

## Astrofizyka z elementami kosmologii

### Temat 05: Układy współrzędnych, skale czasu

Tadeusz Jan Jopek  
jopek@amu.edu.pl

Tel. 061 829 2778  
Kom. 607 737 620

Rok Akademicki 2008-2009

(Uaktualniono 2009.04.21)

Wstęp  
○○○

Elementy geometryczne na sferze  
○○○○○○○○○○

#### 1 Wstęp

- Koncepcja sfery niebieskiej: źródło
- Koncepcja sfery niebieskiej: zastosowanie
- Definicja sfery

#### 2 Elementy geometryczne na sferze

- Koło wielkie, koło małe, bieguny kół
- Dwukąt sferyczny, kąt sferyczny, trójkąt sferyczny
- Długości łuków na sferze

Wstęp  
○○○

Elementy geometryczne na sferze  
○○○○○○○○○○

## Part I

### Sfera niebieska: koncepcja, elementy geometryczne na sferze

Wstęp  
●○○

Elementy geometryczne na sferze  
○○○○○○○○○○

#### Koncepcja sfery niebieskiej (1)

Źródło koncepcji

Do koncepcji niebieskiej sfery doprowadzają nas następujące spostrzeżenia:



- wygląd rozgwieźdzonego nocnego nieba,
- nie potrafimy rozróżnić, które obiekty są nas bliżej, a które dalej,
- ruch dobowy gwiazd przebiega tak, jak gdyby były one na sztywno przymocowane do niewidocznej sfery.

► Powiększenie

## Koncepcja sfery niebieskiej (2)

Zastosowanie: wyznaczanie położenia ciał niebieskich

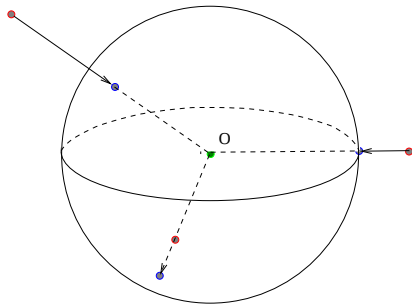


Figure: Rzutowanie gwiazd na sferę niebieską.

W celu wyznaczenia położenia ciała niebieskiego (kierunku propagacji promieniowania E-H) wygodnie jest przyjąć, że:

- kierunek do rzeczywistego obiektu jest identyczny z kierunkiem do jego **rztu** położonego na sferze niebieskiej,
- obserwator znajduje się w środku sfery niebieskiej,
- promień sfery wynosi 1 w dowolnych jednostkach.

## Definicja sfery niebieskiej

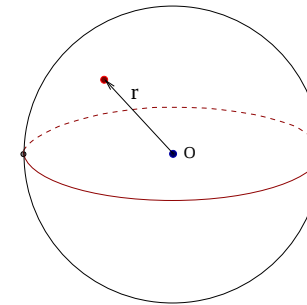


Figure: Jednostkowa sfera o środku w O.

### Definicja

**Sfera** jest to powierzchnia, której punkty są równo odległe od punktu wspólnego zwanego środkiem sfery. Wektory punktów położonych na powierzchni sfery spełniają równanie:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = 1$$

gdzie:  $\mathbf{r}$  oznacza wektor jednostkowy o początku w środku sfery.

## Koło wielkie

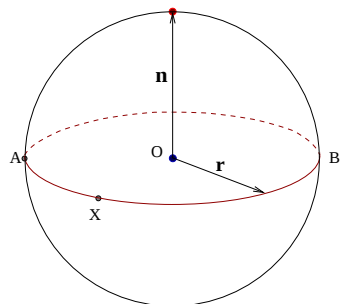


Figure: Koło wielkie AX.

### Definicja

Przecięcie sfery płaszczyzną przechodzącą przez środek sfery jest **kołem wielkim**.

Wektory punktów koła wielkiego spełniają równanie:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{r} = 0 \quad (1)$$

gdzie: wektor jednostkowy  $\mathbf{n}$  wskazuje jeden z biegunów koła wielkiego, natomiast wektor  $\mathbf{r}$  przebiega punkty koła wielkiego.

## Bieguny koła wielkiego

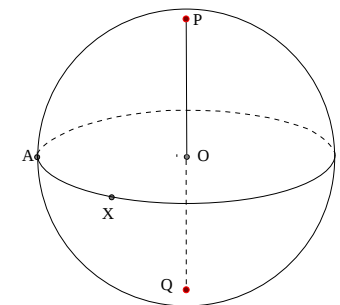


Figure: Koło wielkie i jego bieguny PQ.

### Definicja

Końce średnicy prostopadłej do koła wielkiego nazywane są **biegunami koła wielkiego**. Np. biegunami koła wielkiego AX są punkty P i Q.

Przez bieguny P, Q można wykreślić nieskończenie wiele kół wielkich.

Dwa punkty sfery, które nie są punktami biegunowymi, np. A i X, wyznaczają jedno koło wielkie bowiem łącznie ze środkiem sfery (punktem O) jednoznacznie określają płaszczyznę, której przecięcie ze sferą jest kołem wielkim.

## Koło małe

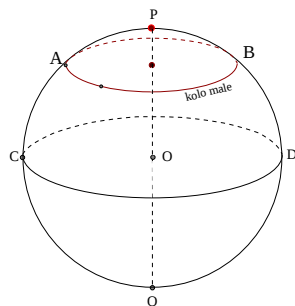


Figure: Koło małe AB i jego bieguny PQ.

## Definicja

Przecięcie sfery płaszczyzną nie przechodzącą przez środek sfery jest okręgiem, tradycyjnie zwanym **kołem małym**.

Jego bieguny  $P$  i  $Q$  są punktami skrajnymi średnicy sfery prostopadłej do płaszczyzny koła małego.

Promień koła małego jest zawsze mniejszy od promienia sfery.

## Dwukąt sferyczny

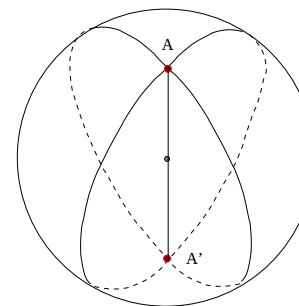


Figure: Dwukąt sferyczny.

## Definicja

Przecięcie sfery dwoma kołami wielkimi wyznacza cztery obszary (powierzchnie) zwane **dwukątami sferycznymi**.

Dwukąt sferyczny określony jest **kątem sferycznym**, np. kątem  $A$ .

Pole powierzchni dwukąta można obliczyć ze wzoru

$$S = 2r^2 A$$

gdzie  $A$  podany jest w radianach.

## Kąt sferyczny

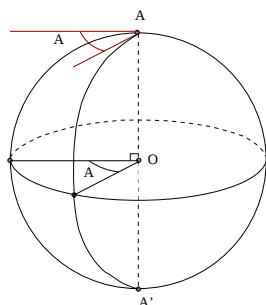


Figure: Kąt sferyczny A.

## Definicja

Kąt liniowy pomiędzy płaszczyznami kół wielkich jest **kątem sferycznym**.

Jest on identyczny z kątem pomiędzy stycznymi wystawionymi w punkcie wzajemnego przecięcia się kół wielkich.

## Trójkąt sferyczny

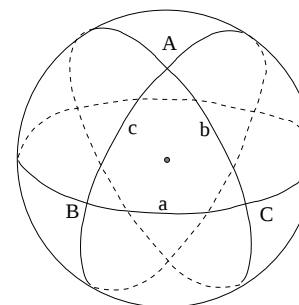


Figure: Trójkąt sferyczny.

## Definicja

Trzy koła wielkie tworzą na sferze osiem obszarów zwanych **trójkątami sferycznymi**.

Gdy dostępne są elementy jednego z tych trójkątów (trzy boki (łuki)  $a, b, c$  oraz kąty wewnętrzne  $A, B, C$ ), można łatwo wyznaczyć elementy wszystkich pozostałych trójkątów.

## Dla ciekawych

A na ile obszarów podzieli sferę  $n$  kół wielkich?

## Trójkąt sferyczny paralaktyczny: własności (1)

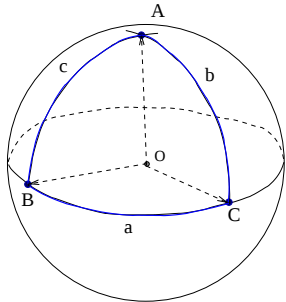


Figure: Trójkąt sferyczny ABC, paralaktyczny (eulerowski). Wszystkie boki  $a, b, c$  trójkąta paralaktycznego są mniejsze od  $\pi$ .

## Definicja

Dla dowolnego z boków  $a, b, c$  i kątów sferycznych  $A, B, C$  mamy:

$$a < b + c$$

$$a > |b - c|$$

$$\pi < A + B + C < 3\pi$$

Trójkąt płaski posiada tylko jeden kąt prosty, trójkąt sferyczny niekoniecznie, może mieć ich dwa a nawet trzy.

## Trójkąt sferyczny: własności (2)

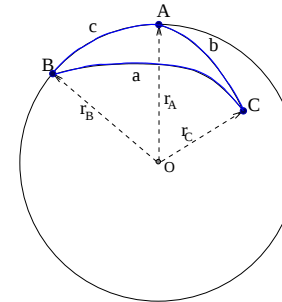


Figure: Trójkąt paralaktyczny ABC.

## Definicja

Różnica

$$(A + B + C) - \pi = \varepsilon$$

jest **nadmiarem sferycznym**.

Pole powierzchni trójkąta sferycznego wynosi

$$S = r^2 \varepsilon$$

gdzie  $r$  jest promieniem sfery, a kąt  $\varepsilon$  podano w radianach.

## Długość łuku koła wielkiego

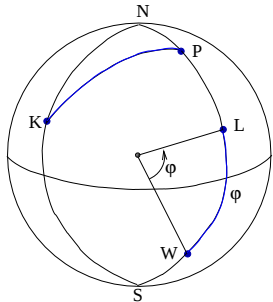


Figure: Ortodromy LW, KP — linie geodezyjne na sferze.

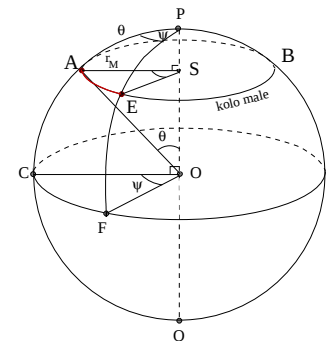
## Ortodroma

Na punktach  $L, W$  rozpięte są dwa łuki koła wielkiego, mniejszy z nich to **linia geodezyjna (ortodroma)**. Jest to najkrótsza krzywa łącząca na sferze punkty  $L$  i  $W$ .

Linie geodezyjne pełnią na sferze rolę taką jak linie proste w geometrii euklidesowej.

Ponieważ promień sfery niebieskiej  $r = 1$ , to długość łuku  $LW$  koła wielkiego równa jest kątowi środkowemu  $\phi$  (w radianach) jaki ten łuk rozpina względem środka sfery.

## Długość łuku koła małego



## Izogona

Na punktach  $A, E$  rozpięte są dwa łuki koła małego. Krótszy z nich, tzw. **izogona** ma długość  $AE$  daną formułą:

$$AS = AO \cdot \sin AOS$$

$$r_M = \sin \theta$$

$$AE = r_M \cdot ASE = \psi \sin \theta$$

(2)

## Part II

### Współrzędne punktów na sferze.

- 3 Położenia ciał niebieskich na sferze
- Współrzędne prostokątne ciał niebieskich
  - Współrzędne sferyczne.
  - Współrzędne sferyczne i prostokątnych.

### Położenie punktów w przestrzeni (1)

#### Triada

Niech dana jest trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa, a w niej układ osi współrzędnych  $(x, y, z)$  rozpięty na trójce wersorów  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Niech między wersorami spełnione będą następujące zależności:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{k} \times \mathbf{i} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i} \times \mathbf{j}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\mathbf{i}^T \mathbf{i} = \mathbf{j}^T \mathbf{j} = \mathbf{k}^T \mathbf{k} = 1$$

Trójkę  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  możemy ująć w formie macierzy  $3 \times 3$  zwanej **triadą**  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \quad (4)$$

Jej elementy są cosinusami kierunkowymi kierunków  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

### Położenie punktów w przestrzeni (2)

#### Triada ortogonalna

Transpozycja triady  $\mathbf{R}$  ma postać

$$\mathbf{R}^T = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \\ \mathbf{j}^T \\ \mathbf{k}^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

Iloczyn

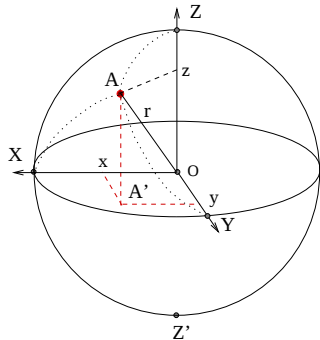
$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \mathbf{i} & \mathbf{i}^T \mathbf{j} & \mathbf{i}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{j}^T \mathbf{i} & \mathbf{j}^T \mathbf{j} & \mathbf{j}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{k}^T \mathbf{i} & \mathbf{k}^T \mathbf{j} & \mathbf{k}^T \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Co pociąga

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

czyli triada  $\mathbf{R}$  jest macierzą ortogonalną.

## Położenie punktów w przestrzeni (3)



### Wektor położenia

Stwierdzenie, że wektor  $\mathbf{r}$  opisuje położenie punktu A oznacza, że znane są jego składowe  $(x, y, z)$ , trzy liczby wyznaczone względem pewnej triady  $\mathbf{R}$ . Zwięźle wyrażamy to za pomocą zapisu

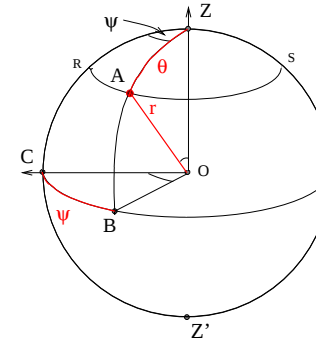
$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} \quad (7)$$

Dla sfery jednostkowej prawdziwy jest związek

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (8)$$

zatem, w celu ustalenia położenia ciała niebieskiego wystarczy posłużyć się dwiema liczbami.

## Położenie punktów na sferze (1)

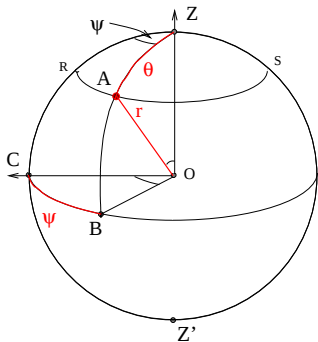


### Współrzędne sferyczne (1)

Astronomowie lubią posługiwać się współzrędnymi sferycznymi  $(r, \theta, \psi)$ , bliższymi intuicyjnemu wyczuciu kierunku do punktu A:

- $r = OA = 1$  jest **współzrędną radialną** punktu A,
- $\theta$  jest **współzrędną polarną** punktu A, ( $\theta = ZOA$ ),
- $\psi$  jest **współzrędną azymutalną** punktu A równą kątowi sferycznemu pomiędzy płaszczyznami  $ZOB$  i  $ZOC$ .

## Położenie punktów na sferze (2)



### Współrzędne sferyczne (2)

Ponieważ  $r = 1$ , zatem położenie ciała na sferze w pełni wyznaczają dwie współzrędną kątową  $(\psi, \theta)$ .

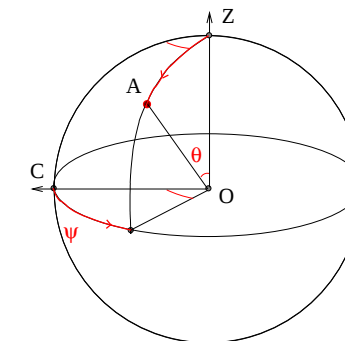
Dla ustalenia położenia punktów na całej sferze, wystarczy jeśli współzrędną  $(\psi, \theta)$  przyjmą wartości należące do dziedziny

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta &\leq \pi \\ 0 \leq \psi &\leq 2\pi \end{aligned} \quad (9)$$

### Uwaga!

A w jaki sposób za pomocą współzrędną  $(\theta, \psi)$  należałoby określić położenie punktów Z, Z'?

## Położenie punktów na sferze (3)

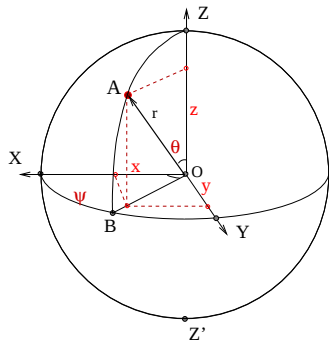


### Układ współzrędną sferycznych

W celu zdefiniowania **jakiegokolwiek** układu współzrędną sferycznych należy:

- dokonać wyboru bieguna Z, względem którego mierzona jest współzrędną — kąt polarny  $\theta$ ,
- dokonać wyboru koła wielkiego ZC pełniącego rolę płaszczyzny odniesienia, względem której mierzony jest dwusieczny kąt azymutalny  $\psi$ .
- ustalić skrętność układu,
- ustalić jednostki miary i dziedzinę wartości kątów  $\theta$  i  $\psi$ .

## Układy współrzędnych sferycznych i prostokątnych



Każdy układ współrzędnych sferycznych ma odpowiednik prostokątny:

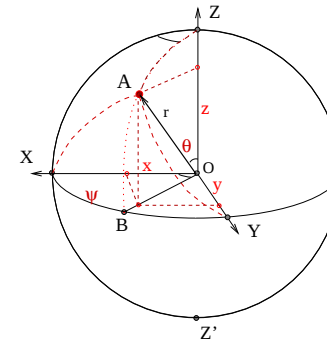
- oś Z przechodzi przez biegun układu sferycznego,
- oś X leży w płaszczyźnie koła odniesienia współrzędnej azymutalnej  $\psi$ ,
- oś Y dobrana jest tak by zapewnić zgodność skrętności obu układów.

W praktyce wykorzystane są współrzędne sferyczne jak i prostokątne. Podejście sferyczne jest zwykle oszczędniejsze rachunkowo, podejście wektorowe jest ogólniejsze i eleganckie.

### Part III

#### Klasyfikacja astronomicznych układów współrzędnych.

## Przemiany współrzędnych sferycznych i prostokątnych



### Związki $(xyz) \leftrightarrow (r, \theta, \psi)$

Składowe  $(x, y, z)$  są cosinusami kierunkowymi odcinka  $OA$  względem osi  $X, Y, Z$

$$\begin{aligned} x &= \cos XA \\ y &= \cos YA \\ z &= \cos ZA \end{aligned} \quad (10)$$

Dla współrzędnych  $x, y, z$  oraz  $\psi, \theta$  tego samego punktu  $A$  mamy związki

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \psi \\ y &= \sin \theta \sin \psi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

#### 4 Wstęp

#### 5 Dygresja.

- Współrzędne sferyczne na powierzchni Ziemi

## Klasyfikacja układów współrzędnych (1)

## Definicja

Układ współrzędnych definiujemy poprzez wybór bieguna współrzędnej polarnej  $\phi$  oraz płaszczyzny odniesienia współrzędnej azymutalnej  $\psi$ . Ale nie do końca, potrzeba jeszcze umiejscowienia początku układu, identycznego ze środkiem sfery. Wyróżniamy tu:

- układ współrzędnych **topocentrycznych**, o początku na powierzchni Ziemi,
- układ współrzędnych **geocentrycznych**, o początku w środku masy Ziemi,
- układ **heliocentryczny**, o początku w centrum Słońca,
- układ **barycentryczny**, o początku w barycentrum Układu Słonecznego,
- układ **lunocentryczny**, o początku w centrum Księżyca,
- układ **galaktocentryczny**, o początku w środku mas Galaktyki,
- ....

## Klasyfikacja układów współrzędnych (2)

## Definicja

W każdym z tych początków można dokonać wyboru bieguna układu i płaszczyzny odniesienia i w rezultacie otrzymać:

- układ horyzontalny,
- układ godzinny,
- układ równikowy,
- układ ekliptyczny,
- układ galaktyczny.

Każdy układ współrzędnych sferycznych może być zastąpiony przez jego prostokątny ekwiwalent (odpowiednio lewo lub prawo skrętny).

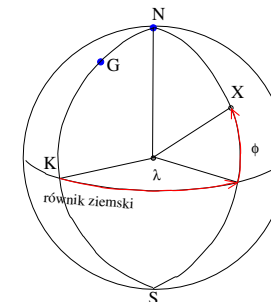
## Klasyfikacja układów współrzędnych (2)

## Definicja

Układy współrzędnych wykorzystywane są zależnie od potrzeby, np.:

- katalogi zestawiane są we współrzędnych równikowych,
- ustawienie teleskopu przygotowuje się w układzie horyzontalnym lub godzinny,
- ruch ciał Układu Słonecznego dogodnie jest badać w układzie ekliptycznym,
- etc.
- Wobec takiej różnorodności, w celu ułatwienia astronomom współpracy koniecznym było wprowadzenie pewnych standardów.

## Dygresja: współrzędne na powierzchni sferycznej Ziemi



Na powierzchni Ziemi położenie wyznaczone jest za pomocą pary  $(\lambda, \phi)$  — długości i szerokości geograficznej. Są to współrzędne określone względem układu o:

- biegunie w północnym biegunie  $N$  ziemskiej sfery,
- płaszczyźnie odniesienia  $NGK$  pokrywającej się z płaszczyzną południka podstawowego instrumentu w Obserwatorium Greenwich.

Współrzędne  $\lambda, \phi$  zdefiniowane są jako kąty:

$$\lambda = \angle GNX, \quad \phi = 90^\circ - \angle NX$$

przyjmujące wartości z przedziałów:

$$-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$$

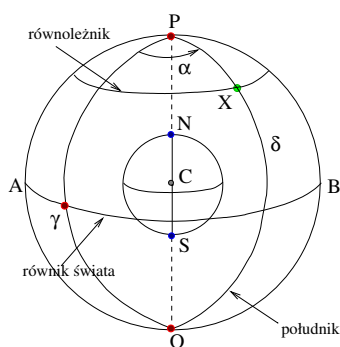
Ujemna wartość długości geograficznej dotyczy punktów położonych na zachód od Greenwich.

## Part IV

### Astronomiczne układy współrzędnych.

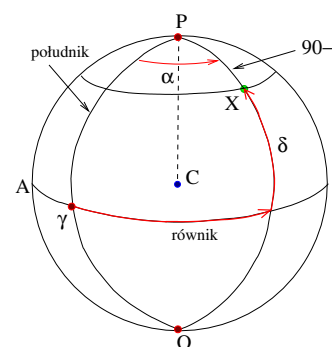
- 6 Astronomiczne układy współrzędnych.
  - Układ współrzędnych równikowych  $\alpha, \delta$ .
  - Układ współrzędnych horyzontalnych  $a, h$ .
  - Układ współrzędnych godzinnych  $\mathcal{H}, \delta$ .
  - Dygresja: ruch dobowy sfery niebieskiej.
  - Dygresja: rozwiązanie trójkąta paralaktycznego  $PZG$ .
  - Współrzędne ekliptyczne

### Układ współrzędnych równikowych (1)



- Astronomiczny układ **współrzędnych równikowych** zdefiniowany jest w sposób bardzo podobny do omówionego wyżej dla powierzchni Ziemi.
- Rysunek ilustruje sferę niebieską oraz umieszczoną w jej wnętrzu kulę ziemską. Przedłużenie osi obrotu Ziemi  $NS$ , przebija sferę niebieską w  $P$  i  $Q$  — północnym i południowym **biegunie świata**.
- Rozciągnięta w przestrzeni płaszczyzna równika ziemskiego przecina sferę niebieską wzdłuż koła wielkiego zwanego **równikiem świata**.
- Koła małe równoległe do równika są **równoleżnikami**, a wszystkie koła wielkie przecinające się w biegunach świata są **południkami**.

### Układ współrzędnych równikowych (2)



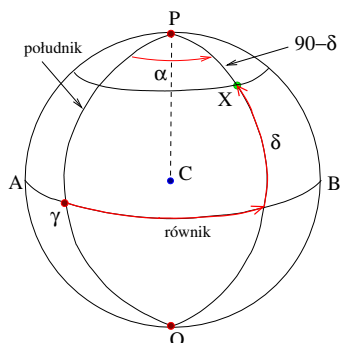
#### Definicja układu równikowego (1)

- biegun świata  $P$  jest biegunem układu,
- płaszczyzną odniesienia rektascensji jest płaszczyzna południka  $P\Upsilon Q$ ,
- współrzędne równikowe punktu  $X$  definiujemy jako kąty:

$$\begin{aligned}\delta &= 90^\circ - \angle PX \\ \alpha &= \angle \Upsilon PX\end{aligned}\quad (12)$$

- **rektascensja**  $\alpha$  mierzona jest wzdłuż równika w kierunku antyżegarowym dla obserwatora znajdującego się na północnym biegunie świata  $P$ .
- **deklinację**  $\delta$  mierzymy w płaszczyźnie południka obiektu  $X$

## Układ współrzędnych równikowych (3)



### Definicja układu równikowego (2)

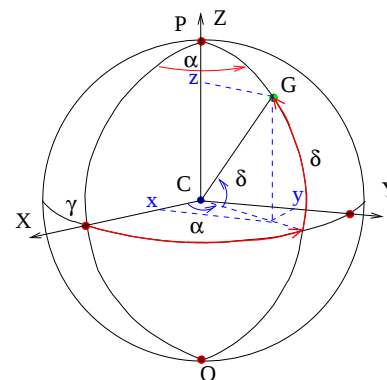
- współrzędne  $\alpha, \delta$  przyjmują wartości z przedziałów:

$$\begin{aligned} -90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ \\ 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \end{aligned} \quad (13)$$

- tradycyjną miarą rektascensji są jednostki czasu a nie stopnie. Pamiętając, że  $24^h = 360^\circ$ , mamy między nimi zależności:

$$\begin{aligned} 1^h &= 15^\circ & 1^\circ &= 4^m \\ 1^m &= 15' & 1' &= 4^s \\ 1^s &= 15'' & 1'' &= 1/15^s \end{aligned} \quad (14)$$

## Układ współrzędnych równikowych (4)



### Definicja układu równikowego (3)

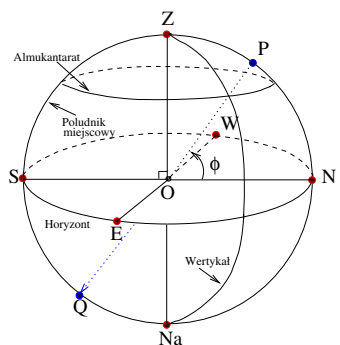
Obok sferycznych stosowane są **równikowe współrzędne prostokątne**  $(x, y, z)$  określone względem układu osi XYZ.

Dla sfery jednostkowej, współrzędnym  $(\alpha, \delta)$  punktu G odpowiadają współrzędne  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta \cos \alpha \\ y &= \cos \delta \sin \alpha \\ z &= \sin \delta \end{aligned} \quad (15)$$

Współrzędne równikowe  $\alpha, \delta$  oraz  $x, y, z$  mają bardzo pożądaną własność — ich wartości nie zmieniają się w efekcie ruchu wirowego Ziemi.

## Układ współrzędnych horyzontalnych (1)

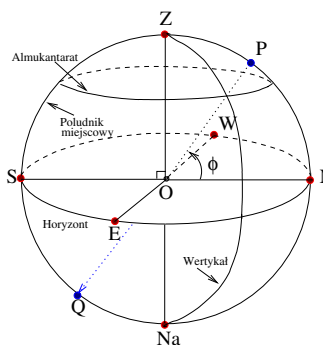


### Definicje

Dana jest sfera rozpięta nad obserwatorem O gdzieś na północnej półkuli ziemskiej:

- kierunek lokalnej grawitacji (kierunek pionu) a ściślej jego przedłużenie, przebiega sferę w **zenicie** Z i **nadirze** Na,
- koło wielkie o biegunach w Z i Na nazywamy **horyzontem**,
- koła wielkie przecinające się w Z i Na nazwano **kołami wierzchołkowymi** albo **wertykałami**,
- koła małe o biegunach w Z i Na nazywane są **almukantaratami**,
- prosta przechodząca przez O, równoległa do ziemskiej osi rotacji tzw. **oś świata** przebiega sferę w P i Q, północnym południowym biegunie świata,

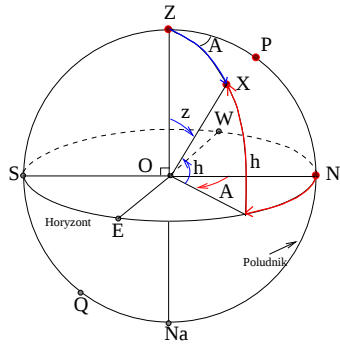
## Układ współrzędnych horyzontalnych (2)



### Definicje

- nachylenie osi świata do horyzontu jest równe szerokości geograficznej  $\phi$  obserwatora O,
- koło wielkie ZP nosi miano **południka miejscowego** albo **południka obserwatora**,
- południk miejscowy przecina horyzont w **punktach północy i południa** N i S leżących na tej samej średnicy,
- punkty wschodu i zachodu** (E, W) znajdują się w odległości kątowej  $90^\circ$  od S i N,
- Punkty N, E, S, W nazywane są **punktami kardynalnymi** horyzontu,
- wertykały przechodzące przez punkty W i E nazwano **pierwszymi wertykałami**.

## Układ współrzędnych horyzontalnych (3)



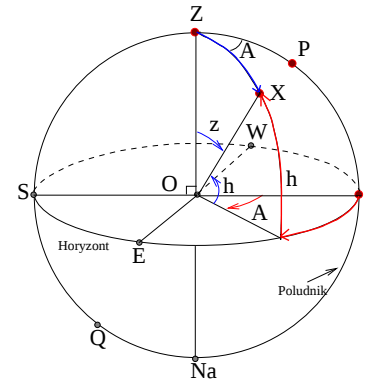
### Definicja układu horyzontalnego (1)

- biegunem układu jest zenit  $Z$ ,
- płaszczyzną odniesienia azymutu jest płaszczyzna południka  $ZPNaQS$ ,
- współrzędne horyzontalne  $A, z, h$  punktu  $X$  definiujemy jako kąty:

$$\begin{aligned} z &= ZX \\ h &= 90^\circ - z \\ A &= PZX \end{aligned} \quad (16)$$

- **azymut**  $A$  mierzony jest od punktu północy  $N$  w stronę punktu wschodu  $E$ ,
- **odległość zenitalną**  $z$  i **wysokość**  $h$  mierzymy w płaszczyźnie wertykału  $ZX$  obiektu  $X$ ,

## Układ współrzędnych horyzontalnych (4)



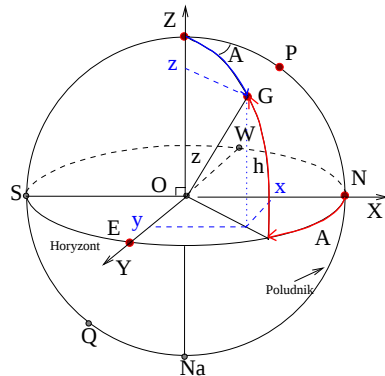
### Definicja układu horyzontalnego (2)

- współrzędne  $A, z, h$  przyjmują wartości z przedziałów:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 180^\circ \\ -90^\circ &\leq h \leq 90^\circ \\ 0^\circ &\leq A \leq 360^\circ \end{aligned}$$

Współrzędne horyzontalne mają lokalny, miejscowy charakter, co oznacza zależność  $A, z, h$  od wyboru położenia punktu  $O$  na powierzchni Ziemi. Dla ustalonego miejsca  $O$ , w wyniku ruchu dobowego sfery wartości współrzędnych horyzontalnych ulegają zmianom w czasie.

## Układ współrzędnych prostokątnych horyzontalnych (5)



### Definicja układu horyzontalnego (3)

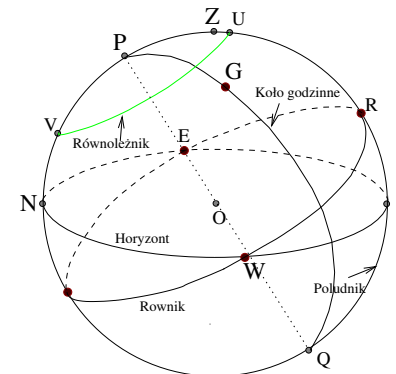
Dla sfery jednostkowej współrzędnym  $(A, h)$  punktu  $G$  odpowiadają współrzędne  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} x &= \cos h \cos A \\ y &= \cos h \sin A \\ z &= \sin h \end{aligned} \quad (17)$$

Układ horyzontalny jest układem lewoskrętnym, czego nie da się uniknąć jeśli współrzędna  $A$  ciała niebieskiego ma wzrastać zgodnie z kierunkiem dobowego ruchu sfery.

## Układ współrzędnych godzinnych (1)

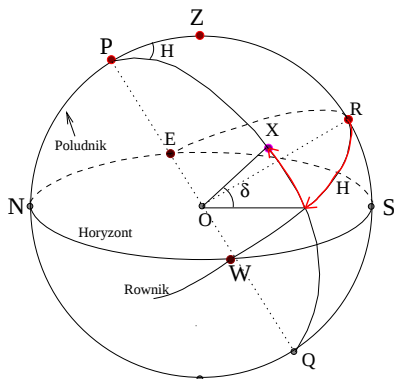
Układ współrzędnych godzinnych jest hybrydą układu równikowego i horyzontalnego. Jego biegunem jest północny biegun świata a płaszczyzną odniesienia współrzędnej azymutalnej jest południk miejscowy  $PZSQ$ .



### Definicje

- koła wielkie przechodzące przez bieguny świata np.  $PGQ$ , nazwano **kołami godzinnymi**,
- koła małe o biegunach w  $P$  i  $Q$ , noszą miano **równoleżników deklinacji**.

## Układ współrzędnych godzinnych (2)



### Definicja układu godzinnego (1)

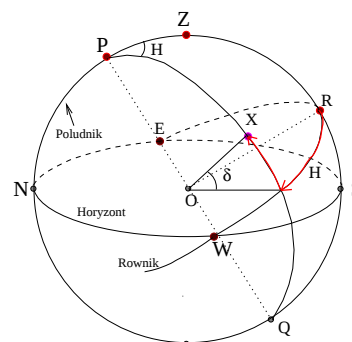
- biegunem układu jest północny biegun świata  $P$ ,
- płaszczyzną odniesienia kąta godzinnego jest płaszczyzna południka  $PZSQ$ ,
- współrzędne godzinne  $\mathcal{H}$ ,  $\delta$  punktu  $G$  definiujemy jako kąty:

$$\begin{aligned}\delta &= 90^\circ - PG \\ \mathcal{H} &= ZPG\end{aligned}\quad (18)$$

- a ich wartości należą do przedziałów:

$$\begin{aligned}-90^\circ &\leq \delta \leq 90^\circ \\ 0 &\leq \mathcal{H} \leq 24^h\end{aligned}\quad (19)$$

## Układ współrzędnych godzinnych (3)

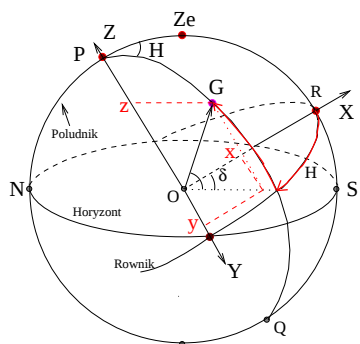


### Definicja układu godzinnego (2)

- **kąt godzinny**  $\mathcal{H}$  jest kątem dwuściennym pomiędzy płaszczyznami kół godzinnych  $PZSQ$  i  $PGQ$ ; wartości  $\mathcal{H}$  wzrastają w stronę punktu zachodu  $W$ , zgodnie z dobowym ruchem sfery,
- **deklinację**  $\delta$  mierzymy w płaszczyźnie koła godzinnego obiektu  $G$ , poczynając od płaszczyzny równika; na półsfery północnej  $\delta > 0$ .

- Układ godzinny jest związany z miejscem obserwacji ale w mniejszym stopniu, bowiem jedynie kąt godzinny zależy od wyboru miejsca obserwacji i czasu. Wartość deklinacji obiektu nie ulega zmianie na skutek ruchu wirowego sfery.

## Układ współrzędnych godzinnych prostokątnych (4)



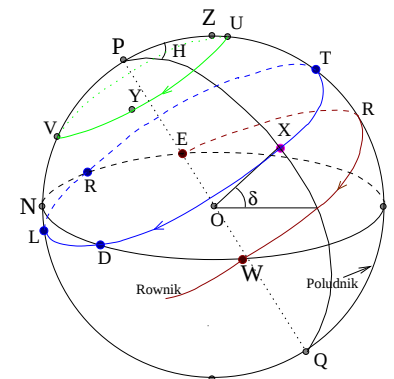
### Definicja układu godzinnego (3)

Dla sfery jednostkowej współrzędnym  $(\mathcal{H}, \delta)$  punktu  $G$  odpowiadają współrzędne  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned}x &= \cos \delta \cos \mathcal{H} \\ y &= \cos \delta \sin \mathcal{H} \\ z &= \sin \delta\end{aligned}\quad (20)$$

Układ godzinny jest układem lewoskrętnym, czego nie da się uniknąć jeśli współrzędna  $KG$  ciała niebieskiego ma wzrastać zgodnie z kierunkiem dobowego ruchu sfery.

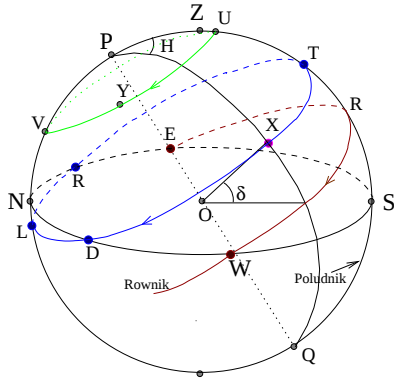
## Dygresja: ruch dobowy sfery na szerokości $\phi$



### Ruch dobowy gwiazd

- sfera obraca się jednostajnie wokół osi świata  $PQ$  z szybkością  $\omega = 15 [^\circ/\text{godz}]$ ,
- dobowe trajektorie gwiazd są równoleżnikami np.  $UYV$ ,  $LRTD$ , albo równikiem świata  $ERW$ ,
- punkt  $T$  równoleżnika gwiazdy  $G$  o największej wysokości nazywamy punktem **kulminacji górnej**, punkt o najmniejszej wysokości nazywamy punktem **kulminacji dolnej**,
- punkty o zerowej wysokości to miejsca **wschodu** i **zachodu** obiektu, wypadające po stronie punktów  $E$  i  $W$  odpowiednio.

## Dygresja: ruch dobowy sfery na szerokości $\phi$ , cd.



### Ruch dobowy gwiazd cd.

- w wyniku ruchu dobowego wzrastają  $\mathcal{H}$  oraz  $A$ , wysokość  $h$  oscyluje pomiędzy wartościami odpowiadającym kulminacjom, natomiast  $\delta = \text{const}$ ,
- gwiazdy o deklinacjach:

$$\delta > 90^\circ - \phi, \quad \phi > 0 \quad (21)$$

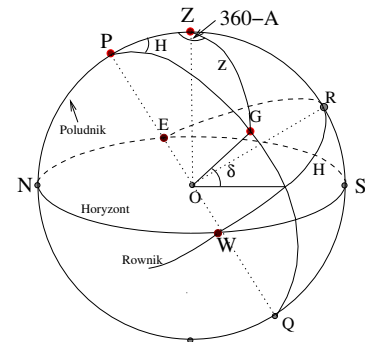
tzw. **okołobiegunowe** poruszają się zawsze nad horyzontem

- natomiast gwiazdy, dla których:

$$-\delta > 90^\circ - \phi, \quad \phi > 0 \quad (22)$$

przebywają zawsze pod horyzontem.

## Dygresja: rozwiązanie trójkąta paralaktycznego $PZG$ (1).



### Przemiana współrzędnych $A, h$ i $\mathcal{H}, \delta$

- trójkąt sferyczny  $PZG$  tworzą: obiekt  $G$  oraz bieguny obu układów:  $P$  i  $Z$ ,
- z definicji obu układów mamy:

$$\begin{aligned} PZG &= 360^\circ - A & ZPG &= \mathcal{H} \\ ZG &= z & PG &= 90^\circ - \delta \\ PZ &= 90^\circ - \phi, \end{aligned}$$

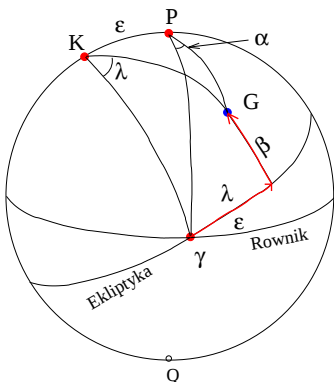
- a ze wzoru cosinusów:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos z \sin \phi + \sin z \cos \phi \cos A \\ \cos z &= \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \mathcal{H} \end{aligned}$$

- w celu normalizacji kątów  $A$  i  $\mathcal{H}$  mamy:

$$\begin{aligned} 180^\circ \leq A \leq 360^\circ &\Leftrightarrow 0^h \geq \mathcal{H} \geq 12^h \\ 0^\circ < A < 180^\circ &\Leftrightarrow 12^h < \mathcal{H} < 24^h \end{aligned}$$

## Układ współrzędnych ekliptycznych



### Definicja

- biegun układu — północny **biegun ekliptyki**  $K$  odległy o  $\varepsilon = 23.5^\circ$  od północnego bieguna świata  $P$ ,
- punkt zerowy długości ekliptycznej — punkt równonocy wiosennej  $\Upsilon$ ,
- współrzędne ekliptyczne punktu  $G$  definiujemy jako kąty:

$$\beta = 90^\circ - \angle KG, \quad \lambda = \angle \Upsilon KG \quad (23)$$

- długość ekliptyczną**  $\lambda$  mierzymy wzdłuż ekliptyki w kierunku rocznego ruchu Słońca, **szerokość ekliptyczną**  $\beta$  mierzymy w płaszczyźnie południka  $KG$  obiektu  $G$ , przy czym

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \lambda \leq 360^\circ$$

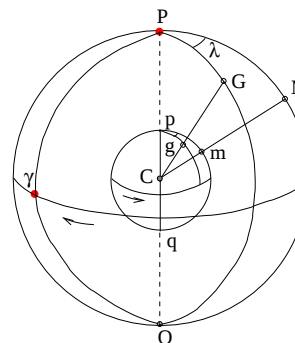
## Part V

### Skale czasu.

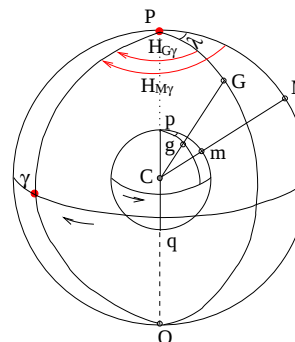
- Skala czasu gwiazdowego.
- Czas słoneczny prawdziwy.
- Czas słoneczny średni.

- względem obserwatora w  $g$ , kąt godzinny punktu barana wynosi  $GP\Upsilon = \mathcal{H}_{G\Upsilon}$ .
- względem obserwatora w  $m$ , kąt godzinny punktu barana wynosi  $\mathcal{H}_{M\Upsilon} = MP\Upsilon$ ,
- co pociąga:

$$\mathcal{H}_M \gamma = \mathcal{H}_G \gamma + \lambda \quad (24)$$



- $p$  i  $q$  oznaczają geograficzne bieguny ziemskie, przedłużenia odcinków  $Cp$  i  $Cq$  przebiegają niebieską sferę w  $P, Q$  — w północnym i południowym biegunie świata,
- $g$  oznacza Greenwich a punkt  $m$  obserwatora na powierzchni Ziemi na długości geograficznej  $\lambda$ .
- półproste  $Cg$  i  $Cm$  przebiegają sferę w punktach  $G$  i  $M$ ;  $G$  jest zenitem horyzontu obserwatora w Greenwich, łuk  $PGQ$  jest południkiem miejscowym tegoż obserwatora,
- podobnie łuk  $PMQ$  jest południkiem miejscowym obserwatora w miejscu  $M$ ,
- kąt sferyczny  $GPM$  wynosi  $\lambda$ .



- **miejscowy czas gwiazdowy** jest równy  
kątownemu godzinnemu punktu  $\Upsilon$ , czyli czas  
gwiazdowy w Greenwich:

$$\mathcal{CG}_G = \mathcal{H}_G \Upsilon$$

- czas gwiazdowy obserwatora w  $m$ :

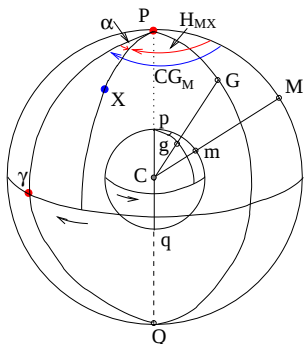
$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{H}_M \Upsilon$$

- a wobec (24), mamy:

$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{CG}_G + \lambda \quad (25)$$

- jednostką czasu gwiazdowego jest **doła gwiazdowa** równa interwałowi czasu między dwiema kulminacjami górnymi punktu równonocy wiosennej  $\Upsilon$ .

## Rektascensja i kąt godzinny



### Definicje

Czas gwiazdowy jest znakomitym łącznikiem między rektascensją i kątem godzinnym obiektu.

- gwiazda  $X$  o rektascensji  $\mathcal{RA}_X = \alpha$ , względem obserwatora w  $m$  ma kąt godzinny  $MPX = \mathcal{H}_{MX}$ .
- z rysunku widzimy, że:

$$\mathcal{CG}_M = \mathcal{H}_{MX} + \mathcal{RA}_X \quad (26)$$

- Równanie (26) jest prawdziwe dla dowolnego ciała niebieskiego i dowolnego obserwatora na powierzchni Ziemi i służy do przemiany (transformacji) współrzędnych godzinnych w równikowe i odwrotnie.

## Prawdziwy czas słoneczny (1)

- Skala czasu określona za pomocą kąta godzinnego punktu barana  $\Upsilon$ , aczkolwiek bardzo regularna i przydatna w wielu zastosowaniach, nie nadaje się do regulacji działalności człowieka,
- czas cywilny powinien zależeć od kąta godzinnego Słońca, obiektu towarzyszącego człowiekowi w życiu codziennym,
- konceptcję czasu opartą o obserwację Słońca nazwano czasem słonecznym, jej podstawową jednostkę **dobę słoneczną** zdefiniowano jako interwał pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami Słońca na południku obserwatora,
- w skali czasu słonecznego mierzony jest kąt godzinny Słońca (ściśle środek jego tarczy), stąd mówimy o czasie **słonecznym prawdziwym**.

## Prawdziwy czas słoneczny (2)

### Definicje

- definicja skali czasu słonecznego prawdziwego ma postać

$$\text{Miejskowy prawdziwy czas słoneczny} = 12^h + \mathcal{H}_{M\odot}$$

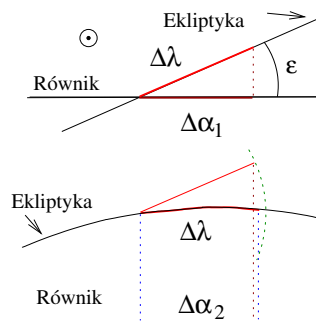
- dla obserwatora w  $m$  czas słoneczny i gwiazdowy wiążą się za pomocą równania (26), w którym Słońce zastępuje punkt  $X$ :

$$\text{Miejskowy prawdziwy czas słoneczny} = \mathcal{CG}_M + 12^h - \mathcal{RA}_{\odot} \quad (27)$$

- w interwale jednego roku zwrotnikowego rektascensja Słońca powiększa się o  $24^h$ , i dlatego, w okresie tym liczba dób gwiazdowych jest o jeden większa aniżeli liczba dób słonecznych. [▶ Zal. 1](#)

- Skala prawdziwego czasu słonecznego jest złożeniem ruchu wirowego i orbitalnego Ziemi co ma poważny wpływ na jej regularność.

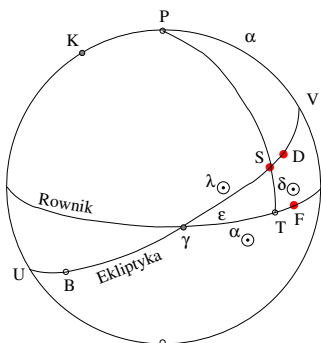
## Niejednostajność czasu słonecznego prawdziwego



Nierównomierność skali prawdziwego czasu słonecznego wynika z:

- niejednostajności kąтового ruchu orbitalnego Ziemi ( $E$ ); np. w peryhelium ruch przebiega szybciej niż w aphelium,
- nachylenia orbity pozornego rocznego ruchu Słońca; ekliptyka tworzy z równikiem świata kąt  $\epsilon$ ; rzuty dwóch identycznych łuków na ekliptyce mają na równiku różne długości;

- Oba efekty powodują nierównomierne przyrosty rektascensji Słońca na tyle duże, że wyklucza to wykorzystanie prawdziwego czasu słonecznego do regulacji życia cywilnego mieszkańców Ziemi.



- $\tau$  — moment przejścia Ziemi przez aphelium, Słońce jest wówczas w  $B$ ,
- $n = 360^\circ / \text{rok}$  — średnia kątowa prędkość Ziemi na orbicie,
- punkt  $D$  — **dynamiczne słońce średnie**, fikcyjny obiekt poruszający się po ekliptyce z prędkością  $n$ , przez  $B$  przechodzi w tej samej chwili co Słońce,
- w chwili  $t$  prawdziwe Słońce znajduje się w  $S$  a słońce dynamiczne w  $D$ , :

$$BD = n(t - \tau)$$

- Pomysł z dynamicznym słońcem usuwa nieregularności w przyrostach długości ekliptycznej. Niestety nie usuwa wpływów nachylenia ekliptyki do równika.

### Definicja

- Skala czasu słonecznego średniego:

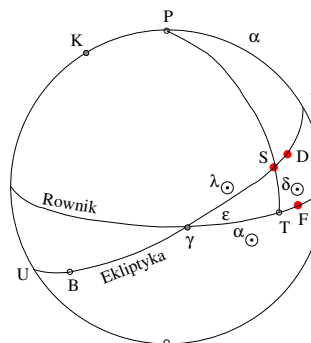
$$\text{Miejscowy sredni czas sloneczny} = 12^h + \mathcal{H}_{MS\odot}$$

gdzie  $\mathcal{H}_{MS\odot}$  jest kątem godzinnym słońca średniego w danym miejscu obserwacji,

- podobnie do (27), czas gwiazdowy i czas średni słoneczny związane są zależnością:

$$\text{Miejscowy sredni czas sloneczny} = \mathcal{C}\mathcal{G}_M + 12^h - \mathcal{R}\mathcal{A}_{S\odot} \quad (28)$$

gdzie  $\mathcal{RA}_{\odot}$  jest rektascensją słońca średniego,



- punkt  $F$  — **fikcyjne słońce średnie**, porusza się po równiku ze stałą prędkością  $n$ , przechodzi przez punkty równonocy jednocześnie ze słońcem dynamicznym,
- w momencie  $t$ , fikcyjne słońce znajduje się w  $F$ , wówczas na mocy definicji obu słońc:

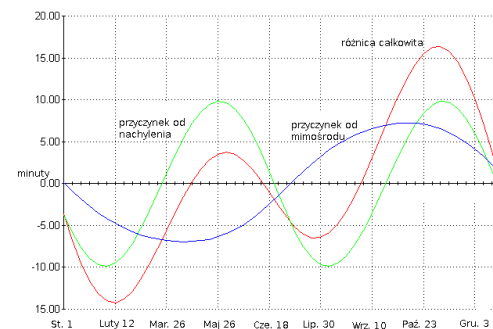
$$\gamma F = \gamma D$$

- Fikcyjne słońce średnie jest punktem o jednostajnie zmieniającej się rektascensji, zatem, nadaje się do realizacji skali czasu słonecznego średniego pozbawionej zasadniczych nieregularności. ▶ Zał. 2

### Definicja

Różnica między czasem słonecznym prawdziwym i średnim nosi nazwę **równania czasu**. Za pomocą równań (27) i (28) można ją przedstawić jako

$$R.czasu = \mathcal{RA}_{s\odot} - \mathcal{RA}_{\odot} \quad (29)$$



Różnica (29) zmienia się w złożony sposób osiągając w maksimum wartość około 17 minut, co uzasadnia potrzebę wprowadzenia czasu średniego.

## Czas uniwersalny UT



### Definicja

- Czas średni słoneczny dla południka Greenwich nazwano **czasem uniwersalnym** ( $UT$ ),
- dla obserwatora w miejscu o wschodniej długości geograficznej  $\lambda$ , będzie:

$$\text{Miejsc. sr. czas słoneczny} = UT + \lambda \quad (30)$$

## Part VI

### Wektorowe transformacje współrzędnych

## Czas strefowy

### Definicja

- Miejskowy czas słoneczny jest skalą czasu lokalną, określoną dla otoczenia jednego południka. Tymczasem w życiu codziennym wymagana jest synchronizacja czasu na dużym obszarze,
- dlatego ziemski glob podzielono na strefy czasowe o szerokości  $15^\circ$  oddzielone od siebie tzw. południkami standardowymi,
- wewnątrz każdej strefy obowiązuje ten sam czas słoneczny średni środkowego południka strefy zwany **czasem strefowym**:

$$\text{Czas strefowy} = UT + \lambda_S \quad (31)$$

gdzie  $\lambda_S$  jest wschodnią długością standardowego południka danej strefy.

- ponieważ południki standardowe rozmieszczone są równomiernie co  $15^\circ$  w długości, dlatego pomiędzy dwiema sąsiednimi strefami różnica czasu wynosi zawsze jedną godzinę.

► Leć

### 8 Wektorowe transformacje współrzędnych.

- Macierze obrotów.
- Kąty Eulera.
- Macierze odbić lustrzanych.
- Transformacja współrzędnych prostokątnych i sferycznych.
- Współrzędne ekliptyczne i równikowe
- Współrzędne horyzontalne i godzinne
- Współrzędne godzinne i równikowe

## Transformacje współrzędnych. Wstęp.

Układy współrzędnych prostokątnych przedstawiamy za pomocą trójek  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , ujętych w macierzy  $\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$  zwanej triadą.

Wzajemna ortogonalność wersorów  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  pociąga ortogonalność triady  $\mathbf{R}$ , co objawia się własnością  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ , gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową.

Składowe tego samego wektor  $\mathbf{a}$  mogą być wyznaczone w różnych układach współrzędnych, czyli względem różnych triad, np.  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{P}$ :

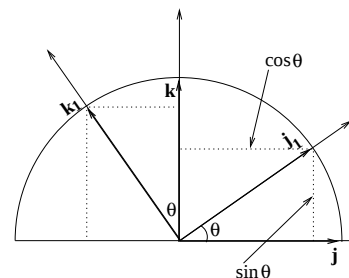
$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Mnożąc (32) lewostronnie przez  $\mathbf{R}^T$  widzimy, że:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Zatem transformacja składowych  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  w składowe  $[a_1, a_2, a_3]$  może być dokonana za pośrednictwem iloczynu macierzy  $\mathbf{R}^T \mathbf{P}$ , a transformacja odwrotna za pomocą  $\mathbf{P}^T \mathbf{R}$ .

## Macierz obrotu wokół osi $X$ (1).



### Wyprowadzenie

Interesuje nas przeliczenie współrzędnych z układu zdefiniowanego triadą  $\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$  do układu danego triadą  $\mathbf{R}_1 = [\mathbf{i}, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1]$ . Ponieważ oba układy różnią się jedynie o dodatni obrót o kąt  $\theta$  wokół osi  $\mathbf{i}$ , stąd, składowe triady  $\mathbf{R}_1$  obliczymy za pomocą składowych triady  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i} \\ \mathbf{j}_1 &= (\cos \theta) \mathbf{j} + (\sin \theta) \mathbf{k} \\ \mathbf{k}_1 &= (-\sin \theta) \mathbf{j} + (\cos \theta) \mathbf{k} \end{aligned}$$

W postaci dogodnej do umacierzowania:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{j}_1 &= 0\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + (\sin \theta)\mathbf{k} \\ \mathbf{k}_1 &= 0\mathbf{i} + (-\sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \theta)\mathbf{k} \end{aligned}$$

## Macierz obrotu wokół osi $X$ (2).

### Wyprowadzenie cd

Zatem triadę  $\mathbf{R}_1$  możemy przedstawić jako iloczyn macierzowy:

$$\mathbf{R}_1 = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1] = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Poszukiwana transformacja  $\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}$  ma postać:

$$\mathbf{R}_1^T \mathbf{R} = \left[ \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right]^T \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

## Macierz obrotu wokół osi $X, Y, Z$ .

### Wniosek

Jeśli dwa układy różnią się tylko transformacją obrotu wokół osi  $X$  o dodatni kąt  $\theta$ , to współrzędne  $[x_1, y_1, z_1]^T$  (składowe wektora) względem układu obróconego uzyskamy ze współrzędnych  $[x, y, z]^T$  względem układu nieobróconego za pomocą:

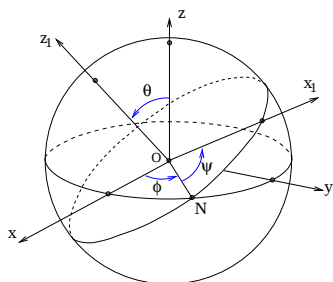
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{p}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (35)$$

Dla układów różniących się obrotami o dodatni kąt  $\theta$  wokół osi  $Y$  i  $Z$ , odpowiednie macierze transformacyjne  $\mathbf{q}(\theta)$  i  $\mathbf{r}(\theta)$  mają postać:

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

## Kąty Eulera.

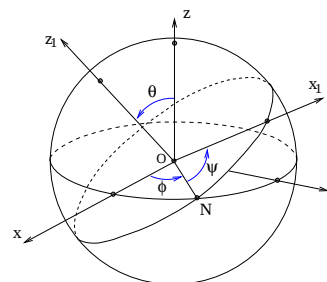


### Definicja

Dwa układy współrzędnych zorientowano względem siebie tak, że żadna para osi tych układów nie jest do siebie wzajemnie równoległa. Jest to najbardziej ogólny przypadek orientacji układów, określonej za pomocą trzech kątów Eulera:

- kąt  $\theta$  zawarty pomiędzy osiami  $Z$  i  $Z_1$  obu układów,
- kąt  $\phi$  zawarty pomiędzy osią  $X$  i linią  $ON$  przecięcia płaszczyzn  $X-Y$ ,  $X_1-Y_1$  obu układów,
- kąt  $\psi$  pomiędzy osią  $X_1$  i linią  $ON$ , liczony jako dodatni od linii  $ON$  do osi  $X_1$ .

## Transformacja współrzędnych z wykorzystaniem kątów Eulera.



### Definicja

Transformacja współrzędnych  $[x, y, z]^T$  we współrzędne  $[x_1, y_1, z_1]^T$ , jest złożeniem trzech obrotów

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{r}(\psi)\mathbf{p}(\theta)\mathbf{r}(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (37)$$

Jeśli mamy do dyspozycji kąty Eulera określające wzajemną orientację dwóch układów współrzędnych kartezjańskich, to transformacja pomiędzy współrzędnymi z tych układów zawsze będzie miała postać (37).

## Macierze odbić lustrzanych.

### Definicja

Macierz transformacyjna dla układów różniących się jedynie skrętnością (przypadek układów lewo i prawoskrętnych) jest macierzą modyfikującą wyłącznie współrzędną  $Y$ -ową (lustrzane odbicie względem płaszczyzny  $X-Z$ ), ma ona postać:

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Niekiedy korzystnym będzie zastosowanie macierzy  $\mathbf{M}_x$  lustrzanego odbicia względem płaszczyzny  $Y-Z$ , w wyniku której uzyskamy zmianę znaku współrzędnej  $X$ -owej.

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

## Przemiana współrzędnych prostokątnych i sferycznych.

### Definicja

W celu praktycznego zastosowania formuł podanych wyżej musimy dysponować wzorami umożliwiającymi przeliczenia współrzędnych sferycznych na współrzędne prostokątne i odwrotnie.

Jeśli dane są  $(u, v)$  położenia ciała niebieskiego, gdzie  $u$  jest współrzędną azymutalną a  $v$  jest dopełnieniem do  $90^\circ$  odległości biegunowej, to odpowiadające im prostokątne składowe wersora położenia tego ciała wyliczamy za pomocą wzorów:

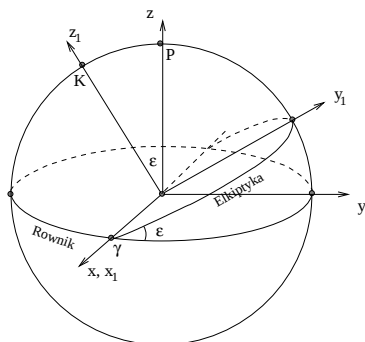
$$\begin{aligned} x &= \cos u \cos v \\ y &= \sin u \cos v \\ z &= \sin v \end{aligned} \quad (40)$$

Zależności odwrotne mają postać:

$$\begin{aligned} v &= \arcsin z \\ u &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (41)$$

przy czym w celu ustalenia właściwej ćwiartki kąta  $u$  musimy zastosować stosowną procedurę normującą.

## Przemiana współrzędnych $(\lambda, \beta)$ i $(\alpha, \delta)$ .



### Definicje

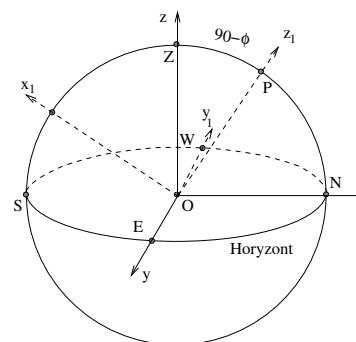
- Transformacja  $(\alpha, \delta) \rightarrow (\lambda, \beta)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\lambda, \beta} = \mathbf{p}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} \quad (42)$$

- transformacja odwrotna:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} = \mathbf{p}(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\lambda, \beta} \quad (43)$$

## Przemiana współrzędnych $(A, h)$ i $(\mathcal{H}, \delta)$ .



### Definicje

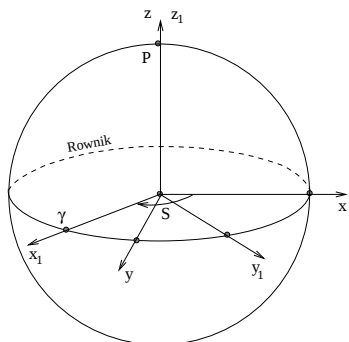
- Transformacja  $(A, h) \rightarrow (\mathcal{H}, \delta)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{H}, \delta} = \mathbf{q}(\phi - 90^\circ) \mathbf{r}(180^\circ) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A, h} \quad (44)$$

- transformacją odwrotną będzie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A, h} = \mathbf{r}(-180^\circ) \mathbf{q}(90^\circ - \phi) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{H}, \delta} \quad (45)$$

## Przemiana współrzędnych $(\mathcal{H}, \delta)$ i $(\alpha, \delta)$ .



### Definicje

- Transformacja  $(\mathcal{H}, \delta) \rightarrow (\alpha, \delta)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} = \mathbf{r}(-S) \mathbf{M}_y \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{H}, \delta} \quad (46)$$

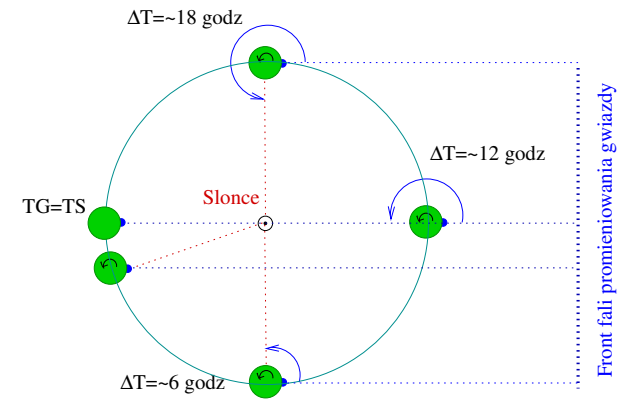
- transformacja odwrotna ma postać:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{H}, \delta} = \mathbf{M}_y \mathbf{r}(S) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} \quad (47)$$



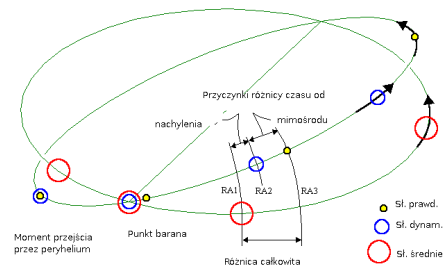


Powrót

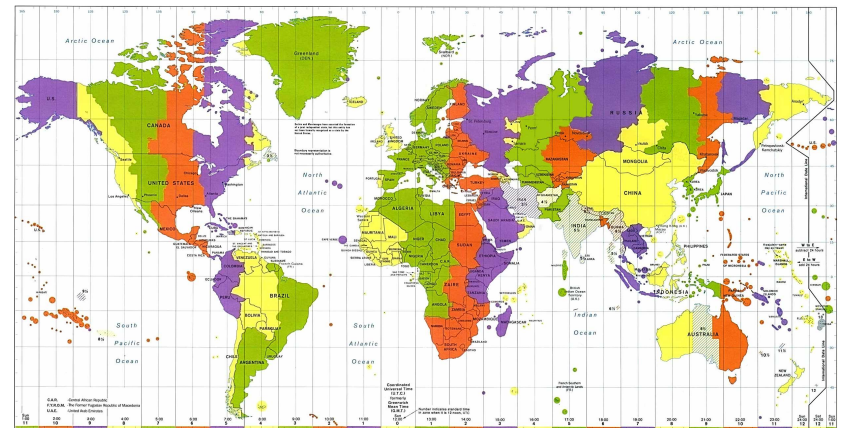


Ilustracja narastania różnicy wskazań czasu obserwowanego za pomocą słońca i gwiazd.

Powrót



Powrót



Powrót