyłącznie nieregularności w ruchu wirowym Ziemi. Długość doby w skali UT1 wyrażona w sekundach SI dana jest

$$\Delta = 86400 - \frac{\psi_2 - \psi_1}{n} \tag{14.13}$$

gdzie, ψ_1, ψ_2 są wartościami różnic UT1-TAI podane w sekundach, obserwowane w n dniowych interwałach.

Szybkość kątowa ω ruchu obrotowego Ziemi wynosi

$$\omega = \frac{86400}{\Delta} \cdot 72921151467 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{14.14}$$

Równanie (14.12) umożliwia znalezienie formuł na zamianę interwałów wyrażonych a skali UT1 i w czasie gwiazdowym. Różniczkując (14.12) po UT1 otrzymamy wyrażenie

$$s' = \frac{d(CGG1)}{d(UT1)} = 8640184^{\mathrm{s}}\!.812866 + 2 \cdot 0^{\mathrm{s}}\!.093104\ T_U - 1^{\mathrm{s}}\!.86 \cdot 10^{-5} T_U^2 \tag{14.15}$$

które pozwala na obliczenie liczby sekund gwiazdowych odpowiadających stuleciu juliańskiemu UT1. Uzupełniając pierwszy wyraz o liczbę sekund gwiazdowych w stuleciu juliańskim, po czym dzieląc prawą stronę przez 36525, otrzymamy liczbę sekund gwiazdowych w interwale jednej doby UT1.

$$s = 86636^{\mathrm{s}}\!.55536790872 + 5^{\mathrm{s}}\!.098097 \cdot 10^{-6}\ T_U - 5^{\mathrm{s}}\!.09 \cdot 10^{-10} T_U^2 \tag{14.16}$$

a dzieląc to równanie przez 86400 — liczbę sekund w dobie gwiazdowej

$$r' = 1^{\mathrm{d}}\!.002737909350735 + 5^{\mathrm{d}}\!.9006 \cdot 10^{-11}\ T_U - 5^{\mathrm{d}}\!.9 \cdot 10^{-15}\ T_U^2 \tag{14.17}$$

mamy stosunek interwałów doby gwiazdowej do doby UT1.

Odwrotny stosunek, interwału doba UT1 do doby gwiazdowej wyraża się wzorem

$$r = 0^{\mathrm{d}}\!.997269566329084 - 5^{\mathrm{d}}\!.8684 \cdot 10^{-11}\ T_U + 5^{\mathrm{d}}\!.9 \cdot 10^{-15}\ T_U^2 \tag{14.18}$$

Ze względu na zmiany tempa wirowania Ziemi, długość doby gwiazdowej i doby UT1 ulegają zmianom, ale ich stosunki dane równaniami (14.17), (14.18) zawsze pozwolą na przeliczenie interwału czasu wyrażonego w jednej z tych skal na interwał wyrażony w drugiej skali. Pomijając drobne wyrazy wiekowe, z równań tych mamy

$$\begin{aligned} &1\ \mathrm{sr.d.\ gw} = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}}\!.090524\ \ \mathrm{doby\ UT1} \\ &1\ \mathrm{doba\ UT1} = 24^{\mathrm{h}}03^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}\!.5553678\ \ \mathrm{sr.d.gw.} \end{aligned} \tag{14.19}$$

Zakończymy ten podrozdział podsumowaniem zawierajacym opis procegury umożliwiającej wyznaczenie wartości czasu w skali UT1 odpowiadajacej momentowi w skali czasu gwiazdowemu. W tym celu

1- obserwujemy moment górowania gwiazdy względem prawdziwego południka. Możemy tu się posłużyć np. kołem południkowym. Z obserwacji uzyskamy tzw. widomy, miejscowy prawdziwy czas gwiazdowy MCG_W, 2- na ten moment, korzystając z równania (14.5) obliczamy wartość DE równania równonocy, co pozwoli na wyznaczenie miejscowego średniego czasu gwiazdowego MCG_S odpowiadajacego MCG_W.

$$MCG_S = MCG_W - DE$$

3- dysponując na moment MCG_S wartością chwilowej długości geograficznej λ miejsca obserwacji, wyznaczamy średni czas gwiazdowy w Greenwich na moment MCG_W

$$CGG1 = MCG_S - \lambda$$

4- korzystając z równania (14.12) obliczamy czas gwiazdowy θ jaki minął od początku doby na skali $UT1$ do momentu $CGG1$

$$\theta = CGG1 - (CGG1)_{0^h\ UT1}$$

5- interwał θ w jednostkach czasu gwiazdowego przeliczamy na interwał w jednostkach czasu słonecznego, w tym celu korzystamy z równania (14.18)

$$UT1 = \theta \cdot r$$

Wszystkie powyższe kroki możemy zapisać łącznie w postaci formuły

$$UT1 = (\mathcal{H}X + \mathcal{RA}\ X - DE - \lambda - (CGG1)_{0^h\ UT1}) \cdot r \tag{14.20}$$

Nie istnieje odwrotna procedura obserwacyjna wykorzystywana w celu wyznaczenia czasu gwiazdowego odpowiadającego momentowi w skali UT1. W zamian, można ten moment łatwo obliczyć posługując się formułą (14.12).

14.4.1 Skale czasu słonecznego UT0, UT1, UT2

Powiedziano wcześniej, że istnieje konieczność rozróżnienia kilku skal czasu typu UT. Konwersja obserwowanego czasu gwiazdowego do uniwersalnego, poprzez równanie (14.20) wymaga znajomości chwilowej długości geograficznej obserwatora. Długość ta nie jest znana w momencie obserwacji, bowiem wówczas mamy do dyspozycji jedynie λ_0 czyli długość obserwatora wyznaczoną względem bieguna figury Ziemi. Przez λ oznaczamy długość obserwatora względem chwilowego bieguna rotacji Ziemi. Związek pomiędzy tymi długościami dany jest równaniem (patrz rozdział 10, formuła (10.21))

$$\lambda = \lambda_0 + (x \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0) \tan \phi_0$$

gdzie ϕ_0 jest szerokością obserwatora względem bieguna figury Ziemi, natomiast $x,\ y$ wyrażone w sekundach łuku są składowymi przemieszczania bieguna chwilowego względem bieguna figury.

Ponieważ λ_0 jest wielkością znaną (jest to tzw. stała stacji), redukcja od czasu gwiazdowego do UT może być dokonana natychmiast. Otrzymane w ten sposób UT oznaczamy jako UT0. Ze względu na ruch bieguna wartość UT0 jest zależna od miejsca obserwacji, nie czyni więc zadość globalnym standardom. Dlatego chcąc uwolnić się od miejsca obserwacji, trzeba dokonać redukcji stosując chwilową wartość λ. Tak uzyskaną skalę czasu UT oznaczamy skrótem UT1. I właśnie tę formę czasu UT stosujemy w wyrażeniach wiążących UT z innymi skalami czasu. Odtąd gdziekolwiek napiszemy UT, należy rozumieć to jako skalę UT1. Różnica pomiędzy tymi skalami czasu wynosi

$$UT1 = UT0 - (u_x \sin\lambda_0 + u_y \cos\lambda_0)\tan\phi_0 \tag{14.21}$$

gdzie $u_x = 1/15\; x,\;\; u_y = 1/15\; y)$.

Współczynniki u_x, u_y nieznane w momencie wykonywania obserwacji, ich wartości są publikowane z pewnym opóźnieniem przez International Earth Rotation Service (IERS) — Międzynarodową Służbę Rotacji Ziemi i przez Międzynarodowe Biuro Miar i Wag.

Możliwe jest dalsze udoskonalenie skali UT1, bowiem UT1 podlega nieregularnościom wynikajacym z niejednostajności ruchu wirowego Ziemi. Zmiany te nie są przewidywalne dostatecznie dokładnie, wykazują jednak pewne wyraźne sezonowe okresowości. Jeśli usuniemy je z UT1 otrzymamy nową skalę czasu UT2. Obie skale, UT1 oraz UT2, są niezależne od położenia obserwatora na powierzchni Ziemi.

14.4.2 Skala czasu UTC

Od momentu AD 1972, styczeń 1, drogą radiową rozpoczęto nadawanie sygnałów czasu w skali UTC (Universal Time Coordinated), jeszcze jednej odmianie skali UT. Jednak UTC jest hybrydą dwóch skal czasu UT1 i TAI, bowiem sekundą UTC jest sekunda skali TAI. Dlatego UTC i TAI różnią się zawsze o całkowitą liczbę sekund. Dodatkowo UTC jest koordynowana w taki sposób, by nie różniła się od UT1 o więcej niż $0\overset{s}{.}9$ sekundy. Koordynacja dokonywana jest poprzez wprowadzanie tzw. sekundy przestępnej (leap second), zwykle na końcu czerwca lub grudnia. W celu rozpowszechnienia precyzyjnej informacji o różnicy między tymi skalami, w kodzie radiowego sygnału UTC transmitowana jest róznica DUT1=UTC-UT1. Podsumowując, o UTC można powiedzieć, że zegar skali UTC tyka tak samo często jak zegar skali TAI, natomiast jego wskazówki dostarczają dostatecznie dokładnej informacji o rotacji Ziemi.

14.5 Czas efemerydalny

Fikcyjne średnie słońce $\mathcal{RA}\ U\odot_S$ wprowadzone przez Newcomba koncepcyjnie bliższe jest średniemu słońcu efemerydalnemu $\mathcal{RA}\ E\odot_S$. A ponadto zgodnie z tą definicją rektascensja słońca efemerydalnego jest równa średniej długości L Słońca. W oparciu o tę wielkość można więc zdefiniować dynamiczną skalę czasu efemerydalnego bez uciekania się do południka efemerydalnego jak to miało miejsce przypadku równania (14.2). I tak też jest w formalnej definicji czasu efemerydalnego ET. Wyrażenie Newcomba na geometryczną średnią długość L Słońca, postaci

$$L = 279°41'48\overset{''}{.}04 + 129602768\overset{''}{.}13\; T + 1\overset{''}{.}089\; T^2 \tag{14.22}$$

przyjęto jako definicję skali ET, w której T jest interwałem czasu wyrażonym w stuleciach juliańskich, biegnacego jednostajnie od epoki początkowej AD 1900 styczeń 0, 12^h ET.

Równanie (14.22) poprzez współczynnik przy T, definiuje także jednostkę czasu efemerydalnego. Współczynnik ten daje przyrost średniej długości Słońca w czasie 36525 dni efemerydalnych. Ponieważ w czasie jednego roku zwrotnikowego L wzrasta o 360° ($1296000''$), możemy otrzymać czas trwania tego przyrostu w dniach efemerydalnych czy też w efemerydalnych sekundach (dzień efemerydalny ma oczywiście 86400 sekund efemerydalnych).

Podstawową jednostką czasu ET jest rok zwrotnikowy 1900.0, który zgodnie z tym co powiedziano wyżej wyraża się liczbą N sekund efemerydalnych

$$N = \frac{1296000 \cdot 36525 \cdot 86400}{129602768.13} = 31556925.9747 \text{ sekund efemerydalnych} \tag{14.23}$$

Sekunda efemerydalna wynosi zatem $1/N$ długości roku zwrotnikowego 1900.0.

14.5.1 Metody odczytywania czasu w skali ET

Droga do przyjęcia jako podstawowej jednostki czasu, jednostke skali ET była kręta i długa. Sygnały o potrzebie zmian w koncepcjach czasu pojawiały się już przed II-gą Wojną Światową. Jednak Od roku 1948 kiedy to projekt nowej koncepcji ET został dostrzeżony oficjalnie, musiało minąć jeszcze 10 lat. MUA dopiero w roku 1958 ostatecznie przyjęła definicję epoki początkowej tej skali jako AD 1900 styczeń 0.5 ET.

Skalę ET definiuje równanie (14.22) przez obliczenie długości Słońca L lub jak kto woli rektascensji efemerydalnego słońca średniego $\mathcal{RA}\ \ E\odot_S$. Pomimo, że skala ET została określona za pomocą efemeryd Słońca, dotyczy czasu rozumianego jako zmienna niezależna występująca w równaniach ruchu dowolnego obiektu. Można więc do definicji skali ET wykorzystać dowolne ciało Układu Słonecznego.

Odczytanie czasu ET sprowadza się zatem do porównania obserwowanych położeń Słońca (planet, Księżyca) z położenniami podanymi w efemerydach (tablicach położeń). Czas znaleziony w tabeli, dla którego podane położenie Słońca odpowiada położeniu obserwowanemu jest poszukiwanym momentem w skali ET. W skali UT odpowiada mu moment obserwowanego położenia Słońca.

W celu możliwie dokładnego odczytu skali ET najlepiej posłużyć się efemerydą położeń Księżyca, gdyż jego ruch jest najszybszy i znany z dużą dokładnością.

14.6 Współczesne dynamiczne skale czasu

Z szeregu wad skali czasu ET zdawano sobie sprawę od dawna. Jej koncepcja jest oparta o teorię ruchu Słońca, w której wykorzystano pewien zestaw stałych astronomicznych. A tymczasem w roku 1984 uległy zmianie zarówno stałe jak i sama teoria. Pociąga to trudności, np. wyboru podstawowej jednostki skali ET — rok zwrotnikowy, dokonano zakładając, że jest on niezależny od stałych astronomicznych, w szczególnosci od stałej precesji. W rzeczywistości jest inaczej.

Koncepcja skali ET jest także obciążona pochodzeniem przed relatywistycznym. Zupełnie nie uwzględniono w niej teorii względności, dlatego niemożliwym jest skategoryzowanie jej jako skali geocentrycznej, barycentrycznej czy też jako skali czasu własnego, skali czasu laboratoryjnego. Z punktu widzenia dynamiki Newtona skala ET jest tak smo dobra jak skala czasu atomowego TAI, łatwiej dostępnego i w dodatku ze znacznie wyższą precyzją.

Sekundę efemerydalną zdefiniowano (zobacz równanie (14.23)) jako ułamek długości roku zwrotnikowego1900.0. Fundamentalną jednostką międzynarodowego czasu TAI jest natomiast sekunda SI, określona jako 9192631770 okresów radiacji odpowiadających przejściom pomiędzy dwoma nadsubtelnymi poziomami znajdującego się w stanie podstawowym atomu cezu 133. Między tymi jednostkami nie ustalono żadnych systematycznych różnic i dlatego pomiędzy ET i TAI mamy związek

$$ET = TAI + 32\overset{s}{.}184 \tag{14.24}$$

W roku 1984, w celu naprawy sytuacji skalę czasu ET oficjalnie zastąpiono nowymi koncepcjami, skalą TDT oraz TDB. Na skutek tych pociągnięć, w tymże roku czas ET znika ze wszystkich roczników astronomicznych, gdzie zastąpiono go nową podstawową astronomiczną skalą czasu tzw. dynamicznym czasem ziemskim TDT. Skalę TDT wprowadzoną już w roku 1977, zaprojektowano tak, by zachować ciągłość z czasem efemerydalnym ET. Jest ona bliższa skali TAI aniżeli skala ET gdyż sekundą TDT jest sekunda SI. A zatem by powiązać TDT z TAI, wystarczy znać wartość offsetu o jaki skale te się różnią. Związek ten ma postać

$$1977 \text{ styczen } 1.0 \text{ TAI} = 1977 \text{ styczen } 1.0003725 \text{ TDT} \tag{14.25}$$

W celu zagwarantowania ciągłości z ET, jest to ten sam offset co podany w równaniu (14.24).

W roku 1991 na konferencji MUA uporządkowano z kolei skalę czasu TDT, którą do tego momentu stosowano do obliczeń geocentrycznych efemeryd, a co oznacza, że miała ona status skali dynamicznej. A tymczasem jak wynika z (14.25) jej definicja oparta jest o skalę czasu atomowego odczytywanego na geoidzie a nie w geocentrum. Stąd w celu uporządkowania pojęć wprowadzono dwie nowe skale czasu. Skalę czasu TT (Terrestial Time) odczytywaną na geoidzie będącą kontynuacją skali TDT i ET. Sekundą skali TT jest sekunda TAI, a od TAI wszystkie te trzy skale różnią się jedynie offsetem

$$TT = TDT = ET = TAI + 32\overset{s}{.}184 \tag{14.26}$$

Dla celów obliczeniowych geocentrycznych efemeryd zdefiniowano nową skalę, tzw. czas układowy geocentryczny TCG (Geocentric Coordinate Time). Różni się on od czasu TT o niewielki wyraz wiekowy

$$TCG = TT + L_G(JD - 2443144.5) \cdot 86400 \tag{14.27}$$

gdzie $L_G = 6.969291 \cdot 10^{-10} \pm 3 \cdot 10^{-16}$.

Do obliczeń efemerydalnych związanych z barycentrum Układu Słonecznego, w roku 1976 MUA zaleciła stosowanie skali TDB (Barycentric Dynamical Time). Jest to czas układowy odczytywany w barycentrum Układu Słonecznego, a w równaniach ruchu względem barycentrum czas ten ma ststus zmiennej niezależnej. W praktyce skalę TDB otrzymuje się ze skali TDT za pośrednictwem formuły

$$TDB = TDT + P$$

przy czym P obejmuje 500 wyrazów trygonometrycznych (patrz dygresja czas własny i czas układowy).

W roku 1991 skalę TDB zastąpiono czasem TCB (Barycentric Coordinate Time). Jest to skala czasu z sekundą SI (sekunda atomowa), odczytywana w barycentrum Układu Słonecznego. Obie skale barycentryczne różnią się jedynie trendem wiekowym

$$TCB = TDB + L_B(JD - 2443144.5) \cdot 86400 \tag{14.28}$$

gdzie $L_B = 1.550506 \cdot 10^{-8}$.

Transformacji wartości czasu określonego w skalach układowych TCB oraz TCG można dokonać w oparciu o równanie

$$\begin{aligned} TCB \approx TCG + 1\overset{s}{.}480813 \cdot 10^{-8}(JD - 2443144.5) \cdot 86400 \\ \cdot \mathbf{V_e}(\mathbf{X} - \mathbf{X_e})c^{-2} + P \end{aligned} \tag{14.29}$$

gdzie wektory $\mathbf{V_e}, \mathbf{X_e}$ oznaczają barycentryczne prędkość i położenie geocentrum, wektor $\mathbf{X}$ oznacza barycentryczne położeniem obserwatora.

14.7 Rok Juliański i rok Bessel'a

Podamy teraz pewne konwencje związane z astronomiczną koncepcją czasu. Gdy podajemy moment czasu zajścia pewnego zdarzenia czynimy to zawsze w porządku malejącym, tzn. rok, miesiąc, dzień, itd., np. 1989 październik 14, 12^h, lub co jest równoważne 1989 październik 14.5. Astronomowie niekoniecznie respektują tradycyjną liczbę dni w miesiącu i nic im nie wadzi by dzień Nowego Roku określić jako grudzień 32, albo dzień imienin Sylwestra jako styczeń 0. Moment 1985 grudzień 31 18 można równie dobrze podać jako 1986 styczeń 0.75. Konwencje tego typu dotyczą każdej z wcześniej omówionych skal czasu.

W przypadku dynamicznych skal czasu stosujemy jeszcze inny sposób określania momentu czasu. Zrywa on zupełnie z kalendarzem, zachowując jedynie pojęcie roku, ale uzupełnionego o część ułamkową np. 1985.1672. Stosowane są w tym wypadku dwa systemy: stary oparty o tzw. rok Bessela oraz nowy wykorzystujący pojęcie roku juliańskiego. Długość *roku Bessel'a* jest to interwał, w którym efemerydalne słońce średnie powiększy swą rektascensję o 24 godziny. Można go zatem zidentyfikować z rokiem zwrotnikowym, ale między tymi interwałami jest pewna drobna różnica wynosząca $0\overset{s}{.}148\ T$, gdzie T jest czasem w stuleciach jaki upłynął od 1900. Pomijając wyrazy wiekowe rok Bessel'a i zwrotnikowy są identyczne i wynoszą 365.2422. Początek roku Bessel'a przypada na moment gdy średnia długość Słońca wynosi dokładnie 280° albo gdy

$$\mathcal{RA}\ E\odot_s = 18^h40^m \tag{14.30}$$

Moment ten zawsze przypada w pobliżu początku roku kalendarzowego. Fundamentalna epoka w systemie lat Bessel'a — epoka B1900.0, odpowiadada dacie 1900 styczeń 0.813 ET. Natomiast inna ważna epoka standardowa B1950.0 jest momentem o dokładnie 50 lat zwrotnikowych lub 18262.110 dni późniejszą. Interwał ten przekracza 50 zwykłych lat kalendarzowych po 365 dni o $12\overset{d}{.}110$.

Zatem pamiętając, że rok 1900 nie był rokiem przestępnym możemy napisać

$$B1950.0 \equiv 1950 \text{ sty. } 0\overset{d}{.}923\ ET \equiv 1949 \text{ gru. } 31, 22^h09^m\ ET \tag{14.31}$$

Epokę Bassel'a na dowolny inny moment można obliczyć dzieląc dany interwał czasu w dniach, przez 365.2422.

Rachunki wygodniej jest wykonywać w systemie epoki juliańskiej, w której moment czasu podawany jest jako ułamek juliańskiego roku o długości 365.25 dnia. Epoką fundamentalną jest tutaj epoka J2000.0

$$J2000.0 \equiv 2000 \text{ sty. } 1\overset{d}{.}5 \text{ TDB} \tag{14.32}$$

Możemy też obliczyć juliańską epokę na dowolny inny moment. Przykładowo inna standardowa epoka J1950.0 oddalona jest o dokładnie 18262.5 od epoki fundamentalnej, mamy więc

$$J1950.0 \equiv 1950 \text{ sty. } 1.^{\mathrm{d}}0$$

Podany wyżej nowy system epoki juliańskiej wprowadzono w 1976 roku łącznie z rewizją stałych astronomicznych. W tym samym czasie przedefiniowano starą epokę bessl'owską poprzez uproszczenie definicji roku Bessel'a. Odtąd rok Bessel'a ma być równy co do długości rokowi zwrotnikowemu 1900.0.

W astronomii bardzo często operuje się datą wyrażoną jedynie za pomocą dni. Do tego celu wykorzystuje się pojęcie *daty juliańskiej* JD, wyrażonej z pomocą liczby dni oraz ułamka dnia jakie minęły od epoki 4713 pne styczeń $1.^{\mathrm{d}}5$. Juliańskie daty podanych wcześniej epok fundamentalnych wynoszą:

$$\begin{aligned} B1900.0 &= JD\ 2415020.313 \\ B1950.0 &= JD\ 2433282.423 \\ J2000.0 &= JD\ 2451545.0 \end{aligned} \tag{14.33}$$

Początkowo JD zdefiniowano z pomocą skali UT, a kolejne dni zliczano od średniego południa Greenwich, 1 styczeń 4713 pne. Podobna definicja oparta o skalę ET nosi nazwę juliańskiej daty efemerydalnej. Można wykorzystać w tym celu i inne skale. W praktyce jeżeli zachodzi obawa nieporozumienia, trzeba podać jakiego typu JD ma się na myśli. W równaniach (14.33) jest chyba naturalnym, że pierwsze dwie epoki wyrażone są w skali ET, a ostatnia w TT.

Epoki początkowe daty juliańskiej dla dowolnych skal czasu formalnie są zawsze takie same $(4713\ldots)$), ale nie odpowiadają one temu samemu momentowi czasu. Niestety, niewiele wiadomo o relacjach pomiędzy różnymi skalami czasu w odległej przeszłości.

Związki pomiędzy epoką Juliańską i Bessel'a oraz bieżącymi JD są następujące:

$$\begin{aligned} \text{epoka Julianska} &= J2000.0 + (JD - 2451545)/365.25 \\ \text{epoka Bessel'a} &= B1900.0 + (JD - 2415020.31352)/365.242198781 \end{aligned} \tag{14.34}$$

Część całkowita daty juliańskiej nosi nazwę *dnia juliańskiego*. Umówiono się, że dzień juliański rozpoczyna się w momencie południa, nie o północy. W celu skrócenia liczby cyfr koniecznych przy zapisie JD, wprowadzono zmodyfikowany dzień juliański — MJD,

$$MJD = JD - 2400000.5 \tag{14.35}$$

W tym sposobie rachuby dni, nowy dzień rozpoczyna się o północy, a epoką początkową jest 1858 listopad 17.0.

Zmodyfikowany dzień juliański nie jest jedyną odmianą dnia juliańskiego istnieje ich więcej ale są to modyfikacje nie mające charakteru standardu. Przykładowo, w zagadnieniach satelitarnych wygodnie jest zliczać dni począwszy od roku 1956.

14.8 Przejście przez południk efemerydalny

W jednym z poprzednich wykładów omawialiśmy przyczyny różnicy między czasem słonecznym prawdziwym (widomym) a czasem słonecznym średnim. Różnica ta nazywana równaniem czasu E i definiowana jako

$$E = \text{czas sloneczny widomy} - \text{czas sloneczny sredni} \tag{14.36}$$

albo za pomocą rektascensji

$$E = \mathcal{RA}\, U\odot_s - \mathcal{RA}\,\odot \tag{14.37}$$

gdzie $\mathcal{RA}\,\odot$ jest rektascensją słońca prawdziwego, $\mathcal{RA}\, U\odot_s$ jest rektascensją uniwersalnego słońca średniego.

W Astronomical Almanac podane są jedynie przybliżone wzory na E, co wynika stąd, że w równaniu (14.37) występują wielkości zdefiniowane w dwóch różnych skalach czasu. Wielkość $\mathcal{RA}\, U\odot_s$ znana jest na dowolny moment UT, ale rektascensja słońca prawdziwego może być wyliczona jedynie na momenty ET. A ponieważ różnica DT, między tymi skalami nie jest znana wprzód, stąd równanie czasu nie może zostać wyliczone z wysoką precyzją.

Trudność ta znika jeżeli zamiast równania czasu E, weźmiemy jego modyfikację E^*, zdefiniowaną następująco

$$E^* = \mathcal{RA}\, E\odot_s - \mathcal{RA}\,\odot \tag{14.38}$$

W Astronomical Almanac stabelaryzowano momenty przejścia Słońca[6] przez południk efemerydalny (tzw. ephemeris transit). Są to momenty czasu ET górowania Słońca względem tego południka. Z równania (14.38) mamy

$$E^* = \mathcal{H}_E\odot - \mathcal{H}_E E\odot_s = \mathcal{H}_E\odot - ET + 12$$

W warunkach kulminacji $\mathcal{H}_E\odot = 0$, czyli, gdy ma miejsce przejście Słońca przez południk efemerydalny

$$ET = 12 - E^* \tag{14.39}$$

14.9 Dygresja: czas własny i czas układowy

Rozróżnienie między czasem własnym a czasem układowym (laboratoryjnym) jest konieczne. Czas własny jest mierzony przez obserwatora związanego z powierzchnią Ziemi, jest to interwał czasu na lini świata obserwatora.

Czas laboratoryjny nie jest mierzony bezpośrednio, ale jest lepszą dynamiczną skalą czasu. Czas ten może być stosowany jako zmienna niezależna dla linii świata dowolnego ciała na orbicie okołosłonecznej.

Jak poucza nas teoria, przybliżona, ale dostatecznie precyzyjna zależność między tymi skalami ma postać:

$$t - t_0 = \left[1 + \frac{3m}{2a}\right](s - s_0) + \frac{2m}{a}\frac{e\sin E}{n} \tag{14.40}$$

gdzie:

[6]Duża litera oznacza, że mamy na myśli prawdziwe słońce.

- $m = GM/c^2 \approx 1.5$ km, G to stała grawitacyjna, M jest masą Słońca, c jest prędkością światła,
- a jest półosią wielką orbity ziemskiej,
- e jest mimośrodem orbity ziemskiej,
- n jest ruchem średnim orbity ziemskiej,
- E jest anomalią mimośrodową Ziemi,
- $t_0,\ s_0$ są odpowiednio, czasem laboratoryjnym i własnym momentu przejścia Ziemi przez perihelium.

Ograniczając się do wyrazów zawierających co najwyżej pierwsze potęgi m nieistotne jest rozróżnienie pomiędzy klasycznymi i relatywistycznymi wartościami elementów orbity.

Będziemy identyfikowali czas dynamiczny ziemski TDT z czasem własnym. W oparciu o czas laboratoryjny spróbujemy skonstruować globalny czas dynamiczny tzn. czas TDB, wspomiany już wcześniej. Zakładamy, że między TDT oraz TDB mogą istnieć jedynie różnice okresowe. W równaniu (14.40) są one reprezentowane przez drugi wyraz.

A zatem jako TDB adoptujemy taki czas laboratoryjny T, dla którego mamy

$$TDB = T - T_0 = \left[1 + \frac{3m}{2a}\right]^{-1} (t - t_0) \tag{14.41}$$

Mnożąc równanie (14.40) przez odwrotność $(1 + 3/2 \cdot m/a)$ będziemy mieli

$$\left[1 + \frac{3m}{2a}\right]^{-1} (t - t_0) = (s - s_0) + \frac{2m}{a}\frac{e \sin E}{n} \cdot \left[1 + \frac{3m}{2a}\right]^{-1}$$

po rozwinięciu w szereg po prawej stronie wyrażenia w nawiasie kwadratowym, ograniczając się do wyrazów z m w pierwszej potędze,

$$(1 + \frac{3m}{2a})^{-1} \approx 1 - \frac{3m}{2a} + ..., \qquad \text{bowiem mamy} \qquad \frac{3m}{2a} < 1$$

w wyrażeniu na TDB dostaniemy

$$TDB = TDT + \frac{2m}{a}\frac{e \sin E}{n} \tag{14.42}$$

Kładąc do tego równania

$$\begin{aligned} 2m &= 2.956\ [km], \\ a &= 1.496 \cdot 10^8\ [km], \\ e &= 0.01671, \\ n &= 1.991 \cdot 10^{-7}\ [rad//sek] \end{aligned}$$

dostaniemy

$$TDB = TDT + 0\overset{s}{.}001658 \sin E \tag{14.43}$$

albo po wyeliminowaniu anomalii mimośrodowej E, będzie

$$TDB = TDT + 0\overset{s}{.}001658 \sin M + 0\overset{s}{.}000014 \sin{(2M)} \tag{14.44}$$

gdzie M jest anomalią średnią Ziemi.

14.10 Zadanka na ćwiczenia

1. Dane są interwały czasu:

$$\begin{aligned}
&\text{rok zwrotnikowy} &&= 365.2422,\\
&\text{rok gwiazdowy} &&= 365.2564,\\
&\text{rok anomalistyczny} &&= 365.2596.
\end{aligned}$$

   Oszacuj w przybliżeniu wielkości i znaki rocznej precesji oraz ruchu perihelium orbity ziemskiej.

2. Podaj daty odpowiadające epokom B1985.1672 oraz J1985.1972.

3. Udowodnij, że czas gwiazdowy średni w Greenwich dany jest dla dowolnej epoki T wzorem

$$T_G = 18\overset{\mathrm{h}}{.}6973746 + 879000\overset{\mathrm{h}}{.}0513369\,T$$

   gdzie T jest interwałem w stuleciach juliańskich, liczonym od epoki standardowej. Dlaczego wzór (14.12) z wykładu jest bardziej dokładny?

4. Oblicz czas gwiazdowy w Greenwich odpowiadający dacie 1996 styczeń 1.0 oraz 1997 styczeń 1.0. Rachunek wykonaj z pomocą formuły (14.12) z wykładu oraz podanej wyżej formuły uproszczonej. Wyniki porównaj z odpowiednimi wartościami z rocznika astronomicznego.

Bibliografia

[1] Kołaczek Barbara. *Astronomia sferyczna z ćwiczeniami*. WPW Warszawa, ‘ edition, 1976.

[2] Mietelski Jan. *Astronomia w geografii*. Number ISBN 83-01-13432-1. PWN SA Warszawa, 4 edition, 2005.

[3] A. Murray, C. *Vectorial Astrometry*. Adam Hilger Ltd, Bristol, 1983.