Fizyka atmosfer gwiazdowych

notatki do wykładu

Krzysztof Gęsicki

październik 2001 – styczeń 2002

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Bardzo ciekawe rozważanie dotyczące źródła naszej wiedzy o wszechświecie podają astrofizycy Masiewicz i Tutukow, we wstępie do książki opisującej ewolucję gwiazd. Załóżmy, że całkowita powierzchnia zwierciadeł wszystkich teleskopów dostępnych astrofizykom wynosi $100\,\mathrm{m}^2$ oraz że czas wykorzystania tej powierzchni wynosi 50 lat. Można obliczyć, że całkowita energia fotonów zebranych w ciągu tego czasu obserwacji przez zwierciadła teleskopów wyniesie około 10^{10} ergów. Urządzenia rejestrujące wychwycą tylko około 1% tej wartości. Chcąc przedstawić otrzymaną wielkość w sposób obrazowy przeznaczmy tę energię na ogrzanie szklanki wody. Okazuje się, że jej temperatura wzrośnie o 0.1^oC. Dochodzimy do wniosku, że 10 kalorii leży u podstaw współczesnej astrofizyki.

Ponieważ astrofizyka może badać tylko takie informacje, jakie do nas niezależnie od naszej woli docierają (nie możemy przeprowadzać eksperymentów na gwiazdach czy galaktykach), a także ponieważ fotonów niosących informacje jest, jak oszacowaliśmy, niezwykle mało, trzeba stosować bardzo wyrafinowane metody badań. Jedną z nich jest spektroskopia – i wprowadzeniu w tę dziedzinę, ze szczególnym uwzględnieniem analizy atmosfer gwiazd, poświęcony jest niniejszy wykład.

Jednym z podstawowych pojęć astrofizyki teoretycznej jest przepływ promieniowania przez ośrodek gazowy, np. przez wnętrze gwiazdy, atmosferę gwiazdy, mgławicę wokółgwiazdową. Dla matematycznego opisu tego zjawiska wprowadza się tzw. równanie przepływu promieniowania. Jest to równanie różniczkowe, choć gdy przyjrzymy mu sie dokładniej, okaże się ono równaniem różniczkowo-całkowym, do rozwiązania którego stosować trzeba metody numeryczne. Tym zagadnieniom poświęcona będzie znaczna część wykładu.

Rozdział 2

Przybliżenie atomu dwupoziomowego

Obecny rozdział wprowadza równanie przepływu promieniowania w możliwie najprzystępniejszy sposób.

Na początku uprościmy model atomu do takiego, który zawiera tylko dwa poziomy energetyczne. Gdy już to zrozumiemy, uzupełnimy model o trzeci poziom, później o poziom kontinuum. Ta część pracy wzorowana jest w dużej mierze na wybranych rozdziałach podręcznika Cannona.

2.1 Oddziaływanie atomu z promieniowaniem

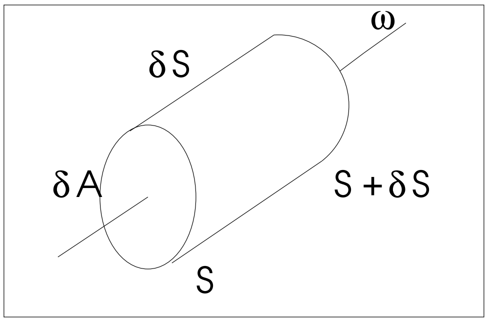
Oznaczmy nasze jedyne dwa poziomy w atomie: L i U, tymi literami będziemy indeksować wielkości związane z faktem, że atom może znajdować się w górnym, bądź dolnym stanie energetycznym. Wymieńmy procesy związane z przejściami elektronu między poziomami L i U:

1. wzbudzenie promieniste, absorpcja
2. emisja spontaniczna
3. emisja wymuszona
4. wzbudzenie zderzeniem ze swobodnym elektronem
5. depopulacja zderzeniowa (ze swobodnym elektronem)

1, 2, 3 to procesy promieniste, 4 i 5 nie są bezpośrednio związane z promieniowaniem, ale też są istotne dla naszych rozważań. Dokładny opis wymienionych procesów można znaleźć w podręcznikach elektrodynamiki kwantowej, np. klasycznych jak: W.Heitler „The quantum theory of radiation”. Studentom polecam dostępne w języku polskim H.Hacken „Światło” oraz H.Hacken i H.C.Wolf „Atomy i kwanty. Wprowadzenie do współczesnej spektroskopii atomowej”.

2.2 Równanie przepływu promieniowania

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(s, t, \nu, \vec{\omega})$ ilość fotonów $h\nu$ o kieunku $\vec{\omega}$, które w chwili t przechodzą przez $1\,\mathrm{cm}^2$ podstawy cylindra umieszczonej w miejscu s (rys. 2.1.). Ściślej rzecz ujmując należy pamiętać, że „kierunek” nie oznacza dla nas matematycznej linii prostej czy wektora, lecz pewien mały kąt bryłowy $\delta\omega$ wokół kierunku $\vec{\omega}$. Podobnie chwila t to właściwie mały przedział czasu δt „wokół” wartości t, a częstość zawiera się w przedziale $\delta\nu$ wokół ν. Jest to zupełnie



Rysunek 2.1: Przepływ promieniowania w kierunku $\vec{\omega}$

analogiczne do faktu, że nie definiujemy ilości fotonów przechodzących przez dany punkt tylko przez element powierzchni δA umieszczony w tym punkcie.

Ilość fotonów wchodzących do cylindra wyniesie $\mathcal{P}(s,t,\nu,\vec{\omega})\delta A$, wychodzących $\mathcal{P}(s+\delta s,t+\delta t,\nu,\vec{\omega})\delta A$. Dotyczy to tej samej wiązki promieniowania, która po wejściu do cylindra i po oddziaływaniu z zawartą w nim materią, opuszcza go z drugiej strony. Możemy zrobić bilans:

$$[\mathcal{P}(s+\delta s,t+\delta t,\nu,\vec{\omega})-\mathcal{P}(s,t,\nu,\vec{\omega})]\delta A=\{ZYSK\}-\{STRATA\}$$

Posłużymy się teraz terminologią wprowadzoną do fizyki przez Einsteina przy wyprowadzaniu wzoru Plancka. Pojawiają się w tym miejscu tzw. współczynniki „A” i „B” Einsteina określające prawdopodobieństwa przejść promienistych. Obliczenie ich wartości liczbowych wymaga zastosowania metod elektrodynamiki kwantowej. Nasz bilans tym sie różni od równowagowego rozkładu Plancka, że dopuszczamy możliwość zmiany ilości fotonów.

Do ZYSKów wchodzą:

- emisja spontaniczna, której wkład jest proporcjonalny do:
  1. N_U – ilości atomów w górnym stanie energetycznym
  2. $\delta s\delta A$ – objętości cylindra
  3. A_{UL} – współczynnika Einsteina tempa emisji spontanicznej
  4. $j(\nu,\vec{\omega})$ – funkcji określającej prawdopodobieństwo, że wyemitowany foton będzie miał częstość ν i kierunek $\vec{\omega}$
- emisja wymuszona, proporcjonalnie do:
  1. $N_U\delta s\delta A$, jak poprzednio
  2. $\mathcal{P}(s,t,\nu,\vec{\omega})$ – bo jest wymuszana strumieniem fotonów
  3. $\psi(\nu,\vec{\omega})$ funkcji określającej prawdopodobieństwo dla emisji wymuszonej, że wyemitowany foton będzie miał częstość ν i kierunek $\vec{\omega}$

STRATY

- pochodzą z absorpcji, proporcjonalnie do:
  1. $N_L\delta s\delta A$ – analogicznie, jak poprzednio, z tym, że w procesie bierze udział liczba N_L atomów będących w dolnym stanie energetycznym
  2. $\mathcal{P}(s,t,\nu,\vec{\omega})$ – bo absorbowane są fotony z danego strumienia

3. $\phi(\nu, \vec{\omega})$ – funkcji określającej prawdopodobieństwo, że zaabsorbowany zostanie foton o częstości ν i kierunku $\vec{\omega}$

Zdefiniujmy **natężenie promieniowania** $I_\nu \equiv I(s, t, \nu, \vec{\omega})$ w taki sposób, że

$$I_\nu \delta A$$

jest energią przenoszoną przez wiązkę fotonów $(\nu, \vec{\omega})$ przez powierzchnię δA prostopadłą do $\vec{\omega}$, w jednostce czasu. Wiemy, że natężenie I_ν jest proporcjonalne do ilości przepływających fotonów $\mathcal{P}$. Przez β_i oznaczmy jakieś stałe proporcjonalności, zajmiemy się nimi za chwilę. Bilans energii po przejściu promieniowania przez cylinder możemy zapisać:

$$I_\nu(s + \delta s, t + \delta t, \nu, \vec{\omega}) - I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega}) = \beta_1 N_U A_{UL} j \delta s + \beta_2 N_U I_\nu \psi \delta s - \beta_3 N_L I_\nu \phi \delta s$$

Stałą β_1 znajdziemy wiedząc, że po lewej stronie równania bilansu mamy energię przypadającą na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu, a tak naprawdę to jeszcze na jednostkę kąta bryłowego i na jednostkę częstości (szczegółami zajmiemy się w dalszej części wykładu). Z prawej $N_U A_{UL} \delta s$ jest ilością emisji spontanicznych na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu, j jest bezwymiarowym prawdopodobieństwem. Ponieważ akt emisji spontanicznej produkuje foton $h\nu$ i wysyła go gdzieś w kąt bryłowy 4π, więc dla zachowania wymiarów po obu stronach równości musi zachodzić:

$$\beta_1 = \frac{h\nu}{4\pi}$$

Dogodnie jest też wprowadzić kolejne współczynniki Einsteina B_{LU} i B_{UL} i zapisać:

$$\beta_2 = \frac{h\nu}{4\pi} B_{UL} \quad , \quad \beta_3 = \frac{h\nu}{4\pi} B_{LU}$$

Rozwijamy następnie $I_\nu(s + \delta s, t + \delta t)$ w szereg Taylora, podstawiając $\delta s = c\ \delta t$, omijamy wyrazy wyższych rzędów, w granicy $\delta s \to 0$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \frac{h\nu}{4\pi}[N_U A_{UL} j + N_U B_{UL} I_\nu \psi - N_L B_{LU} I_\nu \phi]$$

Pochodna $\frac{\partial}{\partial s}$ jest pochodną kierunkową, co pozwala zapisać powyższe równanie w postaci:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu + \frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \kappa(S - I_\nu)$$

gdzie

$$\kappa = \frac{h\nu}{4\pi}(N_L B_{LU} \phi - N_U B_{UL} \psi)$$

$$S = \frac{N_U A_{UL} j}{N_L B_{LU} \phi - N_U B_{UL} \psi}$$

Ostatnie trzy wzory definiują równanie przepływu promieniowania w ogólnej postaci. Wielkość S nosi tradycyjnie nazwę funkcji źródłowej, gdyż opisuje ona źródło fotonów, jakim jest proces emisji. Zauważmy, że S jest stosunkiem ilości emisji spontanicznych do ilości absorpcji, a emisja wymuszona nie jest dodawana do licznika, lecz występuje w mianowniku jako ujemna absorpcja. Wielkość κ nazywamy współczynnikiem absorpcji, w nim także znajdziemy odjętą emisję wymuszoną.

Przyjrzawszy się poszczególnym wyrazom równania przepływu zauważamy, że do jego rozwiązania porzebna jest znajomość obsadzeń poziomów N_U i N_L oraz funkcji j, ψ, ϕ. W kolejnych rozdziałach przedyskutujemy te właśnie zmienne.

2.3 Obliczanie obsadzeń poziomów

Musi zachodzić równość: $N_L + N_U = N$, o ile chcemy mieć stałą liczbę cząstek w atmosferze. Poszukujemy dwóch wielkości N_L i N_U, więc potrzebujemy drugiego równania. Znajdziemy je zakładając stan równowagi w rozpatrywanym gazie z przepływającym przezeń promieniowaniem. Wróćmy do umieszczonego w gazie cylindra. Wymieńmy procesy prowadzące do depopulacji z poziomu U na L oraz wzbudzeń z L na U:

- emisja spontaniczna prowadzi do ilości depopulacji w jednostce czasu w jednostce objętości i w jednostce kąta bryłowego: $\frac{1}{4\pi}N_U A_{UL} j(\nu, \vec{\omega})$, co po wycałkowaniu po kierunkach (całka wyniesie 4π) i częstościach (całkujemy prawdopodobieństwo j, więc otrzymamy 1) daje wielkość:
$$N_U A_{UL}$$
- całkowita ilość emisji wymuszonych w jednostce czasu i w jednostce objętości, czyli wycałkowana po kierunkach i częstościach, wyniesie:
$$\frac{N_U B_{UL}}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \psi(\nu, \vec{\omega})$$
- depopulacje pochodzące od zderzeń ze swobodnymi elektronami zapiszmy w postaci:
$$N_U C_{UL}$$
gdzie współczynnik C_{UL} jest funkcją gęstości i temperatury elektronów
- ilość absorpcji w jednostce czasu i objętości:
$$\frac{N_L B_{LU}}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \phi(\nu, \vec{\omega})$$
- ilość wzbudzeń zderzeniowych:
$$N_L C_{LU}$$

Zdefiniujmy tzw. średnie natężenia promieniowania dla absorpcji i dla emisji wymuszonej:

$$\bar{J}_{LU} = \frac{1}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \phi(\nu, \vec{\omega})$$

$$\bar{J}_{UL} = \frac{1}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \psi(\nu, \vec{\omega})$$

Pamiętajmy, że wprowadzenie średnich natężeń nie oznacza, że znamy ich wartości; to tylko uproszczenie zapisu, by nie powtarzać w dalszych wzorach podwójnych całek. Jeśli bilans wzbudzeń i depopulacji ma być zerowy, a chcemy żeby był, bo omawiamy (na razie) atmosferę stacjonarną, to:

$$N_L(B_{LU}\bar{J}_{LU} + C_{LU}) = N_U(A_{UL} + B_{UL}\bar{J}_{UL} + C_{UL})$$

Jest to tzw. **równanie równowagi statystycznej**. Jest to drugie równanie dotyczące obsadzeń poziomów, pozwala wyznaczyć stosunek $\frac{N_U}{N_L}$.

2.4 Profil absorpcyjny

Oddziaływanie pojedynczego atomu z jednym fotonem opisywane jest w ramach mechaniki kwantowej. Nie jest to tematem niniejszego wykładu. W atmosferach gwiazd mamy do czynienia z gazem, czyli zespołem atomów, oraz polem promieniowania, czyli wiązką fotonów. W gazie o zadanej temperaturze każdy z atomów porusza się z jakąś prędkością, średnio tym większą im wyższa temperatura. Każdy foton z wiązki opisywanej natężeniem I_ν może oddziaływać z atomem poruszającym się z różną prędkością i w różnym kierunku. Efekt Dopplera powoduje, że atom w swoim układzie spoczynkowym „zobaczy” foton o innej częstości. Z wiązki fotonów I_ν każdy foton może oddziaływać z gazem inaczej, bo trafia na inaczej poruszający się atom. Profil absorpcyjny ϕ, dotyczący całej wiązki i zespołu atomów, powinien opisywać oddziaływanie średnie. Poszukujemy zatem funkcji ϕ takiej, że $N_L\phi(\nu,\vec{\omega})$ jest prawdopodobieństwem, że foton $(\nu,\vec{\omega})$ może zostać zaabsorbowany przez zespół N_L atomów w stanie L.

Pamiętajmy, że atom dwupoziomowy może oddziaływać tylko z fotonami o energiach bliskich różnicy energii jego poziomów. Gdyby atom był w spoczynku, a poziomy nieskończenie wąskie, to jedynym fotonem, który mógłby oddziaływać, byłby ten o energii równej różnicy energii poziomów, oznaczmy ją $h\nu_0$.

Niech $q(\gamma)$ oznacza prawdopodobieństwo, że foton o częstości γ mierzonej w układzie spoczynkowym atomu, może zostać zaabsorbowany przez atom w stanie L. Niech $\vec{v}$ oznacza prędkość atomu w układzie obserwatora, ν częstość fotonu w układzie obserwatora. Atom „widzi” foton o częstości γ przesuniętej dopplerowsko:

$$\gamma = \frac{\nu(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\omega}}{c})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \nu(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\omega}}{c})$$

Wprowadźmy nową zmienną: $\Delta\nu = \nu - \nu_0$, gdzie ν_0 jest częstością środka danej linii widmowej. Zachodzi oczywiście $\nu_0 = \gamma_0$. Mamy dalej:

$$\Delta\gamma = \Delta\nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}\cdot\vec{\omega} \approx \Delta\nu - \frac{\nu_0}{c}\vec{v}\cdot\vec{\omega}$$

Zatem prawdopodobieństwo, że atom o prędkości $\vec{v}$ zaabsorbuje foton $\Delta\nu$ wynosi $q(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}\cdot\vec{\omega})$. Musimy teraz uwzględnić cały zespół atomów o różnych prędkościach $\vec{v}$. Posłużymy się tzw. funkcją dystrybucji $F_L(\vec{v})$, określoną w taki sposób, że $N_L F_L(\vec{v})\delta\vec{v}$ jest całkowitą ilością atomów w stanie L o prędkościach z przedziału $(\vec{v}, \vec{v}+\delta\vec{v})$. Prawdopodobieństwo absorpcji przez zespół atomów otrzymamy po wycałkowaniu po prędkościach:

$$N_L\phi(\nu,\vec{\omega}) = \int_0^\infty d\vec{v}\; q(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}\cdot\vec{\omega})N_L F_L(\vec{v})$$

Całkowanie po prędkościach obejmuje wszystkie wartości oraz kierunki. Wzór na sam profil:

$$\phi(\nu,\vec{\omega}) = \int_0^\infty d\vec{v}\; q(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}\cdot\vec{\omega})F_L(\vec{v})$$

Postać explicite funkcji profilu ϕ otrzymamy podstawiając odpowiednie q i F_L.

Z reguły za $F_L(\vec{v})$ przyjmujemy rozkład prędkości Maxwella. Rozkład ten odnosi się do gazu w równowadze termodynamicznej, czyli nie tracącego energii. Ogólnie rzecz biorąc atmosfera gwiazdy nie jest w stanie równowagi, występuje oddziaływanie gazu z promieniowaniem, energia ucieka z powierzchni gwiazdy. Warto o tym pamiętać. Wzór na rozkład Maxwella można zapisać następująco:

$$F_L(\vec{v}) = \frac{1}{v_0^3\pi^{3/2}} exp\left(-\frac{v_x^2}{v_0^2} - \frac{v_y^2}{v_0^2} - \frac{v_z^2}{v_0^2}\right) dv_x\, dv_y\, dv_z$$

gdzie

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Druga składowa profilu, czyli funkcja q, zależy od rodzaju atomu i przejścia promienistego. W wyidealizowanym przypadku nieskończenie wąskich poziomów energetycznych jako q podstawiamy funkcję Delta Diraca $q(\Delta\gamma) = \delta(\Delta\gamma)$.

Obliczmy teraz ϕ przy rozkładzie Maxwellowskim prędkości i przy q będącym deltą Diraca. Niech $\vec{v} = v_x\vec{\omega_x} + v_y\vec{\omega_y} + v_z\vec{\omega_z}$, ograniczmy się do wybranego kierunku $\vec{\omega} = \vec{\omega_x}$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\phi(\Delta\nu) &= \int_0^\infty \int\int dv_x\, dv_y\, dv_z \delta\left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}v_x\right)\frac{1}{v_0^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{v_x^2}{v_0^2}} e^{-\frac{v_y^2}{v_0^2}} e^{-\frac{v_z^2}{v_0^2}} \\
&= \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{v_x^2}{v_0^2}} \delta\left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}v_x\right) dv_x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{c}{\nu v_0} \int_0^\infty e^{-\frac{v_x^2}{v_0^2}} \delta\left(\frac{c\Delta\nu}{\nu v_0} - \frac{v_x}{v_0}\right) d\left(\frac{v_x}{v_0}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na profil ma postać następującą:

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}$$

gdzie $\Delta\nu_D = \frac{\nu v_0}{c}$ jest tzw. szerokością Dopplera, a $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ jest średnią prędkością termiczną. Takie ϕ nazywamy profilem absorpcyjnym Dopplerowskim, ma on kształt krzywej Gaussa.

Bardziej realistyczny profil otrzymamy uwzględniając poszerzenie kwantowe górnego poziomu. Mechanika kwantowa dostarcza nam wzór:

$$q(\Delta\gamma) = \frac{\delta}{\pi}\frac{1}{(\Delta\gamma)^2 + \delta^2}$$

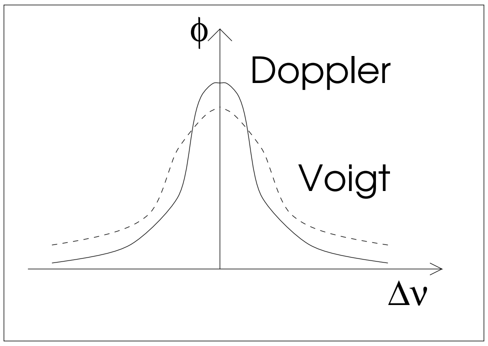
gdzie $\delta = \frac{1}{4\pi}\sum_{i<u} A_{ui}$. Otrzymujemy wzór na tzw profil Voigt'a:

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} H(a, x)$$

gdzie

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D}, \quad x = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}, \quad H(a,x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}dy}{(x-y)^2 + a^2}$$

Porównanie profili Dopplera i Voigta przedstawia rysunek 2.2. Jest to tylko nakreślony przeze mnie schemat, a nie dokładne przebiegi funkcji. Ważne jest, że profil Dopplera ma wyraźnie widoczne jądro, a profil Voigt'a ma jądro płytsze i szersze oraz szerokie skrzydła.



Rysunek 2.2: Bardzo schematyczne porównanie profili Dopplera i Voigta

2.5 Profil emisyjny

Mechanika kwantowa wykazuje, że $j = \psi$. Wynika to choćby z faktu, że kwantowomechaniczne prawdopodobieństwo emisji fotonu jest proporcjonalne do $1 + N$ (zob. w książce W.Heitlera), gdzie jedynka interpretowana jest jako wyraz reprezentujący emisję spontaniczną, a N jest ilością fotonów już obecnych, czyli reprezentuje emisję wymuszoną. Zależność od kąta i częstości jest dla obu zjawisk taka sama. Zajmiemy się zatem tylko profilem j dla emisji spontanicznej. Przyjmijmy oznaczenia: γ oznacza częstości w układzie związanym z atomem, ν - z obserwatorem, zmienne ze znakiem prim ($'$) - częstości zaabsorbowane, bez prima - wyemitowane. Chcąc szczegółowo opisać proces emisji spontanicznej musimy prześledzić wcześniejszy los elektronu, zanim znalazł się on na górnym poziomie. Mógł się on tam znaleźć na dwa sposoby: wskutek absorpcji fotonu albo wzbudzenia zderzeniowego. Omówimy po kolei te dwa sposoby.

Niech $p(\gamma', \gamma)$ oznacza prawdopodobieństwo [Hz^{-1}], że jeśli częstość zaabsorbowanego fotonu wyniosła γ', to częstość fotonu wyemitowanego będzie równa γ. Przez $\frac{1}{4\pi}g(\vec{\omega}', \vec{\omega})$ oznaczymy odpowiednie prawdopodobieństwo dla kierunkow. Zauważmy, że $p(\gamma', \gamma)$ wyklucza depopulację zderzeniową. Uwzględniamy ruchy własne atomów $\vec{v}_L$ i $\vec{v}_U$, powodujące dopplerowskie przesuwanie częstości. Przy absorpcji atom zyskuje pęd fotonu, więc $\vec{v}_L \neq \vec{v}_U$. Zaniedbujemy relatywistyczne zmiany kątów. Wprowadźmy tzw. funkcję redystrybucji R_{LU}:

$$\begin{aligned} R_{LU}(\gamma', \gamma) &= \frac{1}{4\pi} g(\vec{\omega}', \vec{\omega}) q(\gamma') p(\gamma', \gamma) \\ &= \frac{1}{4\pi} g(\vec{\omega}', \vec{\omega}) q(\nu' - \frac{\nu'}{c}\vec{v}_L \cdot \vec{\omega}') p(\nu' - \frac{\nu'}{c}\vec{v}_L \cdot \vec{\omega}', \nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}_U \cdot \vec{\omega}) \\ &= R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) \end{aligned}$$

Zatem $\frac{1}{4\pi} R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) d\nu' d\omega' d\nu d\omega$ jest prawdopodobieństwem, że pojedynczy atom zaabsorbował foton (ν', ω') z przedziału $(\nu', \nu' + d\nu'), (\omega', \omega' + d\omega')$ i spontanicznie wyemitował foton (ν, ω) w przedział $(\nu, \nu + d\nu), (\omega, \omega + d\omega)$.

Dalej trzeba uwzględnić wszystkie możliwe absorpcje, czyli wycałkować po ν' i $\vec{\omega}'$. Zatem całkowita ilość [cm^{-3}] absorpcji fotonów przez atomy w stanie $(L, \vec{v}_L)$, po których nastąpi spontaniczna emisja fotonu $(\nu, \vec{\omega})$ z atomu $(U, \vec{v}_U)$ wyniesie:

$$N_L B_{LU} \int d\omega' \int d\nu' I_{\nu'}(\omega') F_L(\vec{v}_L) F_U(\vec{v}_U) R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U)$$

Teraz wkład do j od wzbudzeń zderzeniowych. Tempo wzbudzeń zderzeniowych atomów $(L, \vec{v}_L)$ z elektronami $\vec{v}_e$ jest: $\sigma_{eL} f_L(\vec{v}_L) f_e(\vec{v}_e) \vec{v}_e$, gdzie $f_L = N_L F_L$, a f_e jest odpowiednim rozkładem dla elektronów. To tempo trzeba pomnożyć przez profil emisyjny $q_c(\gamma)$ dla emisji spontanicznej po wzbudzeniu zderzeniowym. Na ogół zakłada się, że w wyniku zderzenia rozkład elektronu na podpoziomach jest taki sam, jak po absorpcji, zatem profil ten jest taki sam, jak absorpcyjny: $q_c(\gamma) = q(\gamma)$. Aby uwzględnić wszystkie zderzenia z elektronami trzeba wycałkować po prędkościach elektronów. Zazwyczaj zakłada się, że $\vec{v}_e$ jest niezależne od $\vec{v}_U$, co pozwala całkowanie po $\vec{v}_e$ przeprowadzić osobno: $C_{LU} = \int d\vec{v}_e \sigma_{eL} f_e(\vec{v}_e)\vec{v}_e$. Całkowita ilość zderzeń, po których następuje emisja spontaniczna wyniesie:

$$N_L C_{LU} F_L(\vec{v}_L) F_U(\vec{v}_U) q(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U)$$

Oba wkłady do j trzeba dodać. Można rezultat sprowadzić do postaci podobnej, jak przy absorpcji:

$$j(\nu, \vec{\omega}) = \int d\vec{v}_U F_U(\vec{v}_U) e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U)$$

gdzie prawdopodobieństwo emisji e wynosi:

$$e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U) = \frac{B_{LU} \int d\nu' \int d\vec{\omega}' R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) I_{\nu'}(\vec{\omega}') + C_{LU} q(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U)}{\frac{B_{LU}}{4\pi} \int d\nu' \int d\vec{\omega}' q(\nu', \vec{\omega}', \vec{v}_L) I_{\nu'}(\vec{\omega}') + C_{LU}}$$

Mianownik tego długiego ułamka pochodzi z narzucenia na j warunku normalizacji: j ma być prawdopodobieństwem, czyli wycałkowane po wszystkich częstościach i kątach musi dawać 1. Zawarte w czynniku normującym obsadzenie N_L skraca się z tym występującym w liczniku, dzięki temu z wzoru na e obsadzenie N_L znika, czego należało oczekiwać.

Kontynuowanie tej analizy wymaga znajomości funkcji dystrybucji prędkości F_U i wyrazu redystrybucyjnego R_{LU}. Funkcja R_{LU} zależy od związanych z atomem wielkości $q(\gamma')$ i $p(\gamma', \gamma)$ omawianych powyżej. Funkcja $F_U(\vec{v}_U)$ może być wyznaczona z bilansu energetycznego w gazie, który z kolei zależy od pola promieniowania. Powoduje to wysoce nieliniową zależność prawdopodobieństw emisji j i ψ od natężenia promieniowania I_ν będącego faktycznie naszą wyznaczaną niewiadomą.

2.6 Całkowita redystrybucja

Wyprowadziliśmy zależności:

$$\phi(\nu', \vec{\omega}') = \int d\vec{v}_L F_L(\vec{v}_L) q(\nu', \vec{\omega}', \vec{v}_L)$$

$$j(\nu, \vec{\omega}) = \int d\vec{v}_U F_U(\vec{v}_U) e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U)$$

Dalszą analizę naszej atmosfery z atomem dwupoziomowym uprościło by znacznie założenie $\phi = j$. Kiedy tak może być? Gdyby $F_L = F_U$, to warunkiem staje się $q = e$. Kiedy to może zachodzić?

1. jeśli we wzorze na e dominuje składnik zderzeniowy C_{LU}

2. gdyby $I_\nu(\vec{\omega}) = I$ (niezależne od kierunku i częstości), to wzór na e daje się przekształcić:

$$e = \frac{B_{LU} I \int d\gamma' q(\gamma') p(\gamma', \gamma) + C_{LU} q(\gamma)}{B_{LU} I + C_{LU}}$$

W przekształceniach uwzględnić trzeba podaną nieco wcześniej definicję funkcji redystrybucji R_{LU} oraz pamiętać o całkowaniu rozkładów prawdopodobieństw. Wtedy mielibyśmy $q = e$, gdyby $\int d\gamma' q(\gamma')p(\gamma', \gamma) = q(\gamma)$, co zachodzi, gdy

$$p(\gamma', \gamma) = \delta(\gamma' - \gamma)$$

czyli dla funkcji delta Diraca, albo gdy

3. $p(\gamma', \gamma) = q(\gamma)$

Możliwość 1. to stan równowagi termodynamicznej, gdy głęboko w atmosferze dominują procesy zderzeniowe i one decydują o obsadzeniu poziomów atomu. Punkt 2. to pełna koherencja, czyli częstości absorbowana i emitowana są sobie równe. Punkt 3. to tzw. pełna redystrybucja, gdy częstość emitowanego fotonu zupełnie nie zależy od częstości zaabsorbowanego wcześniej kwantu. Możemy przyjmować, że poszerzony poziom energetyczny atomu składa się z wielu, tym razem już wąskich, podpoziomów. Pełna koherencja polegać będzie na tym, że emisja następuje z dokładnie tego samego podpoziomu, na którym znalazł się atom po absorpcji. Pełna redystrybucja polega na tym, że po absorpcji nastąpi rozdzielenie (redystrybucja) energii po wszystkich podpoziomach, a emisja zostanie zrealizowana zgodnie z prawdopodobieństwem przejść dla podpoziomów, niezależnie zupełnie od tego, który podpoziom został obsadzony dzieki absorpcji. Tak należy rozumieć wprowadzone nazewnictwo.

Skoro wcześniej przyjęliśmy, że profile emisyjne j i ψ są sobie równe, to teraz dochodzimy do sytuacji, w której wszystkie trzy wprowadzone profile są sobie równe. Nazwą „pełnej redystrybucji" określa się na ogół założenie, że $\phi(\Delta\nu) = \psi(\Delta\nu) = j(\Delta\nu)$. Pamiętajmy jednak, że literalnie termin ten odnosi się tylko do wspomnianej powyżej możliwości 3. Jak widać istnieją fizyczne uzasadnienia dla założenia pełnej redystrybucji, ale główny powód to matematyczne uproszczenia. Przyjrzyjmy się wprowadzonym zależnościom przy założeniu pełnej redystrybucji:

$$\kappa = \frac{h\nu}{4\pi} N_L B_{LU} \phi \left[1 - \frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}}\right]$$

$$S = \frac{N_U A_{UL}}{N_L B_{LU}} \left[1 - \frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}}\right]^{-1}$$

Otrzymaliśmy, że współczynnik absorpcji κ zależy tylko od profilu ϕ, a funkcja źródłowa S wogóle nie zależy od częstości $\Delta\nu$. Ponadto średnie natężenia stają się sobie równe:

$$\bar{J}_{UL} = \bar{J}_{LU} = \bar{J}$$

i równanie równowagi statystycznej przybiera postać:

$$N_L(B_{LU}\bar{J} + C_{LU}) = N_U(B_{UL}\bar{J} + A_{UL} + C_{UL})$$

.

2.7 Funkcja źródłowa w pełnej redystrybucji

Funkcja źródłowa zależy od ilorazu $\frac{N_U}{N_L}$, którego wartość możemy wyznaczyć z równania równowagi statystycznej. Znane są zależności wiążące współczynniki Einsteina:

$$A_{UL} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} B_{UL}, \qquad g_L B_{LU} = g_U B_{UL}$$

które także podstawiamy do wzoru na S, ostatecznie otrzymamy:

$$S = \frac{\bar{J} + \frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{C_{LU}g_l}{A_{UL}g_U}}{1 + \frac{C_{UL}}{A_{UL}}(1 - \frac{C_{LU}g_l}{C_{UL}g_U})}$$

By przedyskutować dokładniej funkcję S potrzebujemy znajomości ilorazu $\frac{C_{LU}}{C_{UL}}$. Skorzystamy w tym celu z założenia szczegółowej równowagi procesów zderzeniowych, które mówi, że przejścia zderzeniowe bilansują się niezależnie od przejść promienistych. Skoro tak, to powinny one bilansować się także i w równowadze termodynamicznej, kiedy to obsadzenia poziomów są zgodne z rozkładem Boltzmanna:

$$\frac{N_L^*}{N_U^*} = \frac{g_L}{g_U}e^{\frac{h\nu_0}{kT}}$$

(górny indeks * oznacza obsadzenia wyznaczone z rozkładu Boltzmanna i tę konwencję będziemy stosować). Dla przejść zderzeniowych zachodzi zatem $N_L^*C_{LU} = N_U^*C_{UL}$. Podstawienie tak wyliczonego ilorazu $\frac{C_{LU}}{C_{UL}}$ do wzoru na funkcję źródłową prowadzi do jej postaci:

$$S = \frac{\bar{J} + \epsilon' B_\nu(T)}{1 + \epsilon'} = (1 - \epsilon)\bar{J} + \epsilon B_\nu(T)$$

gdzie $B_\nu(T)$ jest funkcją Plancka, $\epsilon' = \frac{C_{UL}}{A_{UL}}(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}})$, a $\epsilon = \frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}$. Przypomnijmy, że równanie przepływu promieniowania w postaci niezależnej od czasu ma postać:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})I = -\kappa I + \kappa S$$

Spróbujmy zrozumieć znaczenie jego poszczególnych wyrazów:

- $-\kappa I$ jest energią promieniowania odebraną wiązce promieniowania przez absorpcję. κ jest współczynnikiem proporcjonalności, do którego została włączona emisja wymuszona jako ujemna absorpcja.

- κS jest energią dodaną do wiązki fotonów przez emisję spontaniczną. Skoro mamy ten sam współczynnik proporcjonalności, to S będzie natężeniem promieniowania spowodowanego wyłącznie emisją spontaniczną.

Przedyskutujmy składniki funkcji S:

- $\bar{J}$ jest średnim polem promieniowania, reprezentuje te procesy, w których atom pochłania foton i reemituje go. Jest to źródło fotonów

- $-\epsilon\bar{J}$ ujemny znak mówi o odpływie fotonów. Można pokazać, że

$$\epsilon = \frac{C_{UL}}{C_{UL} + A_{UL} + B_{UL}B_\nu(T)}$$

  czyli jest stosunkiem depopulacji zderzeniowych do całkowitego tempa depopulacji. Więc ϵ jest prawdopodobieństwem na depopulację bez produkcji fotonu, czyli $-\epsilon\bar{J}$ odzwierciedla ilość fotonów pochłoniętych z pola promieniowania przez absorpcję z następującą po niej depopulacją zderzeniową. Zauważmy wyraz $B_{UL}B_\nu(T)$ w mianowniku. Powinno tam być $B_{UL}\bar{J}$, a nie jest ze względu na założenie równowagi termodynamicznej dla stosunku współczynników przejść zderzeniowych.

- $\epsilon B_\nu(T)$ jest źródłem fotonów przeciwstawnym odpływowi $-\epsilon\bar{J}$. Można również pokazać, że to samo ϵ ma postać:
$$\epsilon = \frac{C_{LU}}{C_{LU} + B_{LU} B_\nu(T)}$$
czyli, że jest również stosunkiem tempa wzbudzeń zderzeniowych do całkowitego tempa wszystkich wzbudzeń. Wzbudzenia zderzeniowe prowadzą do równowagowego promieniowania opisywanego funkcją Plancka. Ale nie wszystkie wzbudzenia w naszym atomie są zderzeniowe, więc tylko odpowiednia część funkcji Plancka dodaje się do naszej funkcji źródłowej.

2.8 Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Skrót pochodzi z języka angielskiego, od „Local Thermodynamic Equilibrium".

Dla izolowanego, idealnie zamkniętego układu z gazem ustala się równowaga termodynamiczna. Z takiego układu nie wydostaje się żadna energia. Związane z nim pole promieniowania opisywane jest funkcją Plancka $B_\nu(T)$, gdzie T jest jedną temperaturą dla wszystkich cząstek w naszym układzie.

W atmosferze gwiazdy energia wydostaje się na zewnątrz w strumieniu cząstek i promieniowania, więc równowagi termodynamicznej nie można bezpośrednio zakładać. Ale możemy podzielić gwiazdę na infinitezymalnie małe komórki i w każdej takiej komórce możemy przybliżać stan gazu wartościami równowagowymi. Nazwa LTE - bo dokonujemy tego przybliżenia lokalnie. Równowagowy stan gazu opisywany jest tylko przez temperaturę T i całkowitą gęstość cząstek N. W modelu atmosfery wprowadzamy niezerowy gradient temperatury, który nie ma prawa istnieć w równowadze termodynamicznej.

Prawa opisujące LTE:

- w atmosferach gwiazd materia zawsze zachowuje się jak gaz doskonały, którego ciśnienie opisywane jest wzorem:
$$p_g = NkT = (N_{atomy} + N_{jony} + N_e)kT$$

- pole promieniowania opisywane jest funkcją Plancka
$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$
W atmosferach gwiazd promieniowanie wypływa, ma naturę nielokalną, prowadzi to do odstępstw od LTE.

- Rozkład prędkości elektronów w warunkach równowagi opisywany jest rozkładem Maxwella. Zderzenia nieelastyczne i rekombinacje zaburzają ten rozkład, jednak w warunkach atmosfer gwiazd zderzenia sprężyste dominują, co usprawiedliwia stosowanie rozkładu Maxwella.

- Równowaga jonizacyjna opisywana jest rozkładem Sahy, w warunkach atmosfer gwiazd jest to na ogół złe przybliżenie.

- Równowaga wzbudzeniowa, opisywana równaniem Boltzmanna, w atmosferach gwiazd nie jest spełniona ze względu na znaczącą rolę przejść promienistych.

Co wynika z założeń LTE?

Przyjmijmy całkowitą redystrybucję: $\phi = \psi = j$, $\bar{J}_{LU} = \bar{J}_{UL} = \bar{J}$. Zastąpmy obsadzenia poziomów N_i ich wartościami równowagowymi N_i^*, a pole promieniowania przez $B_\nu(T)$. Równanie równowagi statystycznej przybiera postać:

$$N_L^* \left(B_{LU} B_\nu(T) + C_{LU}\right) = N_U^* \left(B_{UL} B_\nu(T) + A_{UL} + C_{UL}\right)$$

W LTE obowiązuje równanie Boltzmanna, które można przekształcić do postaci:

$$\frac{N_L^*}{N_U^*} = \frac{g_L}{g_U} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} = \frac{B_{UL} B_\nu(T) + A_{UL}}{B_{LU} B_\nu(T)}$$

Podstawienie tego do równania równowagi statystycznej daje:

$$N_L^* C_{LU} = N_U^* C_{UL}$$

z czego korzystaliśmy wcześniej przy obliczaniu funkcji źródłowej. Te dwa ostatnie równania określają tzw. równowagę szczegółową, wspomnianą już wcześniej, będącą szczególnym przypadkiem równowagi statystycznej.

Co wynika z równowagi szczegółowej?

Może ona zachodzić głęboko w atmosferze, gdzie dominują przejścia zderzeniowe. Wówczas, jeśli zaniedbamy przejścia promieniste, jako nieistotne, to z równowagi statystycznej pozostanie

$$N_L C_{LU} = N_U C_{UL}$$

Dla małej reszty opisującej przejścia promieniste też musi zachodzić:

$$N_L B_{LU} \bar{J} = N_U (B_{UL} \bar{J} + A_{UL})$$

skąd przy znanych zależnościach łączących współczynniki Einsteina A i B otrzymujemy:

$$\bar{J} = B_\nu(T)$$

Patrząc na funkcję źródłową w pełnej redystrybucji:

$$S = (1 - \epsilon)\bar{J} + \epsilon B_\nu(T)$$

widzimy, że gdy zderzenia dominują, czyli $\epsilon \to 1$, to

$$S \to B_\nu(T)$$

jakie by nie było $\bar{J}$. Ta ostatnia zależność powoduje, że także

$$\bar{J} \to B_\nu(T)$$

ponieważ $(1 - \epsilon)\bar{J} = (\frac{S}{B_\nu} - \epsilon)B_\nu$.

W atmosferach gwiazd gęstość maleje z wysokością, zatem C_{LU} i C_{UL} też maleją. Stałe pozostają współczynniki A i B. Zatem ϵ maleje z wysokością. Dla linii widmowych może zachodzić $\epsilon \sim 10^{-4}$ lub nawet $\sim 10^{-10}$, czyli linie widmowe powstają daleko od LTE.

Przez non-LTE rozumiemy odrzucenie założeń LTE, ale często czyni się wiele innych założeń. Czasem stosuje się non-LTE dla fotonów, a równania LTE dla procesów atom - elektron.

2.9 Dyskusja przebiegu funkcji źródłowej

Wprowadzając szereg uproszczeń postaramy się obecnie zrozumieć jakościowe zachowanie się rozwiązania równania przepływu promieniowania.

Dla małej komórki, głęboko w atmosferze, możemy przyjąć, że efektywnie zero promieniowania opuszcza jej powierzchnię. Oznacza to, że tyle samo promieniowania wpada do komórki, co ją opuszcza. Mówimy o równowadze promienistej, stosujemy przybliżenie LTE, z którego wynika $S = B_\nu(T)$.

Bliżej powierzchni gwiazdy fotony mogą przez jej powierzchnię uciekać. Każda ucieczka fotonu sprawia, że w atmosferze ubywa o jeden spośród fotonów, które mogły by zostać zaabsorbowane. Absorpcja, to proces, który pozostawia atom w stanie U. Zatem wzrost ilości fotonów, które uciekły, powoduje spadek N_U. Jeśli mamy zachowaną masę, czyli

$$N_L + N_U = N = const = N_U^* + N_L^*$$

to zmniejszenie N_U pociąga za sobą wzrost N_L. Ale N_L^* i N_U^* pozostają niezmienione, bo w LTE fotony nie uciekają. Zatem

$$\frac{N_U}{N_L} < \frac{N_U^*}{N_L^*}$$

Niech:

$$\frac{N_U}{N_L} = \gamma \frac{N_U^*}{N_L^*} = \gamma \frac{g_U}{g_L} e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}$$

gdzie $\gamma < 1$. Można dalej pokazać, że

$$S = \frac{\gamma B_\nu(T)}{1 + \frac{1-\gamma}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}}$$

Ponieważ $\frac{h\nu_0}{kT} > 0$, więc $e^{\frac{h\nu_0}{kT}} > 1$, zatem:

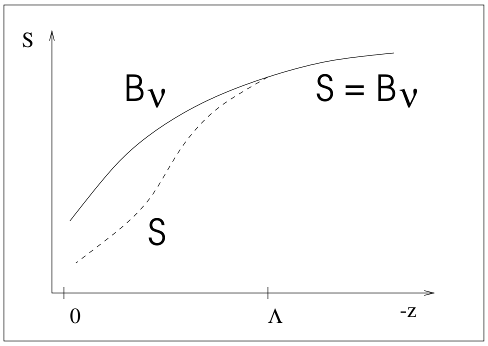
$$S < B_\nu(T)$$

Im bliżej powierzchni, tym więcej fotonów ucieka, tym bardziej S różni się od funkcji Plancka. Jakościowo przedstawia to rysunek 2.3. Przykład ten pokazuje, że nie tylko stan atomów wpływa na pole promieniowania, ale i pole promieniowania, jego ucieczka z atmosfery gwiazdowej, wywiera wpływ na stan atomów. Mówimy o oddziaływaniu materii i promieniowania.

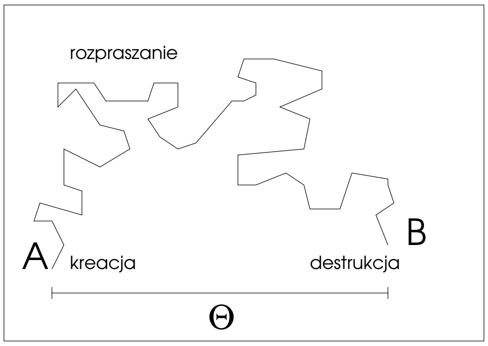
W dalszej części dyskusji zaniedbujemy zależności czasowe; zakładamy, że utracona przez fotony energia jest kompensowana dopływem energii z jądra gwiazdy. Zajmiemy się głębokością Λ, przy której zaczyna się odstępstwo funkcji źródłowej S od $B_\nu(T)$. Jeśli np. $\epsilon = 10^{-4}$ (w miarę typowa wartość), to znaczy, że prawdopodobieństwo depopulacji zderzeniowej jest niesłychanie małe: jedna depopulacja zderzeniowa będzie przypadać na 9999 depopulacji promienistych. Raz wytworzony foton dozna 9999 absorpcji i emisji zanim dojdzie do depopulacji zderzeniowej niszczącej foton (rysunek 2.4). Następujące po sobie absorpcje i emisje nazywamy rozpraszaniem. Jeśli oznaczymy średnią drogę swobodną przez λ, to rozumowanie przeprowadzone tak, jak dla ruchów Browna, wykazuje, że odległość Θ między kreacją fotonu a jego destrukcją wynosi $\Theta \approx \lambda\sqrt{n}$, gdzie n jest ilością rozproszeń (u nas 9999)[1]. Powinno być:

$$n = \frac{A_{UL} + B_{UL}B_\nu(T)}{C_{UL}} = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

[1] podany wzór, słuszny dla przypadku jednowymiarowego, można łatwo udowodnić stosując metodę indukcji matematycznej



Rysunek 2.3: Różnica między funkcją Plancka a funkcją źródłową. Na głębokościach w atmosferze większych, niż Λ, funkcja źródłowa S równa jest funkcji Plancka, na głębokościach mniejszych wartość S maleje poniżej $B_\nu(T)$



Rysunek 2.4: Rozpraszanie fotonów jako błądzenie przypadkowe. Foton utworzony w miejscu A doznaje licznych rozproszeń, po czym po przebyciu średniej drogi Θ ulega absorpcji (destrukcji) w miejscu B

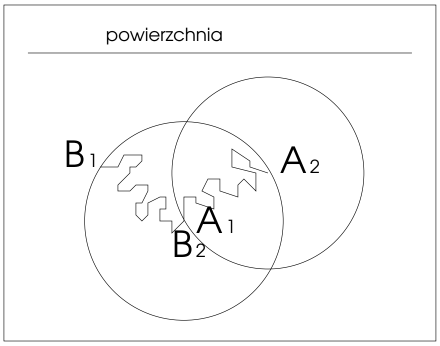
Stąd ponieważ $\epsilon \ll 1$, więc $\sqrt{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ i

$$\Theta \approx \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}$$

Rozpatrzmy sytuację przedstawioną na rysunku 2.5. Jeśli punkt A_1 leży głębiej niż Θ pod powierzchnią, to każdemu fotonowi utworzonemu w A_1 i zniszczonemu w B_1 odpowiada zniszczenie w punkcie A_1 innego fotonu wytworzonego gdzieś w A_2. W danym punkcie atmosfery będzie miała miejsce równowaga między kreacją a destrukcją fotonów. Wyraz źródłowy $\epsilon B_\nu(T)$ będzie dokładnie równoważony przez wyraz odpływowy $-\epsilon\bar{J}$. Prowadzi to do LTE, ale zauważmy, że mamy do czynienia z efektami nielokalnymi, gdyż foton utworzony w jednym miejscu jest absorbowany w innym.

Jeśli punkt A_2 leży w zasięgu Θ od powierzchni, wówczas emitowany zeń foton może osiągnąć powierzchnię gwiazdy i uciec. Nie dotrze zatem do A_1 i równowaga między kreacją a destrukcją w A_1 będzie naruszona. Z kolei foton wytworzony w A_1 dotrze do A_2 i uzupełni w nim brak energii, oczywiście kosztem A_1. Odbywa się to wszystko na koszt energii wewnętrznej atomów, czyli N_U maleje. Jednocześnie musi wzrastać N_L, czyli zachodzi $S < B_\nu(T)$. Głębokość Λ, przy której S zaczyna odchylać się od $B_\nu(T)$ musi być porównywalna z drogą Θ między kreacją a destrukcją fotonu:

$$\Lambda \sim \Theta \sim \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}$$



Rysunek 2.5: Równowaga między kreacją i destrukcją fotonów. Na każdy foton wytworzony w miejscu A_1 i wysłany do B_1 przypada inny foton wytworzony w jakimś punkcie A_2, którego miejsce destrukcji B_2 pokrywa się z punktem A_1. Okręgi zaznaczją średnią drogę Θ przebywaną przez fotony po serii rozproszeń

Wielkość Θ nazywamy długością drogi termalizacji fotonu. Nazwa pochodzi od procesów biorących udział w tworzeniu i destrukcji fotonu: foton powstaje kosztem energii termicznej i po przebyciu drogi Θ znika, a jego energia powiększa energię termiczną gazu.

Szczegółowe obliczenia przy uwzględnieniu, że $\lambda \neq const$, przy profilu Dopplerowskim i średniej drodze swobodnej λ_0 w centrum linii, pokazują, że $\Lambda \sim \Theta \sim \frac{\lambda_0}{\epsilon}$.

2.10 Jakościowa analiza obserwowanego natężenia

Zakładamy w dalszym ciągu atom dwupoziomowy, pełną redystrybucję, stan równowagi statystycznej bez wypływu masy. Matematycznie problem jest taki, że jeśli znamy funkcję źródłową S, wystarczy rozwiązać względem I równanie:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})I = -\kappa(I - S)$$

zadając odpowiednie warunki brzegowe. Profil $\phi(\Delta\nu)$ teraz występuje tylko we wzorze na nieprzezroczystość κ. Pamiętamy, że $\frac{N_U}{N_L} < \frac{N_U^*}{N_L^*}$, stąd

$$\frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}} \leqslant e^{-\frac{h\nu}{kT}} \ll 1$$

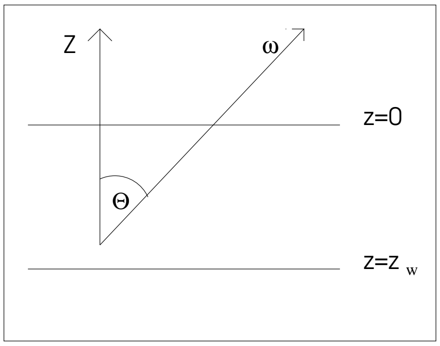
(sprawdź dla jakich ν i T to zachodzi). Zatem dla większości astrofizycznych przypadków emisję wymuszoną (traktowaną jak ujemną absorpcję) możemy zaniedbać przy określaniu κ:

$$\kappa = \kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu)$$

W przypadku jednowymiarowym, jak na rysunku 2.6, równanie przepływu ma postać:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z} = -\kappa(I - S)$$

gdzie $\mu = \cos\Theta$. Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu, jego rozwiązanie jest jednoznaczne przy zadaniu jednego warunku brzegowego dla każdego kąta $\mu \in [-1; 1]$ i częstości $\Delta\nu \in (-\infty; \infty)$.



Rysunek 2.6: Warstwa płasko–równoległa o grubości z_w. Osie X i Y są równoległe do warstwy, oś Z prostopadła do warstwy jest kierunkiem najważniejszym, w którym zmieniają się parametry warstwy. Wartość $z = 0$ określa powierzchnię warstwy. Kierunek $\vec{\omega}$ rozchodzenia się promieniowania tworzy z osią Z kąt Θ

Definiujemy niezależną od częstości głębokość optyczną τ:

$$\tau(z) = -\kappa_0 \int_0^z N_L(z')dz'$$

czyli

$$d\tau = -\kappa_0 N_L dz = -\frac{\kappa(z, \Delta\nu)}{\phi(\Delta\nu)} dz$$

Tak określona wielkość τ jest bardzo dogodna przy charakteryzowaniu gazu, przez który przepływa promieniowanie. Opisuje ona głębokość w gazie w zależności od ilości absorbujących atomów na drodze promieniowania zamiast od fizycznych rozmiarów samej drogi. Warstwa cienka i gęsta będzie miała podobną grubość optyczną, co warstwa rozległa i rozrzedzona.

Równanie przepływu przekształca się do postaci:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} = \phi(\Delta\nu)(I - S)$$

która dla $\mu > 0$ ma rozwiązanie:

$$I(\tau, \Delta\nu, \mu) = -\int_{\tau_w}^{\tau} S(\tau') e^{-\phi(\Delta\nu)\frac{\tau' - \tau}{\mu}} \phi(\Delta\nu) \frac{d\tau'}{\mu}$$

Jest to tak zwane rozwiązanie formalne równania przepływu promieniowania. Formalne - bo zakłada się, że znamy funkcję źródłową S, a przecież tak naprawdę S zależy od poszukiwanego natężenia I. Jak otrzymać to rozwiązanie podane jest w dalszej części.

Pamiętamy, że profil $\phi(\Delta\nu)$ zależy od głębokości przez zależność od temperatury, co komplikuje analizę. Zakładamy więc, że $\phi(\Delta\nu)$ nie zależy od głębokości w atmosferze, pamiętając, że jest to niefizyczne. Zdefiniujmy zależną od częstości głębokość optyczną η:

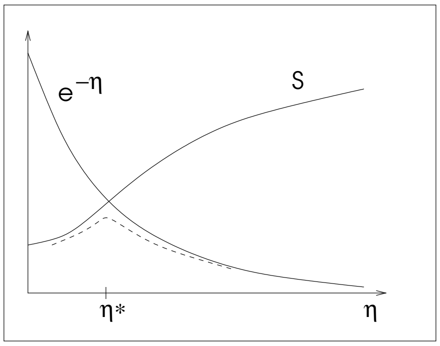
$$\eta(\tau, \Delta\nu) = \phi(\Delta\nu)\tau$$

$$d\eta(\tau, \Delta\nu) = \phi(\Delta\nu)d\tau$$

Stąd na powierzchni atmosfery (tzw. warstwa pół-nieskończona, $\tau \in [0, \infty)$):

$$I(0, \Delta\nu, \mu) = \int_0^\infty S(\frac{\eta}{\phi(\Delta\nu)}) e^{-\frac{\eta}{\mu}} \frac{d\eta}{\mu}$$

Rozpatrzmy osobno przypadki $\mu = 1$ i $\mu \neq 1$:



Rysunek 2.7: Graficzne przedstawienie iloczynu dwóch funkcji: rosnącej w głąb atmosfery funkcji źródłowej S oraz szybko malejącej funkcji $e^{-\eta}$. Iloczyn przedstawiony linią przerywaną ma maksimum w punkcie η^*

2.10.1 $\mu = 1$

Promieniowanie opuszcza gwiazdę prostopadle do jej powierzchni. Natężenie promieniowania:

$$I(0, \Delta\nu, 1) = \int_0^\infty S\left(\frac{\eta}{\phi(\Delta\nu)}\right) e^{-\eta} d\eta$$

jest efektywnie sumowaniem przestrzennym funkcji S ważonym czynnikiem $e^{-\eta}$. Rysunek 2.7 ilustruje sytuację. Iloczyn $Se^{-\eta}$ ma maximum przy pewnej wartości $\eta = \eta^*$. Wysyłane promieniowanie bardziej zależy od funkcji źródłowej w punkcie η^*, niż w jakimkolwiek innym punkcie. Oczywistym jest, że główny wkład do $I(0, \Delta\nu, 1)$ pochodzi z głębokości w sąsiedztwie η^*. Szybko malejący czynnik $e^{-\eta}$ gwałtownie odcina wkład do I pochodzący od S przy $\eta > 1$, zatem musi być: $\eta^* \approx 1$. Prowadzi to do wniosku, że:

$$I(0, \Delta\nu, 1) \approx S(\frac{\eta^*}{\phi(\Delta\nu)})$$

Wielkości η^* odpowiadają głębokość optyczna τ^* i fizyczna z^*;

$$\tau^* = \frac{\eta^*}{\phi(\Delta\nu)}\ , \qquad z^* = \frac{-\eta^*}{\kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu)}$$

przy czym trzeba było założyć, że N_L nie zależy od głębokości.

Większość promieniowania pochodzi z głębokości $\eta^* \approx 1$, a odpowiadająca jej fizyczna głębokość z^* zależy od częstości:

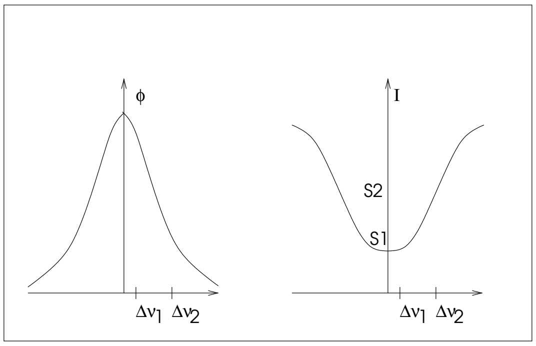
$$z^* \approx \frac{1}{\kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu)}$$

Ponieważ $\phi(\Delta\nu)$ maleje przy wzroście $|\Delta\nu|$, więc odpowiednie z^* wzrasta. Wybierzmy dwie częstości $\Delta\nu_1$ i $\Delta\nu_2$, tak, że $|\Delta\nu_1| < |\Delta\nu_2|$, czyli: $\phi(\Delta\nu_1) > \phi(\Delta\nu_2)$ i $z_1^* < z_2^*$. Jeśli funkcja źródłowa rosnie ze wzrostem fizycznej głębokości w atmosferze gwiazdy, to musi być: $S(z_1^*) < S(z_2^*)$ a stąd:

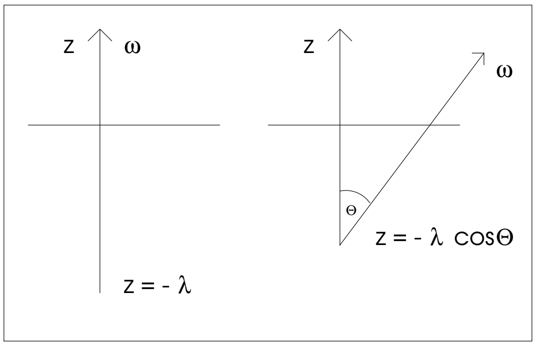
$$I(0, \Delta\nu_1, 1) \approx S(z_1^*) < S(z_2^*) \approx I(0, \Delta\nu_2, 1)$$

Sytuację ilustruje rysunek 2.8.

Oczywiście skoro $\phi(\Delta\nu)$ jest symetryczne względem $\Delta\nu = 0$, to i natężenie I jest symetryczne.



Rysunek 2.8: Powstawanie profilu absorpcyjnego



Rysunek 2.9: Pociemnienie brzegowe. Foton opuszcza atmosferę po przebyciu tej samej drogi, ale z mniejszej głębokości.

2.10.2 $\mu \neq 1$

Sytuację przedstawia rysunek 2.9. O ile założymy stałe N i T, to w kierunku określonym kątem Θ foton również przebywa drogę λ. Główny wkład do natężenia dają teraz obszary płytsze $z = -\lambda \cos\Theta = -\mu\lambda$. Ponieważ funkcja źródłowa maleje z wysokością, więc odpowiednie natężenie maleje ze wzrostem Θ. Mówimy o pociemnieniu brzegowym - rysunek 2.10. Można to rozumowanie potwierdzić obliczeniami podobnymi, jak poprzednio, zastępując tylko η przez $\zeta = \frac{\eta}{\mu}$, określając ζ^* itd.

2.10.3 Prosty przykład

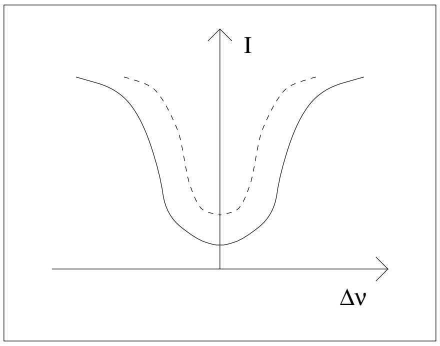
Rozpatrzmy monotonicznie rosnącą funkcję $S(\tau) = a + b\tau$, przy $a, b > 0$. Jeśli $\phi(\Delta\nu)$ nie zależy od głębokości, to można wykonać odpowiednie całkowanie i otrzymać:

$$I(0, \Delta\nu, \mu) = a + b\frac{\mu}{\phi(\Delta\nu)}$$

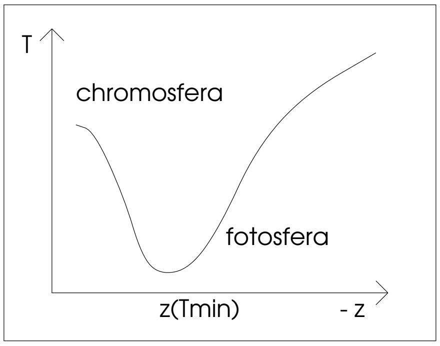
a stąd możemy otrzymać znane nam już zależności:

$$\Delta\nu_1 < \Delta\nu_2 \quad \Rightarrow \quad I(\Delta\nu_1) < I(\Delta\nu_2)$$

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \Rightarrow \quad I(\mu_1) > I(\mu_2)$$



Rysunek 2.10: Pociemnienie brzegowe linii widmowej. Linią przerywaną zaznaczony jest poprzedni przypadek $\mu = 1$, linią ciągłą przypadek, gdy promieniowanie w linii widmowej opuszcza atmosferę pod kątem $\mu < 1$. Obserwując środek tarczy słonecznej rejestrujemy promieniowanie opuszczające fotosferę prostopadle do powierzchni, na brzegach tarczy Słońca - promieniowanie pod kątem $\mu < 1$. Stąd nazwa zjawiska.

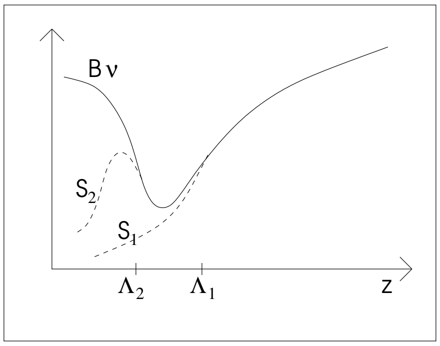


Rysunek 2.11: Chromosfera - schematyczny przebieg temperatury

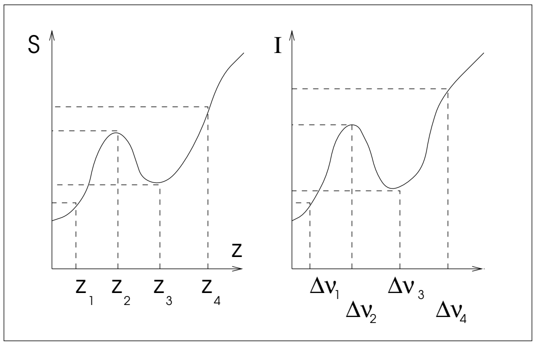
2.11 Ciekawe proste przypadki

2.11.1 Chromosfera gwiazdowa

Chromosfera, to z definicji obszar atmosfery gwiazdowej, w którym ma miejsce wzrost temperatury (elektronowej) z wysokością. To zjawisko jest spowodowane innymi procesami, niż promieniste. Przykładową sytuację podaje rysunek 2.11. Położenie punktu Λ, od którego funkcja źródłowa zaczyna się różnić od $B_\nu(T)$ zależy od możliwości ucieczki fotonów, która zależy od nieprzezroczystości. Mieliśmy $\Lambda \sim \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}$, gdzie λ - średnia droga swobodna fotonów zależna od N_L i B_{LU}. Popatrzmy na rysunek 2.12. Jeśli dla jakiejś linii „1" N_L i B_{LU} są takie, że Λ^1 wypada głębiej, niż $z(T_{min})$, odpowiednia funkcja źródłowa wygląda podobnie, jak poprzednio. Jeśli jednak w linii „2" nieprzezroczystość jest odpowiednio duża, to Λ^2 wypadnie powyżej $z(T_{min})$ i funkcja źródłowa będzie „garbata", jak na rysunku 2.13. Przy odpowiednich z^* natężenie promieniowania $I \sim S(\frac{\eta^*}{\phi(\Delta\nu)})$ może mieć przebieg, jak na tym rysunku (pokazana jest tylko połowa profilu, druga jest symetryczna). Narysowany profil jest jakościowo bardzo podobny do obserwowanych linii Ca II H i K.



Rysunek 2.12: Funkcja źródłowa w obecności chromosfery



Rysunek 2.13: Profil linii chromosferycznej

2.11.2 Warstwa płasko-równoległa optycznie cienka

To taka warstwa, w której fotony, nawet te wyemitowane w centrum linii, doznają nie więcej, niż 1–2 rozproszenia. Gdyby nie było absorpcji fotonów z reemisją, to promieniowanie powstawało by przez wzbudzenia zderzeniowe z następującą po nich depopulacją promienistą i było by:

$$S \approx \epsilon B_\nu(T)$$

Ze wzrostem grubości warstwy dochodzi do znaczenia wyraz $(1-\epsilon)\bar{J}$, ale gdy założymy, że mamy tylko jedno rozproszenie, to:

$$S \approx 2\epsilon B_\nu(T)$$

Ważne jest, że promieniowanie może łatwo opuszczać warstwę z dowolnego jej miejsca, a funkcja źródłowa powinna być w przybliżeniu stała $S = \bar{S}$. Po wycałkowaniu wzoru na obserwowane natężenie otrzymamy:

$$I(0, \Delta\nu, \mu) = \bar{S}(1 - e^{-\frac{\phi(\Delta\nu)\tau_w}{\mu}})$$

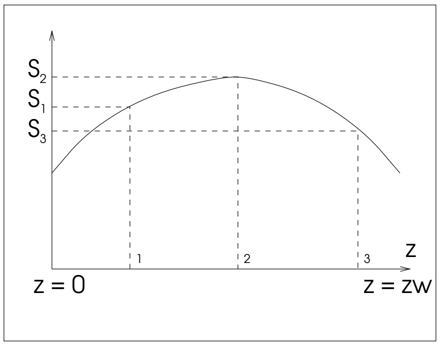
co przy $\tau_w \to 0$ daje:

$$I(0, \Delta\nu, \mu) = \bar{S}\frac{\phi(\Delta\nu)\tau_w}{\mu}$$

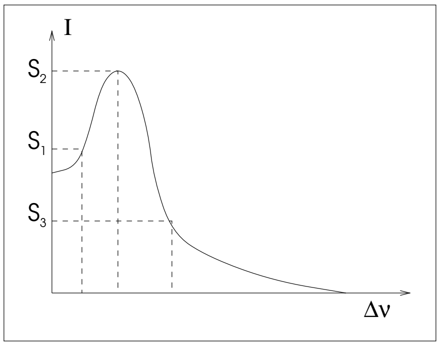
Takie natężenie, to profil emisyjny, mający kształt funkcji ϕ profilu absorpcyjnego.

2.11.3 Warstwa płasko–równoległa optycznie gruba

jeśli taka warstwa będzie miała parametry $(T, \rho$ itp) symetryczne względem płaszczyzny środkowej, to i funkcja źródłowa powinna być symetryczna. S powinna rosnąć w głąb atmosfery.



Rysunek 2.14: Funkcja źródłowa w warstwie płasko–równoległej



Rysunek 2.15: Linia widmowa powstająca w warstwie płasko–równoległej

Spodziewać się jej można w postaci, jak na rysunku 2.14, czyli powinna rosnąć w głąb niezależnie od tego, z której strony na warstwę patrzymy. Niech $|\Delta\nu_1^*| < |\Delta\nu_2^*| < |\Delta\nu_3^*|$ tak, że $|z_1^*| < |z_2^*| < |z_3^*|$. Ponieważ

$$I(0, \Delta\nu_i, 1) \approx S(\frac{\eta_i^*}{\phi(\Delta\nu_i)}) = S_i$$

otrzymamy profil, jak na rysunku 2.15, istotnie różny od przypadku poprzedniego. Gdyby jednak $z_w < 2z_0^*$ (z_0^* to głębokość w centrum linii), czyli z_0^* wypadało by głębiej, niż połowa warstwy, wówczas było by $S_1 > S_2 > S_3$, jak w przypadku optycznie cienkim i nie było by centralnej absorpcji w profilu.

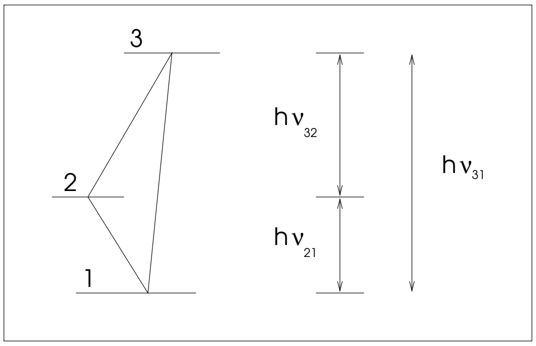
2.12 Atom trójpoziomowy

Schemat poziomów energetycznych oraz przejść promienistych atomu trójpoziomowego przedstawia rysunek 2.16. Zajmijmy się wyznaczeniem natężenia I_{21} odpowiadającego przejściu 2–1. W sposób analogiczny, jak dla atomu dwupoziomowego można wyprowadzić równanie przepływu promieniowania:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})I_{21} + \frac{1}{c}\frac{\partial I_{21}}{\partial t} = \kappa_{21}(S_{21} - I_{21})$$

gdzie

$$\kappa_{21} = \frac{h\nu_{21}}{4\pi}(N_1 B_{12}\phi_{12} - N_2 B_{21}\psi_{12})$$



Rysunek 2.16: Schemat atomu trójpoziomowego

$$S_{21} = \frac{N_2 A_{21} j_{12}}{N_1 B_{12} \phi_{12} - N_2 B_{21} \psi_{12}}$$

Jak poprzednio, zakładamy całkowitą redystrybucję: $\phi = \psi = j$. Zatem do wyznaczenia S potrzebujemy tylko stosunku obsadzeń poziomów $\frac{N_2}{N_1}$. Znów weźmiemy pod uwagę stan statystycznie stały, tzn. taki, że N_1 i N_2 nie zmieniają się w czasie. Oznaczmy przez R_{ij} całkowite tempo, z jakim atom ze stanu i przechodzi w j. Na przykład:

$$R_{12} = B_{12}\bar{J}_{12} + C_{12}$$

gdzie

$$\bar{J}_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\nu) \oint d\omega \phi_{12} I_\nu$$

Z całkowitej redystrybucji wynika, że $\bar{J}_{12} = \bar{J}_{21}$. Analogicznie określamy

$$R_{21} = A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21}$$

oraz $R_{13}, R_{31}, R_{23}, R_{32}$. Odpowiednie wielkości A i B zależą od konkretnego atomu, który rozpatrujemy, a tzw. reguły wyboru powodują często znikanie niektórych ze współczynników A.

Równanie równowagi statystycznej dla poziomu 1 wygląda następująco:

$$N_1(R_{12} + R_{13}) = N_2 R_{21} + N_3 R_{31}$$

Podobnie dla poziomu 2:

$$N_2(R_{21} + R_{23}) = N_1 R_{12} + N_3 R_{32}$$

Mamy razem trzy niewiadome: N_1, N_2, N_3, ale równanie równowagi statystycznej dla trzeciego poziomu jest tylko superpozycją dwóch równań poprzednich. Zatem możemy wyznaczyć tylko stosunki niewiadomych. Wyeliminujmy N_3 z powyższych równań, wówczas to, co zostanie, da się sprowadzić do postaci:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{R_{12} + R_{132}}{R_{21} + R_{231}}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia:

$$R_{132} = \frac{R_{13} R_{32}}{R_{31} + R_{32}}, \qquad R_{231} = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{31} + R_{32}}$$

R_{12} opisuje bezpośrednie wzbudzenia $1 \to 2$. Iloraz $\frac{R_{32}}{R_{31}+R_{32}}$ jest prawdopodobieństwem, że jeśli elektron znajdzie się na poziomie 3, to po depopulacji przejdzie do stanu 2. Zatem R_{132} jest skomponowany z tempa wzbudzeń R_{13} oraz tempa depopulacji $3 \to 2$, czyli cały licznik po prawej stronie jest całkowitym tempem wzbudzeń (bezpośrednio i pośrednio) z poziomu 1 na 2. Analogicznie mianownik przedstawia procesy odwrotne – depopulacje z poziomu 2 na 1.

Podstawiając otrzymany stosunek obsadzeń do wzoru na funkcję źródłową można obliczyć:

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \frac{g_1}{g_2}\frac{C_{12}+R_{132}}{B_{21}}}{1 + \frac{C_{21}}{A_{21}}(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{C_{12}}{C_{21}}) + \frac{R_{231}}{A_{21}}(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{R_{132}}{R_{231}})}$$

Gdyby nie było poziomu 3, współczynniki R_{132} i R_{231} były by zerami i otrzymalibyśmy taki sam wzór, jak dla atomu dwupoziomowego. Możemy dalej zdefiniować:

$$\mathcal{C}_{12} = C_{12} + R_{132}, \qquad \mathcal{C}_{21} = C_{21} + R_{231}$$

Wówczas po niewielkich przekształceniach otrzymamy:

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \frac{g_1}{g_2}\frac{\mathcal{C}_{12}}{B_{21}}}{1 + \frac{\mathcal{C}_{21}}{A_{21}}(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{\mathcal{C}_{12}}{\mathcal{C}_{21}})}$$

Postać tego równania jest taka sama, jak dla atomu dwupoziomowego.

Dalej możemy założyć LTE i równowagę szczegółową dla przejść zderzeniowych, z czego skorzystamy w odpowiednich miejscach elimunując stosunek C_{12}/C_{21} :

$$N_1^* C_{12} = N_2^* C_{21}$$

$$N_1^* C_{13} = N_3^* C_{31}$$

Definiujemy:

$$\epsilon'_{21} = \frac{C_{21}}{A_{21}}(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{C_{12}}{C_{21}}) = \frac{C_{21}}{A_{21} + B_{21}B_{\nu_{21}}(T)}$$

$$\epsilon'_{231} = \frac{R_{231}}{A_{21}}(1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{R_{132}}{R_{231}})$$

$$[\epsilon B_\nu(T)]_{231} = \frac{g_1}{g_2}\frac{R_{132}}{B_{21}}$$

otrzymamy:

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \epsilon'_{21}B_{\nu_{21}}(T) + [\epsilon B_\nu(T)]_{231}}{1 + \epsilon'_{21} + \epsilon'_{231}}$$

Przypomnijmy sobie teraz wzór na funkcję źródłową dla atomu dwupoziomowego, w którym mieliśmy źródło fotonów pochodzących ze wzbudzenia zderzeniowego $\epsilon B_\nu(T)$, oraz wyraz opisujący rozpraszanie $(1-\epsilon)\bar{J}$. W atomie trójpoziomowym wyraz $[\epsilon B_\nu(T)]_{231}$ reprezentuje poprawkę do wyrazu $\epsilon' B_\nu(T)$, konieczną, gdyż elektron może znaleźć się na poziomie 2 również dzięki zderzeniowej i promienistej depopulacji z poziomu 3. Podobnie ϵ'_{231} w mianowniku reprezentuje poprawkę do ϵ'_{21}, uwzględniającą przejścia $2 \to 1$ nie poprzez zderzenia, ale przez pośrednie (zderzeniowe i promieniste) procesy przy udziale poziomu 3.

Wzory na R_{132} i R_{231} łączą w sobie $\bar{J}_{31}$ i $\bar{J}_{32}$. Obliczanie S_{21} wymaga równoległego obliczania S_{31} i S_{32}, czyli rozwiązywania równania przepływu względem I_{31} i I_{32}. To z kolei wymaga znajomości S_{21}. Potrzebny jest jakiś rodzaj iteracji.

2.13 Jakościowa dyskusja atomu trójpoziomowego

Załóżmy, że dozwolone są tylko dwa przejścia promieniste: między poziomami 1–2 i 1–3. Zderzeniowe – dozwolone są wszystkie trzy. Układ poziomów pozostaje taki, jak na rysunku 2.16. Dla przeprowadzenia dalszej dyskusji powróćmy do takiego przedstawienia funkcji źródłowej, w którym zależy ona od stosunku obsadzeń poziomów górnego i dolnego. Jeśli zaniedbamy emisję wymuszoną, jak to czyniliśmy wcześniej w uproszczonej analizie, to dla funkcji źródłowych najistotniejsze pozostają zależności:

$$S_{21} \sim \frac{N_2}{N_1}, \qquad S_{31} \sim \frac{N_3}{N_1}$$

a odpowiednie nieprzezroczystości:

$$\kappa_{21} \sim \nu_{21} N_1 B_{12} \phi_{12}$$

$$\kappa_{31} \sim \nu_{31} N_1 B_{13} \phi_{13}$$

$$\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{31}} \sim \frac{\nu_{21}}{\nu_{31}} \frac{\phi_{12}}{\phi_{13}} \frac{g_2}{g_3} \frac{A_{21}}{A_{31}} \frac{\nu_{31}^3}{\nu_{21}^3}$$

Zazwyczaj $A_{21} > A_{31}$ i o ile $\nu_{31} > \nu_{21}$, to

$$\kappa_{21} > \kappa_{31}$$

Funkcje profilu ϕ mogą wprowadzać pewne komplikacje, ale je pomijamy. Głęboko w atmosferze obowiązuje LTE, zatem:

$$\bar{J}_{21} \approx S_{21} \approx B_{\nu_{21}}(T)$$

$$\bar{J}_{31} \approx S_{31} \approx B_{\nu_{31}}(T)$$

Ze względu na stosunek nieprzezroczystości będziemy mieli dla dróg termalizacji zależność:

$$\Theta_{31} > \Theta_{21}$$

W miarę zbliżania się od głębszych warstw ku powierzchni atmosfery pierwsze zaczną uciekać fotony 3–1 (rysunek 2.17). Będzie to prowadziło do depopulacji poziomu 3 i z konieczności ($N = N_1 + N_2 + N_3 = const$) do zwiększenia obsadzenia poziomu 1.

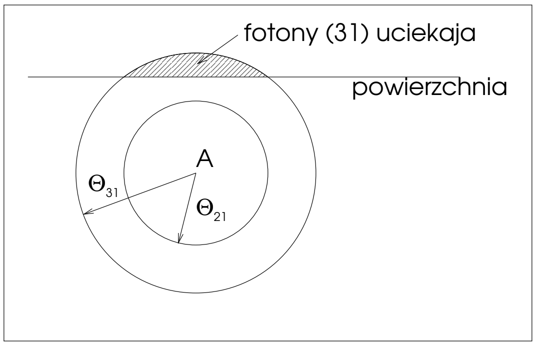
$$S_{31} \sim \frac{N_3}{N_1} \rightarrow \frac{N_3^-}{N_1^+} < \frac{N_3^*}{N_1^*} \sim B_{\nu_{31}}(T)$$

Obniżenie obsadzenia N_3 poniżej N_3^* powoduje włączenie zderzeń 2–3 próbujących przywrócić LTE. Strata elektronu N_3 będzie kompensowana przez zderzenia z poziomu 2:

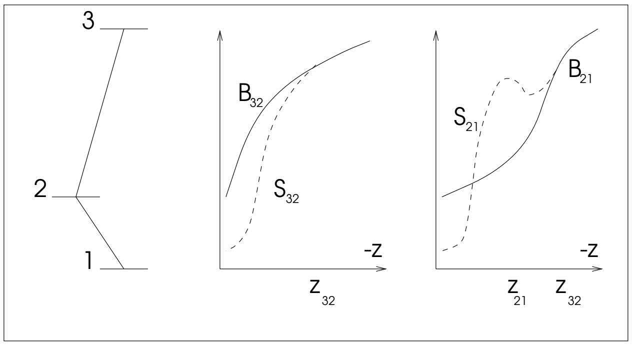
$$N_2 \rightarrow N_2^- < N_2^*$$

Braki na poziomie 2 będą z kolei rekompensowane przez przejścia promieniste i zderzeniowe $1 \rightarrow 2$, które starają się zachować LTE, bo nie widzą powierzchni. W pełni jednak zrównoważone nie zostaną:

$$S_{21} \sim \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{N_2^-}{N_1^+} < \frac{N_2^*}{N_1^*} \sim B_{\nu_{21}}(T)$$



Rysunek 2.17: Ucieczka z powierzchni gwiazdy fotonów powstających w atomie trójpoziomowym



Rysunek 2.18: Profil linii tworzącej się w atomie trójpoziomowym

W konsekwencji obie funkcje źródłowe S_{31} i S_{21} maleją poniżej odpowiednich funkcji Plancka na głębokościach, dla których spodziewalibyśmy się, że zmaleje tylko jedna z nich.

Inny ciekawy przypadek ilustruje rysunek 2.18. Załóżmy, że dozwolone są tylko przejścia promieniste 1–2 i 2–3, niech $\kappa_{32} < \kappa_{21}$ oraz $\Theta_{32} > \Theta_{21}$. Zastanówmy się, co będzie zachodziło w kolejnych miejscach, coraz bliżej powierzchni atmosfery. Najpierw, z głębokości z_{32} będą uciekały fotony 3–2 prowadząc do:

$$N_3 \to N_3^- < N_3^*, \qquad N_2 \to N_2^+ > N_2^*$$

$$S_{32} < B_{\nu_{32}}(T), \qquad S_{21} > B_{\nu_{21}}(T)$$

czyli do wzrostu S_{21} powyżej funkcji Plancka. Ta druga zależność będzie słuszna dopóty, dopóki fotony 2–1 nie zaczną opuszczać powierzchni, powodując na mniejszej już głębokości z_{21}

$$S_{21} < B_{\nu_{21}}(T)$$

Funkcja źródłowa i odpowiedni profil linii widmowej mogą zachowywać się bardzo podobnie, jak w przypadku obecności chromosfery.

2.14 „Kanalizowanie”

Przekonaliśmy się, że dla atomu trójpoziomowego fotony 3–1 mogą uciekać z atmosfery z głębokości Θ_{31}, podczas gdy fotony 2–1 nie mogą. Następnie, w rezultacie przejść zderzeniowych 2–3, poniżej wartości odpowiedniej funkcji Plancka maleje nie tylko S_{31} ale także S_{21}. Gdybyśmy rozpatrywali przejście 2–1 zakładając, że atom jest dwupoziomowy, to takie obniżenie funkcji źródłowej może być interpretowane tylko przez ucieczkę fotonów 2–1, w dodatku z głębokości Θ_{31}, z której fotony te nie mogą uciekać. Interpretujemy to zjawisko jako kanalizowanie (znajdowanie dodatkowych kanałów, ujść) fotonów 2–1 w przejście 3–1, skąd już mogą uciekać. Konwersja fotonów 2–1 na 3–1 odbywa się przez przejścia zderzeniowe 2–3. Obliczona ucieczka energii dla takiego atomu trójpoziomowego jest większa, niż gdybyśmy obliczali utratę energii dla dwóch niezależnych atomów dwupoziomowych. Zjawisko to zwiększa efekty non-LTE.

2.15 Atom dwupoziomowy z kontinuum

Przy oznaczeniu indeksem K współczynników przejść do i z poziomu kontinuum równanie równowagi statystycznej ma postać:

$$N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12} + R_{1K} + C_{1K}) = N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21}) + N_K(R_{K1} + C_{K1})$$

Zakładamy LTE dla przejść jonizacyjnych: $N_K = N_K^*$. Można wtedy pokazać, że

$$N_K(R_{K1} + C_{K1}) = N_1^*(R_{K1} + C_{1K})$$

Analogicznie wyprowadzamy dla poziomu 2:

$$N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21} + R_{2K} + C_{2K}) = N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12}) + N_2^*(R_{K2} + C_{2K})$$

Podobnie, jak poprzednio (pomińmy długie, choć łatwe rachunki) funkcję źródłową można sprowadzić do postaci:

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \epsilon B_{\nu 21}(T) + \eta B^*}{1 + \epsilon + \eta}$$

Interpretacja poszczególnych wyrazów:

- $\bar{J}$ - część rozproszeniowa
- $\epsilon B_\nu(T)$ - fotony wytworzone przez zderzenia C_{12}
- ηB^* - elektrony zjonizowane ze stanu 1, które rekombinują na poziom 2 i emitują foton
- ϵ - fotony zniszczone przez zderzenia C_{21}
- η - jonizacja z poziomu 2 i rekombinacja na poziom 1

Jeśli $\epsilon > \eta$ i $\epsilon B_\nu(T) > \eta B^*$, to mówimy o linii zdominowanej zderzeniowo. Jeśli $\epsilon < \eta$ i $\epsilon B_\nu(T) < \eta B^*$, to mówimy, że linia jest zdominowana fotojonizacyjnie. Linie zdominowane zderzeniowo są silnie powiązane z lokalną temperaturą elektronową, w przeciwieństwie do linii zdominowanych fotojonizacyjnie. Można w ten sposób wyjaśnić dlaczego linie H i K wapnia CaII wykazują emisje w obecności chromosfery (bo są zdominowane zderzeniowo), a jednocześnie linie Balmera nie wykazują (bo są zdominowane fotojonizacyjnie).

Rozdział 3

Przepływ promieniowania dokładniej

3.1 Definicje

3.1.1 Natężenie promieniowania

Na początku wykładu mieliśmy:

$\mathcal{P}(s,t,\nu,\vec{\omega})$ to ilość fotonów $h\nu$ o kieunku $\vec{\omega}$, które w chwili t przechodzą przez $1cm^2$ podstawy cylindra umieszczonej w miejscu s. Dalej było, że $\alpha_4\mathcal{P}$ to energia, oznaczaliśmy ją $I_\nu = I(\nu,\vec{\omega},\vec{r},t)$.

Możemy zdefiniować ilość energii przenoszonej przez wiązkę $\nu,\vec{\omega}$, w czasie dt, przez element powierzchni dA prostopadły do $\vec{\omega}$, jako:

$$dE = I_\nu dAdtd\omega d\nu$$

Jeśli f_R jest tzw. funkcją dystrybucji fotonów, czyli $f_R d\omega d\nu$ oznacza ilość fotonów w $1cm^3$ w miejscu $(\vec{r},t)$, o częstościach $(\nu,\nu+d\nu)$, w kącie bryłowym $d\omega$, to natężenie promieniowania możemy określić poprzez tę wielkość. W tym celu policzymy energię, którą te fotony przeniosą przez naszą powierzchnię w czasie dt. Kiedy przechodzi przez tę powierzchnię ostatni z rozpatrywanych fotonów, to pierwszy z nich jest już w odległości $c\cdot dt$. Fotony zajmują objętość $dA\cdot cdt$, więc przeniosły energię $h\nu\cdot dAcdt\cdot f_R d\omega d\nu$. Dla natężenia promieniowania otrzymamy:

$$I_\nu = ch\nu f_R$$

Można też definiować:

$$I_\nu = \lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ \Delta\nu\to 0\\ \Delta\omega\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\Delta E}{\Delta A\Delta\nu\Delta\omega\Delta t} = \frac{dE}{dAd\nu d\omega dt}$$

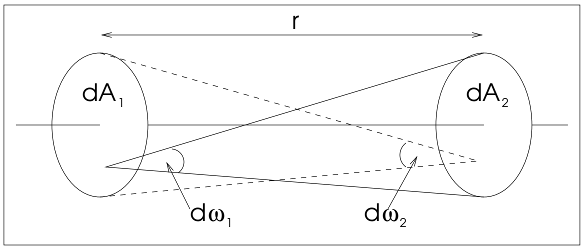
Podobnie:

$$I_\lambda = \frac{dE}{dAd\lambda d\omega dt}$$

Zatem:

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$$

Ponieważ $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ więc wielkości I_ν i I_λ nie będą jednakowe. Na przykład dla Słońca maksimum rozkładu natężenia promieniowania przypada dla I_λ ~4500Å a dla I_ν ~8000 Å.



Rysunek 3.1: Stałość natężenia promieniowania wzdłuż promienia

I_ν w pustej przestrzeni **nie zależy od odległości** obserwatora od źródła, czyli nie zależy od miejsca na promieniu. Aby przekonać się o tym rozpatrzymy nie pojedynczy promień, bo nie ma to sensu fizycznego, ale rozważymy wiązkę przechodzącą przez i tylko przez dwa elementy powierzchniowe (rysunek 3.1). Zachodzi:

$$dE_1 = I_1\ dA_1 d\omega_1 d\nu dt = dE_2 = I_2\ dA_2 d\omega_2 d\nu dt =$$

Ponieważ: $d\omega_1 = \frac{dA_2}{r^2}$ i $d\omega_2 = \frac{dA_1}{r^2}$, więc $I_1 = I_2$

3.1.2 Gęstość energii promieniowania

Określamy ją jako energię w $1\,\mathrm{cm}^3$ w $1\,\mathrm{Hz}$, oznaczamy u_ν. Dla naszej wiązki promieniowania ilość energii przechodzącej przez dA to

$$dE = I_\nu\ dA d\omega d\nu dt$$

Po czasie dt energia ta wypełni cylinder $dAcdt$. Z kolei energia zawarta w takim cylindrze, zgodnie z ostatnią definicją, to:

$$E' = u_\nu\ dA\ cdt\ d\nu$$

Jest to energia obejmująca promieniowanie wszystkich kierunków $\vec{\omega}$, więc:

$$E' = \oint d\omega\ dE = dA\ d\nu\ dt\ \oint I_\nu\ d\omega$$

stąd wynika, że:

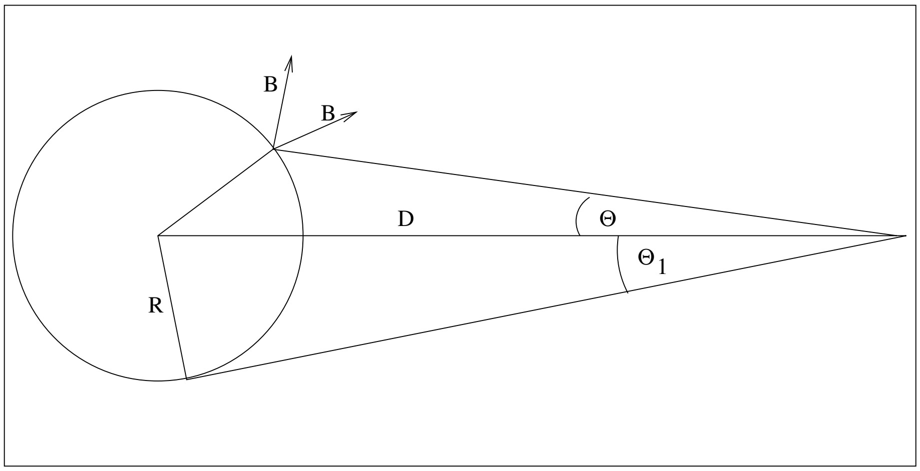
$$u_\nu = \frac{1}{c}\oint I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

gdzie wprowadziliśmy tzw. średnie natężenie promieniowania

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu d\omega$$

W atmosferze płasko-równoległej wzory mają trochę prostszą postać. Oś Z układu współrzędnych wyznacza kierunek pionowy, kąt ϕ to „azymut”, a kąt θ to kąt między osią Z a danym kierunkiem. Całkowanie po kącie bryłowym $d\omega$ rozdziela się na dwie całki: po $d\phi$ oraz po $d\theta$. Ze względu na symetrię wokół osi Z całkowanie względem $d\phi$ można przeprowadzić niezależnie, wynosi ono 2π. Zmienną kątową θ zwykle zastępuje się przez $\mu = \cos\theta$ i wtedy wzór na średnie natężenie ma postać:

$$J_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu d\mu$$



Rysunek 3.2: Strumień w odległości D od sfery o promieniu R i jednorodnej jasności B

3.1.3 Strumień

Strumień określamy jako ilość energii przechodzącej przez dA w czasie dt, a oznaczamy przez F_ν. Zauważmy, że powyższe określenie pomija zależność od kąta bryłowego $d\omega$. Ponieważ chcemy wiedzieć, w którą stronę przepływa energia, strumień powinien być wielkością wektorową $\vec{F_\nu}$ taką, że dla zorientowanego elementu powierzchniowego $d\vec{A}$

$$\vec{F_\nu} \cdot d\vec{A}$$

określa przepływ promieniowania przez $d\vec{A}$. Definiujemy zatem:

$$\vec{F_\nu} = \oint d\omega \; I_\nu \cdot \vec{\omega}$$

Obrazowo wygląda to mniej więcej tak, że dla każdego kierunku $\vec{\omega}$ rozchodzenia się promieniowania konstruujemy wektor o długości odpowiadającej wartości natężenia I_ν dla tego kierunku, a następnie z tych wektorów tworzymy jeden wypadkowy odpowiadający strumieniowi. W polu izotropowym taki wektor wypadkowy musi znikać: $F_\nu = 0$.

W atmosferze płasko-równoległej całkowanie wykonujemy, jak poprzednio, a iloczyn skalarny $I_\nu \cdot \vec{\omega} = \mu I_\nu$ to składowa „z" natężenia. Otrzymujemy tym razem wielkość skalarną:

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu$$

W odległości r od izotropowego źródła punktowego

$$F = \frac{const}{r^2}$$

Możemy się o tym przekonać wyobrażając sobie punktowe źródło otoczone dwiema sferami o promieniach r_1 i r_2. Energia przepływająca przez obie powierzchnie ma tę samą wartość: $4\pi r_1^2 F_1 = 4\pi r_2^2 F_2$, czyli $r^2 F = const$. Jak to pogodzić z wykazaną wcześniej stałością I_ν? Policzmy strumień dla dwóch przypadków, wychodząc z podanej wcześniej definicji:

1. w odległości D od środka sfery o promieniu R i jednorodnej jasności powierzchniowej $I_\nu(\mu) = B$ (zob. rys. 3.2):

$$F_\nu(D) = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu = 2\pi B \int_{\mu_1}^{1} \mu d\mu = 2\pi B \left[\frac{1}{2}\mu^2\right]_{\mu_1}^{1} = \pi B(1-\mu_1^2) = \pi B \sin^2(\Theta_1)$$

czyli:

$$F_\nu(D) = \pi B \frac{R^2}{D^2}$$

Na powierzchni gwiazdy strumień byłby $F(R) = \pi B$ a z odległością D malałby jak $\frac{1}{D^2}$

2. dla sfery o niejednorodnej jasności $I_\nu(\mu)$ zależnej od kąta μ też nietrudno jest wykazać, że

$$F_\nu(D) = \frac{R^2}{D^2} F_\nu(R)$$

Podsumowując: co obserwujemy z gwiazdy w odległości D?

- jeśli możemy rozdzielić kąty (np. dla tarczy Słonecznej), to obserwujemy $I_\nu(\mu)$ dla różnych kątów μ
- jeśli kątów rozdzielić nie możemy, to mierzymy tylko $F_\nu(D) = \frac{R^2}{D^2} F_\nu(R)$

3.1.4 Ciśnienie promieniowania

Ciśnienie jest to siła działająca na $1cm^2$ (jednostkę powierzchni), a siła to pęd przekazywany w jednostce czasu ($\frac{dp}{dt}$). Pęd fotonu to $p_\nu = \frac{h\nu}{c} = \frac{E_\nu}{c}$, czyli wkład do pędu pochodzący od danego promienia $\vec{\omega}$ to

$$dp_\nu = \frac{dE_\nu}{c}$$

Ponieważ element powierzchniowy dA jest nachylony do promienia $\vec{\omega}$, więc ilość energi przepływającej będzie zredukowana o czynnik μ względem ustawienia prostopadłego:

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{\omega}) d\omega \mu$$

Ponieważ do ciśnienia działającego na dA wlicza się tylko składową pędu prostopadłą do dA, więc dojdzie następna redukcja o czynnik μ i ostatecznie

$$dP_\nu = \frac{1}{c} I_\nu \mu^2 d\omega$$

$$P_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu \mu^2 d\omega$$

3.1.5 Momenty Eddingtona

W poprzednich rozdziałach zobaczyliśmy, że gęstość energii promieniowania, strumień oraz ciśnienie, opisywane są przez całki z natężenia promieniowania mnożonego przez kolejne potęgi zmiennej kątowej μ (zerową, 1 i 2). Są to tzw. momenty promieniowania. Ich prostszą postać, dotyczącą atmosfery płasko-równoległej, wprowadził Eddington:

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu d\mu$$

$$H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu$$

$$K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 d\mu$$

Zdefiniujmy jeszcze w tym miejscu tzw. zmienny czynnik Eddingtona:

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}$$

3.1.6 Współczynnik absorpcji

Definiujemy ogólnie współczynnik χ_ν absorpcji (nieprzezroczystości) w taki sposób, że element materii o przekroju dA i długości ds pobiera z wiązki $d\omega$ prostopadłej do dA ilość energii równą:

$$dE = \chi_\nu I_\nu dA\ ds\ d\omega\ d\nu\ dt$$

Wymiar współczynnika: $[\chi_\nu] = cm^{-1}$. W ośrodku statycznym χ_ν jest izotropowe, w ośrodku ruchomym występuje zależność od kąta spowodowana zależnością kątową efektu Dopplera. Warto rozróżniać absorpcję κ_ν i rozpraszanie σ_ν jako składowe całkowitej nieprzezroczystości: $\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$. W skład absorpcji κ_ν wchodzą przejścia:

- związano–związane
- związano–swobodne
- swobodno–swobodne
- dwuelektronowe

W skład rozpraszania σ_ν wchodzą procesy:

- związano–związane
- rozpraszanie na swobodnym elektronie (przy małych energiach –rozpraszanie Thomsona, przy $h\nu \gg mc^2$ –rozpraszanie Comptona)
- rozpraszanie na atomie, molekule (rozpraszanie Rayleigha)

Najczęściej emisję wymuszoną dołącza się do χ_ν jako negatywną absorpcję.

3.1.7 Współczynnik emisji

Określa się go poprzez ilość energii dodanej do pola promieniowania z elementu dAds:

$$dE = \eta_\nu dA\ ds\ d\omega\ d\nu\ dt$$

Na η_ν składają się: emisja termiczna η_ν^t i rozpraszanie η_ν^s.

Rozpraszanie

Wkład do emisji pochodzący od rozpraszania opisujemy tzw. funkcją redystrybucji:

$$R(\nu', \omega'; \nu, \omega) d\nu' d\nu \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi}$$

która określa prawdopodobieństwo, że foton ν', ω' będzie rozproszony na ν, ω. Zatem jeśli $\sigma_\nu = \sigma_0 R(\nu', \omega'; \nu, \omega)$, to całkowita ilość promieniowania wyemitowanego w $d\omega$ wyniesie:

$$\eta^s d\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \sigma_0 d\nu \frac{d\omega}{4\pi} \oint \frac{d\omega'}{4\pi} \int d\nu' R(\nu', \omega'; \nu, \omega) I_{\nu'}$$

Jeśli rozpraszanie jest spójne ($\nu' = \nu$) i izotropowe, to:

$$\eta^s = \sigma_\nu J_\nu$$

Emisja termiczna

Jeśli element materii jest w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, to musi on emitować tyle energii, ile zaabsorbował. Jest to tzw. prawo Kirchhoffa, można je zapisać:

$$\eta_\nu^t = \kappa_\nu I_\nu$$

Aby mówić o równowadze termodynamicznej musi zachodzić $I_\nu = B_\nu(T)$, a wówczas:

$$\eta_\nu^* = \kappa_\nu^* B_\nu(T)$$

i jest to tzw. prawo Kirchhoffa–Plancka.

Gdy w równowadze termodynamicznej z otoczeniem znajduje się ciało doskonale czarne, to absorbuje ono wszystko ($\kappa_\nu = 1$), a emituje $\eta_\nu = B_\nu(T)$. Gdy nasz element materii (fragmencik atmosfery gwiazdy) nie jest ciałem doskonale czarnym, to emituje on o tyle mniej, o ile mniej w porównaniu z ciałem doskonale czarnym zaabsorbował. W równowadze termodynamicznej nasz element może absorbować i rozpraszać. To, co jest rozproszone – nie zmienia równowagowego pola promieniowania. To, co zaabsorbowane, musi być wyemitowane, aby pola promieniowania nie zmienić. Jeśli „nasz" element materii „wyjmiemy" z atmosfery gwiazdy, to pomimo, że nie będzie otoczony gorącą plazmą i polem promieniowania, oczekujemy, że będzie świecił emitując tyle samo promieniowania, co wcześniej. Możemy przyjąć, że jest to właśnie emisja termiczna elementu materii o danej temperaturze T i nieprzezroczystości κ_ν. Przy małych gradientach temperatury możemy przyjąć, że jest to też emisja termiczna przy lokalnej wartości T (LTE):

$$\eta_\nu^t = \kappa_\nu^* B_\nu(T)$$

Promieniowanie termiczne stanie się „blackbody" dla ośrodka optycznie grubego.

Mihalas (1978 – podręcznik) twierdzi, że dla promieniowania w kontinuum wzór ten zachowuje słuszność nawet przy odstępstwach od LTE, jeśli tylko rozkład prędkości rekombinujących (lub przy przejściach swobodno–swobodnych zderzających się) cząstek jest Maxwellowski.

3.2 Równanie przepływu promieniowania

Przy powyższych definicjach będzie miało postać:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu$$

W przypadku stacjonarnym i jednowymiarowym

$$\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu$$

3.2.1 Proste przypadki

1. nie ma materii: $\chi_\nu = 0 = \eta_\nu$

$$\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = 0, \qquad I_\nu = const$$

2. tylko emisja: $\chi_\nu = 0$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \eta_\nu, \qquad I_\nu(z) = I_\nu(z_0) + \frac{1}{\mu}\int_{z_0}^{z} \eta_\nu dz'$$

3. tylko absorpcja: $\eta_\nu = 0$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\chi_\nu I_\nu, \qquad I_\nu(z_2) = I_\nu(z_1) exp\left(-\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\mu}\chi_\nu dz\right) = I_\nu(z_1)e^{-\frac{\tau}{\mu}}$$

3.2.2 Rozwiązanie formalne

Już zdążyliśmy wprowadzić głębokość optyczną:

$$d\tau_\nu = \chi_\nu ds$$

W atmosferze płasko–równoległej $d\tau_\nu = -\chi_\nu dz$, bo τ_ν i z rosną w przeciwnych kierunkach. Dalej definiujemy funkcję źródłową:

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$$

a stąd równanie przepływu przyjmuje postać:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau} = I_\nu - S_\nu$$

W LTE z prawa Kirchhoffa–Plancka wynika, że $S_\nu = B_\nu(T)$. Warto pamiętać rozróżnienie:

- promieniowanie termiczne: $S_\nu = B_\nu(T)$
- ciało doskonale czarne: $I_\nu = B_\nu(T)$.

Jeśli $\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$, to

$$\eta_\nu = \eta^t + \eta^s = \kappa_\nu B_\nu(T) + \sigma_\nu J_\nu$$

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu B_\nu(T) + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}$$

Zakładając, że znamy funkcję źródłową, możemy dokonać formalnego rozwiązania równania przepływu promieniowania. W tym celu najpierw policzmy pochodną „pomocniczą”, inaczej mówiąc wprowadźmy czynnik całkujący:

$$\frac{d}{d\tau}\left(I_\nu e^{-\frac{\tau}{\mu}}\right) = e^{-\frac{\tau}{\mu}}\left(\frac{dI_\nu}{d\tau} - \frac{1}{\mu}I_\nu\right) = -\frac{1}{\mu}e^{-\frac{\tau}{\mu}}S_\nu$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z wprowadzonej przed chwilą postaci równania przepływu. Teraz już łatwo pokazać, że

$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1)e^{-\frac{\tau_1-\tau_2}{\mu}} - \frac{1}{\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\frac{t-\tau_2}{\mu}} S_\nu(t)dt$$

3.2.3 Przykład z wykorzystaniem tzw. przybliżenia dwustrumieniowego

Przybliżenie dwustrumieniowe to zastąpienie promieniowania rozchodzącego się we wszystkich kierunkach przez rozchodzące się tylko w dwóch wybranych kierunkach. Inaczej mówiąc jest to zastąpienie całkowania po zmienej kątowej $d\mu$ przez dwupunktową kwadraturę Gaussa (sprawdź co to takiego, np. w książce: A.Ralston „Wstęp do analizy numerycznej" PWN 1975, rozdział 4.5). Można to zapisać:

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)d\mu = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Dla pola promieniowania $I_\nu(\mu)$ równa się to założeniu, że całe pole promieniowania możemy przybliżyć przez tylko dwa kierunki: $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Oznaczmy:

$$I^+ = I_\nu(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$I^- = I_\nu(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Stąd natychmiast mamy:

$$J = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$$

$$H = \frac{1}{2\sqrt{3}}(I^+ - I^-)$$

$$K = \frac{1}{6}(I^+ + I^-) = \frac{1}{3}J$$

Wykorzystamy przybliżenie dwustrumieniowe do sformułowania warunków brzegowych potrzebnych do rozwiązania równania przepływu promieniowania:

$$\mu\frac{\partial I}{\partial \tau} = I - S$$

Całkując to równanie od -1 do 1 po $d\mu$ otrzymamy:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = J - S$$

a całkując od -1 do 1 względem $\mu d\mu$ otrzymamy:

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} = H = \frac{1}{3}\frac{\partial J}{\partial \tau}$$

Wykorzystaliśmy znalezioną przed chwilą w przybliżeniu dwustrumieniowym zależność $K = \frac{1}{3}J$. Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy jedno dla niewiadomej J, za to drugiego rzędu:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} = \epsilon(J - B)$$

W ostatnim przekształceniu wykorzystaliśmy postać funkcji źródłowej $S = \epsilon B_\nu(T) + (1-\epsilon)J_\nu$. Właśnie ze względu na tę postać możemy zająć sie prostszym problemem – rozwiązywania równania względem J zależnego tylko od τ, zamiast względem $I_\nu(\tau)$ dla wielu kątów μ. Warunki brzegowe możemy zadawać tylko w postaci $I^\pm(\tau_{brzeg})$, więc musimy umieć zamienić to na warunek względem J. W tym celu skorzystamy znowu z przybliżenia dwustrumieniowego:

$$J = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial J}{\partial \tau} = H = \frac{1}{2\sqrt{3}}(I^+ - I^-)$$

stąd otrzymamy:

$$I^+ = J + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial J}{\partial \tau}$$

$$I^- = J - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial J}{\partial \tau}$$

i w zależności od tego, które natężenie mamy zadane, wybieramy odpowiedni warunek brzegowy.

Rozpatrzmy warstwę $\tau \in (0, \infty)$, dla której $\rho = const$, $T = const$, $S = \epsilon B_\nu(T) + (1-\epsilon)J_\nu$. Oznaczmy dodatkowo: $\tau_* = \sqrt{3\epsilon}\tau$. Równanie do rozwiązania przybierze postać:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau_*^2} = J - B$$

Ponieważ $B_\nu(T) = const$, więc $\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} = 0$ i możemy to dodać do naszego równania otrzymując:

$$\frac{\partial^2 (J-B)}{\partial \tau_*^2} = J - B$$

a rozwiązania takiego równania poszukujemy w postaci:

$$J - B = c_1 e^{\tau_*} + c_2 e^{-\tau_*}$$

Jeśli chcemy by dla $\tau \to \infty$ J było skończone, to musi być

$$c_1 = 0$$

Drugi warunek brzegowy znajdziemy zakładając, że warstwa nie jest oświetlana z góry: $I^- = 0$, czyli dla $\tau = 0$ będzie:

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial J}{\partial \tau}$$

Stąd wyprowadzamy pamiętając, że na powierzchni $\tau_* = 0$:

$$c_2 = -\frac{B}{1+\sqrt{\epsilon}}$$

Dalej obliczamy:

$$J_\nu(\tau) = B_\nu(T)(1 - \frac{e^{-\tau_*}}{1+\sqrt{\epsilon}})$$

$$F_\nu = 4\pi H = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\epsilon}}{1+\sqrt{\epsilon}}B_\nu(T)e^{-\tau_*}$$

$$S_\nu(\tau) = B_\nu(T)(1 - (1-\sqrt{\epsilon})e^{-\tau_*})$$

oraz natężenie promieniowania opuszczające powierzchnię atmosfery:

$$I^+(\tau = 0) = \frac{2B_\nu(T)\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}+1}$$

3.3 Różne przybliżenia w temacie przepływu promieniowania

3.3.1 Przybliżenie Rosselanda

Zakładamy atmosferę płasko-równoległą, w której parametry zależą tylko od z, ale natężenie promieniowania zależy również od $\mu = \cos\Theta$. Równanie przepływu:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\chi_\nu (I_\nu - S_\nu)$$

przepiszmy inaczej:

$$I_\nu(z,\mu) = S_\nu(z) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial z}$$

W pierwszym przybliżeniu załóżmy, że I_ν nie zmienia się względem z, $\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = 0$.

$$I_\nu^{(0)}(z,\mu) \approx S_\nu^{(0)}(T)$$

Ponieważ takie $I_\nu^{(0)}$ jest niezależne od μ, więc można całkować po kątach i otrzymać:

$$J_\nu^{(0)} \approx S_\nu^{(0)}(T)$$

Skąd, pamiętając, że:

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu B_\nu(T) + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}$$

otrzymujemy:

$$S_\nu^{(0)} = B_\nu(T)$$

Tak obliczone $I_\nu^{(0)}$ podstawmy dalej, aby otrzymać kolejne przybliżenie:

$$I_\nu^{(1)}(z,\mu) \approx B_\nu(T) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z}$$

Przybliżenie to będzie o tyle słuszne, o ile pochodna będzie mała, a to będzie spełnione, gdy będziemy głęboko w atmosferze, gdzie sytuacja zmienia się powoli w skali średniej drogi optycznej fotonu. Zauważmy, że otrzymaliśmy liniową zależność natężenia od μ Mimo uproszczenia ten drugi wyraz pozwala uwzględnić niezerowy strumień. Obliczmy go:

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu^{(1)} \mu d\mu = -\frac{2\pi}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} \int_{-1}^{1} \mu^2 d\mu = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że część $B_\nu(T)$ natężenia nie zależy od μ, więc daje zerowy wkład do strumienia. Obliczmy teraz całkowity strumień:

$$F(z) = \int_0^\infty F_\nu(z) d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial z} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu$$

Zauważmy, że:

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\partial}{\partial T}(\frac{\sigma}{\pi} T^4) = \frac{4\sigma}{\pi} T^3$$

Jeśli zdefiniujemy teraz **średni współczynnik absorpcji** Rosselanda jako:

$$\frac{1}{\chi_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T}d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T}d\nu}$$

to otrzymamy:

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\chi_R}\frac{\partial T}{\partial z}$$

Powyższy wzór wynikający z przybliżenia Rosselanda nazywany jest często równaniem dyfuzji promieniowania. A to dlatego, że równanie to ma postać:

[strumień] = [współczynnik dyfuzji] $\times$ [gradient wielkości fizycznej]

Równanie dyfuzyjne wykazuje, że skoro z powierzchni gwiazdy uchodzi energia, to musi to oznaczać, że temperatura wzrasta ku środkowi. Podstawiając stałe fizyczne oraz zakładając, że $\chi_R \approx 1$ można pokazać, że w Słońcu $T_c \sim 6\ 10^6$K.

Gdy wzór na I_ν wycałkujemy po $d\nu$:

$$I(z,\mu) = B(T(z)) + \frac{3}{4\pi}\mu F(z)$$

Obliczmy stosunek wyrazu anizotropowego do izotropowego, korzystając z definicji temperatury efektywnej T_{eff}:

$$\frac{F(z)}{B(T(z))} = \frac{\frac{\sigma}{\pi}T_{eff}^4}{\frac{\sigma}{\pi}T^4}$$

Zatem dla dużych temperatur $T \gg T_{eff}$ wyciekanie, dyfuzja energii maleje, przybliżenie dyfuzyjne jest coraz lepsze. Z kolei dla $T \sim T_{eff}$ mamy swobodny wypływ energii promienistej.

Wróćmy jeszcze do średniego współczynnika absorpcji. Całkujemy (średniujemy) według Rosselanda nie sam współczynnik χ_ν, ale jego odwrotność $\frac{1}{\chi_\nu}$, co daje nam największy wkład do całki pochodzący od najmniejszych nieprzezroczystości. Jest to korzystne, bo tam gdzie jest najmniejsza nieprzezroczystość jest największy przepływ promieniowania a na najdokladniejszym opisie przepływu właśnie nam zależy. Przebieg funkcji $\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T}$ jest podobny do przebiegu $B_\nu(T)$, więc z większą wagą są uwzględniane nieprzezroczystości w pobliżu maksimum funkcji Plancka. Z powyższych względów średnia Rosselanda jest bardzo często stosowana dla uśredniania bardzo starannie obliczonych tablic nieprzezroczystości.

3.3.2 Warunek równowagi promienistej

Głęboko w gwieździe energia jest wyzwalana z materii i następnie dyfunduje na zewnątrz. W normalnych gwiazdach nie ma wytwarzania energii w atmosferze, atmosfera transportuje energię na zewnątrz. W stanie stacjonarnym rozkład po częstościach energii promieniowania może się zmieniać, może być różny podział między promienistym a niepromienistym transportem, ale całkowity strumień energii jest ściśle zachowany. Znane są dwa główne sposoby transportu energii w atmosferach gwiazdowych:

1. promieniowanie

2. konwekcja - bardzo wydajny sposób transportu energii, trudny do opisu matematycznego, istotny przy konstruowaniu modeli wnętrz gwiazdowych

Warunek równowagi promienistej w atmosferze stacjonarnej stwierdza, że całkowita energia zaabsorbowana w danym miejscu musi być równa całkowitej energii wyemitowanej. Zróbmy więc bilans:

$$\text{absorpcja}: \quad \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \chi_\nu I_\nu = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu J_\nu d\nu$$

$$\text{emisja}: \quad \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \eta_\nu = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu S_\nu d\nu$$

$$\text{bilans}: \quad 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) d\nu = 0$$

Przypomnijmy sobie równanie przepływu w postaci:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu)$$

całkując je po $\oint d\omega$ otrzymamy:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F_\nu} = 4\pi \chi_\nu (S_\nu - J_\nu)$$

a następnie całkując po $d\nu$ otrzymamy:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) d\nu$$

Zatem warunek równowagi promienistej sprawia, że:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

co w jednym wymiarze przepisuje się na: $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ czyli $F = const$, a w sferycznej symetrii $r^2 F = const$.

3.3.3 Przybliżenie Eddingtona

Rosseland zakładał, że I_ν na dużych głębokościach zbliża się do $B_\nu(T)$, Eddington przyjmował, że wystarczy, gdy I_ν zbliża się do rozkładu izotropowego, niekoniecznie do wartości równowagi termodynamicznej. Zatem zastosowanie tego drugiego przybliżenia jest szersze, niż poprzedniego. Przełóżmy to sformułowanie na liczby. Izotropowość wprowadzamy rozwijając I_ν w szereg względem μ i zostawiając tylko wyrazy liniowe:

$$I_\nu(\tau, \mu) = a_\nu(\tau) + b_\nu(\tau)\mu$$

a stąd obliczamy:

$$J = a$$

$$H = \frac{b}{3}$$

$$K = \frac{a}{3}$$

Rezultat znamy jako przybliżenie Eddingtona:

$$K = \frac{1}{3} J$$

Ogólnie przybliżenie Eddingtona polega na założeniu, że $K = \frac{1}{3}J$ wszędzie w atmosferze, co pozwala rozwiązywać równanie przepływu w sposób opisany wcześniej w przybliżeniu dwustrumieniowym. Mianowicie całkując równanie przepływu po $d\mu$ oraz po $\mu d\mu$ możemy sprowadzić je do równania różniczkowego drugiego rzędu względem J:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} = J - S$$

a jeśli $S_\nu = \epsilon B_\nu(T) + (1-\epsilon)J_\nu$, to:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} = \epsilon(J_\nu - B_\nu(T))$$

To ostatnie równanie też czasem nazywa się równaniem dyfuzji promieniowania.

3.3.4 Atmosfera szara

To przybliżenie polega na założeniu: $\chi_\nu \equiv \chi$. Jeśli teraz oznaczymy: $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$, to równanie przepływu będzie:

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S$$

Jeśli narzucimy równowagę promienistą, to przy $\chi_\nu = \chi$ otrzymamy $S = J$ oraz:

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - J$$

Założenie LTE daje $S_\nu = B_\nu(T)$, czyli w przypadku atmosfery szarej $S = B(T) = \frac{\sigma}{\pi}T^4$

Obliczmy momenty równania przepływu:

całkowanie po $d\mu$: $\frac{dH}{d\tau} = J - J = 0$, czyli H = const

całkowanie po $\mu d\mu$: $\frac{dK}{d\tau} = H$

To ostatnie równanie można całkować, bo H=const, a ponieważ $H = \frac{1}{4\pi}F$, więc:

$$K(\tau) = H\tau + c = \frac{1}{4\pi}F\tau + c$$

Głęboko powinno obowiązywać przybliżenie Eddingtona ($K = \frac{1}{3}J$), zatem:

$$J(\tau) \to \frac{3}{4}\frac{F}{\pi}\tau, \quad \text{dla} \quad \tau \gg 1$$

Założenie za Eddingtonem, że ($K = \frac{1}{3}J$) wszędzie, pozwala na dalszą analizę:

$$J_E(\tau) = \frac{3}{4}\frac{F}{\pi}\tau + c'$$

Aby obliczyć stałą c' obliczmy strumień na powierzchni. Z rozwiązania formalnego, przy $\tau_2 = 0, \quad \tau_1 = \infty$ oraz $S = J$ w równowadze promienistej, otrzymamy:

$$I(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\mu}} S(t)dt$$

A stąd:

$$F(0) = \oint d\omega \mu I = \frac{F}{2} + \pi c'$$

Ponieważ $F = const$, więc $F(0) = F$ i $c' = \frac{F}{2\pi}$

$$J_E(\tau) = \frac{3}{4}\frac{F}{\pi}(\tau + \frac{2}{3})$$

Jeśli równocześnie założymy LTE, to z powyższego otrzymamy:

$$\frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3}{4}\frac{\sigma T_e^4}{\pi}(\tau + \frac{2}{3})$$

$$T^4 = \frac{3}{4}T_{eff}^4(\tau + \frac{2}{3})$$

Zatem otrzymaliśmy, że $T = T_{eff}$ przy $\tau = \frac{2}{3}$. Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że foton wysłany z $\tau = \frac{2}{3}$ dotrze do powierzchni, jest równe $e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.5$.

Podstawiając $S(\tau) = J_E(\tau)$ do rozwiązania formalnego możemy otrzymać pociemnienie brzegowe:

$$I_E(0) = \frac{3}{4}\frac{F}{\pi}(\mu + \frac{2}{3})$$

$$\frac{I_E(0,\mu)}{I_E(0,1)} = \frac{3}{5}(\mu + \frac{2}{3})$$

Obserwacje dla Słońca potwierdzają ten wzór, tym samym sugerując równowagę promienistą w zewnętrznych warstwach atmosfery Słońca.

Czasem dokładnego rozwiązania poszukuje się w postaci:

$$J(\tau) = \frac{3}{4}\frac{F}{\pi}(\tau + q(\tau))$$

gdzie $q(\tau)$ to tzw. funkcja Hopfa. możemy powiedzieć, że w przybliżeniu Eddingtona $q(\tau) = \frac{2}{3}$.

Rozdział 4

Obliczenia modelowe

4.1 Numeryczne rozwiązywanie równania przepływu

Numeryczne rozwiązywanie równania różniczkowo–całkowego, jakim jest równanie przepływu promieniowania w atmosferze gwiazdowej, wymaga innego podejścia, niż tego znanego z klasycznej analizy matematycznej. Rozwiązania nie będziemy poszukiwali w postaci funkcji ciągłej, dającej się opisać wzorem, choćby i skomplikowanym. Będziemy poszukiwali wartości naszych niewiadomych (np. I_ν) tylko i wyłącznie w wybranych dyskretnych punktach, czyli dla wybranych głębokości, kątów i częstości. Pochodne zastąpimy odpowiednimi ilorazami różnicowymi a całki sumami z właściwie dobranymi wagami. W ten sposób rozwiązanie równania różniczkowo–całkowego sprowadzi się do rozwiązania układu równań liniowych względem wartości niewiadomych w wybranych punktach. Jeśli punktów wybierzemy dużo, a powinniśmy – skoro chcemy dokładnie odtworzyć przebieg zmiennych, to do rozwiązania będziemy mieli ogromny układ równań. Ale będzie to nadal układ równań liniowych, który stosunkowo prosto daje się rozwiązać przy zastosowaniu komputera.

Omówione są poniżej dwa przykłady metod pozwalające na zorientowanie się w skali problemu oraz na samodzielne przeprowadzenie najprostszych obliczeń.

4.1.1 Metoda Feautrier

Uwzględniamy tylko $\mu > 0$ i zapisujemy:

$$I^\pm = I(z, \pm\mu, \nu)$$

równanie przepływu:

$$\pm\mu\frac{\partial I^\pm}{\partial z} = \chi(S_\nu - I^\pm)$$

Definiujemy:

$$u = u(z, \mu, \nu) = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$$

$$v = v(z, \mu, \nu) = \frac{1}{2}(I^+ - I^-)$$

dodając stronami równanie przepływu dla $\pm\mu$ otrzymujemy:

$$\mu\frac{\partial v}{\partial z} = \chi_\nu(S_\nu - u)$$

a z odejmowania:

$$\mu\frac{\partial u}{\partial z} = -\chi_\nu v$$

Z obu tych równań:

$$-\mu^2\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial u}{\partial z}) = \chi_\nu(S_\nu - u)$$

a przechodząc do całkowania po $\partial\tau$:

$$\mu^2\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} = u - S_\nu$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe drugiego rzędu względem u. Dla jego rozwiązania potrzebne są warunki brzegowe.

- dla $\tau = 0$ przyjmiemy $I^- = 0$, skąd $u(\tau = 0) = v(\tau = 0)$ i dalej:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)_{\tau=0} = u(\tau = 0)$$

- dla τ_{max} trzeba określić $I^+(\tau_{max})$, by otrzymać:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)_{\tau_{max}} = I^+(\tau_{max}) - u(\tau_{max})$$

Można w tym miejscu zastosować przybliżenie dyfuzyjne. Zachodzi wówczas:

$$I(\tau_{max}, \mu) = B_\nu(\tau_{max}) - \frac{\mu}{\chi_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)_{\tau_{max}}$$

stąd wynika, że:

$$u(\tau_{max}) = B_\nu(\tau_{max}), \quad v(\tau_{max}) = -\frac{\mu}{\chi_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)_{\tau_{max}}$$

a stąd warunek brzegowy:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)_{\tau_{max}} = -\frac{\mu}{\chi_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)_{\tau_{max}}$$

Rozwiązanie numeryczne polega na przejściu od różniczek do ilorazów różnic. W tym celu wybieramy siatki dyskretnych wartości:

- głębokości optyczne τ_d, $d = 1, ...D$, $\tau^1 < \tau^2 < ...$
- kąty μ_m, $m = 1, ...M$
- częstości ν_n, $n = 1, ...N$

Oznaczymy: $u(\tau_d, \mu_m, \nu_n) = u_{dmn}$. Zastępujemy całki kwadraturami, np. zamiast:

$$S_\nu = \alpha_\nu \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + \beta_\nu$$

piszemy:

$$S_{dn} = \alpha_{dn} \sum_{n'=1}^{N} a_{n'} R_{n'n} \sum_{m=1}^{M} b_m u_{dmn'} + \beta_{dn}$$

Przy różniczkowaniu po z czy τ istotna jest zmienna d, więc parę zmiennych (m, n) możemy zastąpić jednym indeksem „i", $i = 1, ...I$, gdzie $I = NM$. Np. powyższy wzór zapiszemy:

$$S_{di} = \alpha_{di} \sum_{i'=1}^{I} R_{di'i} u_{di'} + \beta_{di}$$

Rozpisujemy pochodne:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tau} u\right|_{\tau_d} \approx \frac{u_{d+1} - u_d}{\tau_{d+1} - \tau_d}$$

Nie jest to zbyt dokładne, gdyż tak określona pochodna, zamiast dotyczyć punktu d na brzegu przedziału $(d, d+1)$, dotyczy środka tegoż przedziału. Równie dobrze możemy wybrać przedział $(d-1, d)$ i otrzymać inną wartość pochodnej. Znane są różne sposoby poprawiania tej sytuacji i w podręcznikach o metodach numerycznych można znaleźć ich opisy. Z drugą pochodną jest już lepiej, bo określona jest w punkcie d:

$$\begin{aligned} \mu^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right|_{\tau_d} &= \mu^2 \left\{ \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau_d + \frac{\tau_{d+1} - \tau_d}{2}} - \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau_d - \frac{\tau_d - \tau_{d-1}}{2}} \right\} \frac{1}{\frac{\tau_{d+1} - \tau_d}{2} + \frac{\tau_d - \tau_{d-1}}{2}} \\ &\approx \mu^2 \left\{ \frac{u_{d+1} - u_d}{\tau_{d+1} - \tau_d} - \frac{u_d - u_{d-1}}{\tau_d - \tau_{d-1}} \right\} \frac{2}{\tau_{d+1} - \tau_{d-1}} \end{aligned}$$

Odpowiednio grupując wyrazy można schematycznie zapisać:

$$\mu^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right|_{\tau_d} = \mu^2 (a_d u_{d-1} + b_d u_d + c_d u_{d+1})$$

a równanie przepływu promieniowania:

$$\mu_i^2 (a_{id} u_{i,d-1} + b_{id} u_{id} + c_{id} u_{i,d+1}) = u_{id} - S_{id}$$

gdzie S_{id} to jest to samo, co wcześniejsze S_{di}, a indeksy zmieniają się w zakresach: $i = 1, ..., I$, $d = 2, ..., D-1$.

Dla każdej głębokości d zdefiniujmy wektor $\mathbf{u}_d$ o rozmiarze I, złożony z elementów u_{di}. Wówczas równanie przepływu promieniowania z uwzględnieniem rozpisania S_{di} można zapisać:

$$-\mathbf{A}_d \mathbf{u}_{d-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d - \mathbf{C}_d \mathbf{u}_{d+1} = \mathbf{L}_d$$

gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ są macierzami diagonalnymi $I \times I$, $\mathbf{B}$ jest macierzą pełną zawierającą jako elementy pozadiagonalne sumy pochodzące z całkowania S_d, $\mathbf{L}$ jest wektorem zawierającym wyrazy pochodzenia termicznego. Do skompletowania układu potrzeba warunków brzegowych. Na powierzchni mamy:

$$\mu \frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\tau_{2,i} - \tau_{1,i}} = u_{1,i}$$

czyli:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{C}_1\mathbf{u}_2 = \mathbf{L}_1$$

analogicznie dolny warunek brzegowy:

$$\mathbf{A}_D\mathbf{u}_{D-1} + \mathbf{B}_D\mathbf{u}_D = \mathbf{L}_D$$

Ostatecznie otrzymamy równanie macierzowe postaci:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} \mathbf{B}_1 & -\mathbf{C}_1 & 0 & & \cdots & & & \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & -\mathbf{C}_2 & & & & & \\ 0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & -\mathbf{C}_3 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ & & & & -\mathbf{A}_{D-1} & \mathbf{B}_{D-1} & -\mathbf{C}_{D-1} \\ & & & & & -\mathbf{A}_D & \mathbf{B}_D \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{D-1} \\ \mathbf{u}_D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{D-1} \\ \mathbf{L}_D \end{array}\right|$$

Rozwiązujemy to równanie metodą eliminacji Gaussa.

4.1.2 Metoda zmiennego czynnika Eddingtona

Zauważmy, że w równaniu przepływu w funkcji S mamy J_ν, a nie poszczególne $u(\tau, \mu, \nu)$, czyli gdybyśmy rozwiązywali to równanie względem J to niepotrzebna była by informacja o kątowym rozkładzie promieniowania. Możemy ją wyeliminować wprowadzając tzw. zmienny czynnik Eddingtona, zdefiniowany jako:

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}$$

Z równania:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u - S$$

po wycałkowaniu po $d\mu$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial \tau^2} = J_\nu - S_\nu$$

$$\frac{\partial^2 (f_\nu J_\nu)}{\partial \tau^2} = J_\nu - S_\nu$$

Jeszcze tylko trzeba określić warunki brzegowe i powyższe równanie można dyskretyzować tak samo, jak poprzednio. Warunek brzegowy na powierzchni, gdzie $\tau = 0$, wyprowadzimy z faktu, że zachodzi tam $u = v$, czyli $\mu\frac{\partial u}{\partial \tau} = u$, zatem:

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} = H$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(f_\nu J_\nu\right)_0 = H_\nu(0)$$

Dolny warunek brzegowy, dla τ_{max} wyprowadzimy z zależności: $v = -\frac{\mu}{\chi}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}$ obowiązującej w przybliżeniu dyfuzyjnym. Stąd łatwo obliczyć:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(f_\nu J_\nu\right)_{\tau_{max}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)_{\tau_{max}}$$

Rozwiązanie całego problemu polega na iteracji:

1. przy zadanym S_ν, (np. $S_\nu = B_\nu(T)$) rozwiązujemy równanie drugiego rzędu względem $u_{\mu,\nu}$, osobno dla każdej częstości ν i kąta μ, mamy w tym przypadku do rozwiązania równanie macierzowe, z macierzą trójdiagonalną $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}_i\mathbf{u}_i = \mathbf{S}_i$$

2. mając obliczone u_{dmn} wyznaczamy

$$f_{dn} = \frac{\sum_m b_m\mu_m^2 u_{dmn}}{\sum_m b_m u_{dmn}}$$

$$H_n(0) = \sum_m b_m\mu_m u_{1mn}$$

3. mając f_n rozwiązujemy równanie drugiego rzędu względem J_ν

4. na podstawie J_ν wyznaczamy nowe S_ν i powtarzamy iterację.

Zyskujemy znacznie na czasie obliczeń, bo nie musimy posługiwać się pełnymi macierzami, jak w metodzie Feautrier, lecz tylko diagonalnymi.

4.1.3 Zadanie na komputer

1. Napisać program na rozwiązywanie równania przepływu przy zadanej funkcji źródłowej S_ν, dla $u_{\mu\nu}$ dla każdego kąta osobno, tylko dla jednej częstości. Obliczyć f_ν dla każdej głębokości. Wybrać równy krok w $\Delta\log\tau$, dla $\tau \in (10^{-3}, 10)$, 5–6 kroków na dekadę. Zastosować kwadraturę Gaussa w kątach, sprawdzić dokładność f_ν w zależności od ilości kątów M.

2. Napisać program na rozwiązywanie J przy zadanych f_ν, zakładając, że $S_\nu = \alpha_\nu J_\nu + \beta_\nu$

3. Połączyć oba programy, zbadać zbieżność iteracji dla $\alpha = 1-\epsilon, \quad \beta = \epsilon$. Zakładane wartości początkowe $J_\nu \equiv 1, \quad \epsilon = 0.1,\ 0.01,\ 0.0001$

4.2 O widmie liniowym klasycznie

4.2.1 Równanie Milne – Eddingtona

Do tej pory mieliśmy dla linii widmowej równanie:

$$\mu\frac{dI_\nu}{dz} = \kappa_\nu(S_\nu - I_\nu)$$

gdzie

$$\kappa_\nu = \chi_l \phi_\nu, \quad S_\nu = (1-\epsilon)\bar{J} + \epsilon B_\nu(T)$$

a dla kontinuum:

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu)$$

gdzie

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$$

oraz dla promieniowania termicznego $\chi_\nu = \kappa_c, S_\nu = B_\nu(T)$, a dla rozpraszania $\chi_\nu = \sigma, S_\nu = J_\nu$. Połączmy te dwa równania w jedno:

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = -(\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma) I_\nu + \chi_l \phi_\nu \epsilon B_\nu(T) + \chi_l \phi_\nu (1-\epsilon)\bar{J} + \kappa_c B_\nu(T) + \sigma J_\nu$$

Załóżmy teraz, że rozpraszanie w liniach widmowych jest koherentne, tzn. $\phi_\nu = \delta(\nu)$. Wtedy $\bar{J} = \int J_\nu \phi_\nu d\nu = J_\nu$. Oznaczmy $d\tau_\nu = -(\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma)dz$. Otrzymamy równanie przepływu:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\epsilon \chi_l \phi_\nu + \kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma} B_\nu(T) + \frac{(1-\epsilon)\chi_l \phi_\nu + \sigma}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma} J_\nu$$

a po zastąpieniu odpowiedniego ułamka symbolem λ_ν:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu(T) - (1-\lambda_\nu) J_\nu$$

Jest to tzw. równanie Milne – Eddingtona. Pamiętajmy o jego wadach: rozpraszanie tak naprawdę nie jest koherentne, do obliczenia współczynników nieprzezroczystości trzeba skądś znać obsadzenia poziomów (np. LTE), a atomy mają więcej, niż dwa poziomy.

Zakładamy dalej, że $\epsilon, \sigma, \kappa_c, \lambda_\nu$ nie zależą od głębokości optycznej kontinuum – τ. Zakładamy, że $B_\nu(T)$ jest liniowa względem τ:

$$B_\nu(T) = a + b\tau$$

. Przez β oznaczamy stosunek nieprzezroczystości w linii do kontinuum:

$$\beta = \frac{\chi_l \phi_\nu}{\kappa_c + \sigma}$$

Będziemy mieli:

$$\frac{\tau}{\tau_\nu} = \frac{1}{1+\beta}$$

$$B_\nu(T) = a + b\tau = a + \frac{b}{1+\beta}\tau_\nu = a + p_\nu \tau_\nu$$

Obliczmy momenty równania przepływu promieniowania:

$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = \lambda_\nu \left(J_\nu - B_\nu(T)\right)$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu$$

Stosując przybliżenie Eddingtona ($K = \frac{1}{3}J$):

$$\frac{1}{3}\frac{d^2J}{d\tau_\nu^2} = \frac{d^2K}{d\tau_\nu^2} = \frac{dH}{d\tau_\nu} = \lambda_\nu \left(J_\nu - B_\nu(T)\right)$$

$$\frac{1}{3\lambda_\nu}\frac{d^2}{d\tau_\nu^2}\left(J_\nu - B_\nu(T)\right) = J_\nu - B_\nu(T)$$

Problem znany, rozwiązania szukamy w postaci:

$$J_\nu - B_\nu(T) = \alpha_\nu e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu} + \beta_\nu e^{\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu}$$

Aby w $\tau_\nu \to \infty$ było $J_\nu = B_\nu(T)$, musi być $\beta_\nu = 0$. α_ν trzeba wyznaczyć z warunku brzegowego na powierzchni. Zakładamy tam prostą sytuację: dla $\mu < 0$ przyjmujemy $I_\nu = 0$, a dla $\mu > 0$ zakładamy, że $I_\nu = I$ nie zależy od μ. Wówczas:

$$J(0) = \frac{1}{2}I$$

$$H(0) = \frac{1}{4}I$$

czyli

$$J(0) = 2H(0)$$

a stąd:

$$\alpha_\nu = \frac{2p_\nu - 3a}{3 + 2\sqrt{3\lambda}}$$

Czyli mamy wzór na średnie natężenie:

$$J_\nu = a + p_\nu\tau_\nu + \frac{2p_\nu - 3a}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}}e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu}$$

Stąd strumień opuszczający powierzchnię atmosfery:

$$H_\nu(0) = \frac{\sqrt{3\lambda_\nu}}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}}a + \frac{p_\nu}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}}$$

a teraz strumień bez linii, w kontinuum, czyli zamiast λ_ν podstawiamy $\lambda_c = \frac{\kappa_c}{\kappa_c + \sigma}$, a $p_\nu = b$:

$$H_c(0) = \frac{\sqrt{3\lambda_c}}{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}}a + \frac{b}{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}}$$

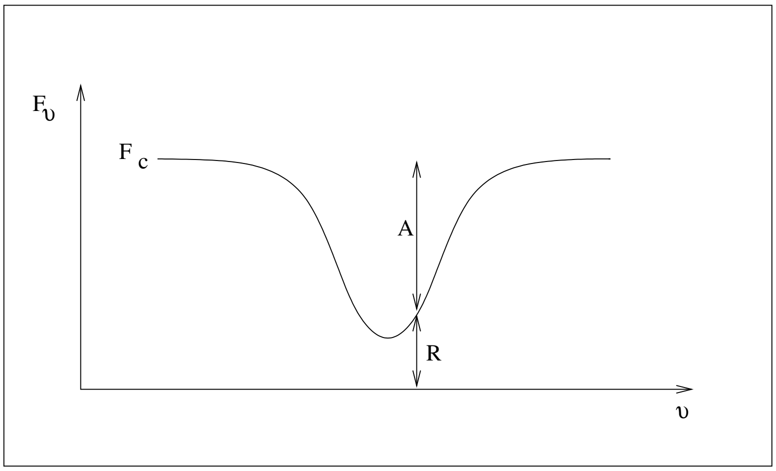
Dla linii widmowej, o strumieniu opisywanym zależnością F_ν, widocznej na tle kontinuum F_c, definiujemy tzw. strumień resztkowy:

$$R = \frac{F_\nu}{F_c}$$

mamy:

$$R = \frac{H_\nu(0)}{H_c(0)} = \frac{a\sqrt{3\lambda_\nu} + p_\nu}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}}{a\sqrt{3\lambda_c} + b}$$

Upraszczamy dalej: zakładamy $\sigma = 0$, czyli bez rozpraszania w kontinuum. Mamy dwa przypadki:



Rysunek 4.1: Definicje strunienia resztkowego R oraz absorpcji A w linii widmowej

1. $\epsilon = 0$ - linia rozproszeniowa

$$\lambda_\nu = \frac{\kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c}, \quad p_\nu = \frac{b\kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c}$$

Jeśli linia jest silna, tzn. $\chi_l \phi_\nu \gg \kappa_c$, to otrzymamy, że $\lambda_\nu \to 0$ i $p_\nu \to 0$, czyli $R_\nu \to 0$. Inaczej mówiąc fotony są rozpraszane ze środka linii „aż do skutku".

2. $\epsilon = 1$ - linia absorpcyjna. Dla niej $\lambda_\nu = 1$, a jeśli linia ma być silna, to $p_\nu \to 0$ i w rezultacie

$$R_\nu = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + b} \neq 0$$

W centrum silnej lini absorpcyjnej natężenie nie spada do zera, widoczne są warstwy zewnętrzne i odpowiadający im strumień Plancka.

4.2.2 Krzywa wzrostu

Definiujemy absorpcję w linii:

$$A_\nu = \frac{F_c - F_\nu}{F_c}$$

Oczywiście będzie:

$$A_\nu = \frac{H_c(0) - H_\nu(0)}{H_c(0)}$$

Dalej upraszczamy zakładając LTE (wtedy $\sigma = 0$) oraz, że linia widmowa formuje się w warstwie o jednorodnej temperaturze i gęstości elektronowej. Stąd:

$$\lambda_\nu = 1, \quad \lambda_c = 1, \quad p_\nu = \frac{b}{1+\beta}$$

$$H_\nu(0) = \frac{a\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} + \frac{b}{3 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\beta} = A + \frac{B}{1+\beta}$$

$$H_c(0) = A + B$$

$$A_\nu = \frac{B}{A+B}(1 - \frac{1}{1+\beta}) = A_0 \frac{\beta}{1+\beta}$$

Definiujemy tzw. szerokość równoważną linii:

$$W_\nu = \int_0^\infty A_\nu d\nu$$

Jeśli zmienimy całkowanie z ν na $\Delta\nu = \nu - \nu_0$, to przy założeniu, że linia jest symetryczna względem ν_0:

$$W_\nu = 2A_0 \int_0^\infty \frac{\beta(\Delta\nu)}{1+\beta(\Delta\nu)} d(\Delta\nu)$$

Wróćmy do definicji β, podstawiając profil absorpcyjny Voigta:

$$\beta = \frac{\chi_l \phi_\nu}{\kappa_c} = \frac{\chi_0}{\kappa_c} H(a,x) = \beta_0 H(a,x)$$

gdzie $a = \frac{\Gamma}{\Delta\nu_D}$, $x = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}$. Zmieńmy całkowanie: $d(\Delta\nu) = \Delta\nu_D dx$ i wprowadźmy nową wielkość: $W^* = \frac{W}{2A_0\Delta\nu_D}$. Wówczas otrzymujemy:

$$W^* = W^*(a, \beta_0) = \int_0^\infty \frac{\beta_0 H(a,x)}{1 + \beta_0 H(a,x)} dx$$

W podanym wyżej wzorze na β występuje nieprzezroczystość w linii χ_l, która w przypadku LTE wyraża się formułą:

$$\chi_l = \frac{h\nu}{4\pi} N_l^* B_{lu} (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}) = \frac{\pi e^2}{mc} f_{lu} N_l^* (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$$

gdzie zamiast współczynnika Einsteina B_{lu} można wprowadzić tzw. moc oscylatora f_{lu}. Jeśli teraz nieprzezroczystość w kontinuum zapiszemy jako: $\kappa_c = k_c(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$, to:

$$\beta_0 = \frac{\pi e^2}{mc} f_{lu} N_l^* (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}) \frac{1}{\kappa_c} \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \frac{f_{lu} N_l^*}{k_c} \frac{c}{v_0 \nu}$$

Zależność W^* od β_0 nazywamy krzywą wzrostu.

Całkę w wyrażeniu W^* można w przybliżeniu oszacować:

1. dla słabych linii $\beta_0 < 1$, $W^* \sim \beta_0$, czyli jest proporcjonalne do ilości absorbujących atomów

2. gdy linia widmowa sięga maksymalnej głębokości, ale ma ciągle słabe skrzydła, to $W^* \sim \sqrt{ln\beta_0}$

3. gdy w profilu linii dominują skrzydła, to $W^* \sim \sqrt{\beta_0}$

Jaka fizyka kryje się za powyższymi zależnościami? Rozważmy, jak może zachowywać się linia widmowa, gdy będzie stopniowo przybywało absorbujących atomów:

1. Na początku, gdy mamy mało atomów, każdy atom dodany będzie zdolny absorbować. Na siłę linii będzie wpływać tylko jądro dopplerowskie, skrzydła będą przezroczyste. Jest to liniowa część krzywej wzrostu.

2. W pewnym momencie jądro linii stanie się całkiem nieprzezroczyste, czyli wszystkie fotony, które mogą zostać zaabsorbowane, zostaną zaabsorbowane.Dopóki nie rozwiną się skrzydła, dodatkowe atomy niewiele zmienią w profilu. Jest to część nasycona (płaska) krzywej wzrostu.

3. Kiedy uzbiera się wystarczająco dużo absorbera, by skrzydła stały się znaczące, szerokość równoważna linii znów wzrasta. Mówimy o części tłumieniowej lub pierwiastkowej krzywej wzrostu.

4.2.3 Wyznaczanie obfitości metodą krzywej wzrostu

Najprostsze ideowo jest obliczenie krzywej wzrostu dla każdej mierzonej linii, przy zastosowaniu modelu fotosfery, który uwzględnia równowagę jonizacyjną, wzbudzeniową, zmiany stałych tłumienia, numeryczne całkowanie równania przepływu promieniowania. Krzywa wzrostu przedstawia wówczas zależność zredukowanej szerokości równoważnej W^* od β_0. Mierząc w widmie W odczytujemy z krzywej wartość β_0, a stąd wyliczamy obfitość danego pierwiastka.

W podanym wcześniej wzorze na β_0 występuje średnia prędkość ruchów termicznych v_0, której wartości nie znamy. Zgadujemy zatem jej wartość. Po obliczeniu obfitości danego pierwiastka z wielu jego różnych linii może okazać się, że obfitość jest funkcją W. Interpretuje się to jako zły wybór v_0. Trzeba tę wartość poprawić i obliczać obfitości jeszcze raz.

Teoretycznie dla każdej linii widmowej krzywa wzrostu jest inna. Ale niedokładności pomiarów szerokości równoważnych oraz słaba znajomość mocy oscylatorów f_{ij} powodują większy rozrzut punktów obserwacyjnych, niż wynoszą różnice między indywidualnymi krzywymi wzrostu. Zatem zamiast liczyć wiele krzywych wzrostu, przyjmujemy, że dla badanej gwiazdy o danej T_{eff} istnieje jedna standardowa krzywa wzrostu.

Wielkość β_0 jest funkcją obfitości N_l danego pierwiastka oraz stałych fizycznych charakteryzujących daną linię widmową. Konstruując teoretyczną krzywą wzrostu nie zmienialiśmy wartości tych stałych, lecz tylko obfitość pierwiastka. Dla porównań z obserwacjami możemy zmienić sytuację i na wykres nanosić punkty odpowiadające różnym liniom danego pierwiastka. Będziemy mieli wówczas ustaloną obfitość N_l a zmieniać się będą wartości stałych atomowych, czyli też zmieniać się będzie parametr β_0. Otrzymamy zależność W od β_0, czyli też krzywą wzrostu.

Najlepsze dopasowanie do siebie krzywych obserwacyjnej i teoretycznej pozwala wyznaczyć obfitość N_l pierwiastka oraz poszerzenie termiczne v_0. Szczegóły techniczne wyznaczania obfitości pierwiastków metodą krzywej wzrostu, różne wersje tej metody, referencje do prac źródłowych, opisane są wyczerpująco w podręczniku D.F.Gray'a.

4.3 Modele atmosfer

Omawiane do tej pory definicje i równania dotyczące przepływu promieniowania przez materię znajdują zastosowanie w tworzeniu (obliczaniu) tzw. modeli atmosfer. Mówiąc najogólniej model atmosfery to tabela z wartościami liczbowymi parametrów opisujących budowę atmosfery. Otrzymujemy ją w rezultacie rozwiązania bardzo złożonego układu równań, niemożliwego do rozwiązania bez wprowadzenia licznych uproszczeń. Ale dopiero utworzenie takiej tabeli-modelu pozwala nam mówić, że coś wiemy o budowie gwiazdy.

Standardowe założenia dotyczące gometrii modelu, to przyjęcie, że atmosfera jest płasko–równoległa, albo sferycznie symetryczna. Upraszczamy w ten sposób równania, ale uniemożliwiamy analizę małoskalowych struktur, które obserwujemy na Słońcu.

Zazwyczaj też zakłada się, że atmosfera jest stacjonarna, choć ostatnio w miarę wzrostu możliwości komputerów coraz częściej obliczane są modele atmosfer zmiennych w czasie. W nieruchomej atmosferze w każdym jej miejscu siła ciężkości warstw leżących powyżej równoważona jest przez ciśnienie. Całkowite ciśnienie równe jest sumie ciśnienia gazu oraz ciśnienia promieniowania. Do opisu gazu stosujemy równanie stanu gazu doskonałego. Ciśnienie promieniowania zależy od strumienia energii przepływającego przez atmosferę, w gwiazdach podobnych do Słońca jest ono zaniedbywalne, ale jest bardzo istotne w gorących i jasnych gwiazdach typu O. Dla obliczenia ciśnienia promieniowania musimy znać współczynnik nieprzezroczystości, który jest zależny od temperatury. Ale rozkładu temperatury w atmosferze nie znamy, musimy go dopiero obliczyć.

Zakładana jest równowaga promienista, ale w modelach atmosfer gwiazd chłodnych uwzględnia się także transport konwektywny energii, choć najczęściej w ramach bardzo prostej teorii, tzw. średniej drogi mieszania. Rozkładu temperatury zapewniającego nam równowagę promienistą nie znamy. Jego obliczenie to faktycznie najistotniejsza część skonstruowania modelu atmosfery. Mamy do wyboru dwie drogi: albo zgadywać rozkład temperatury i następnie go poprawiać, albo od razu rozwiązywać równanie przepływu promieniowania automatycznie spełniające warunek równowagi promienistej.

Współczynnik nieprzezroczystości w atmosferach gwiazd jest złożeniem absorpcji ciągłej oraz absorpcji w liniach widmowych.

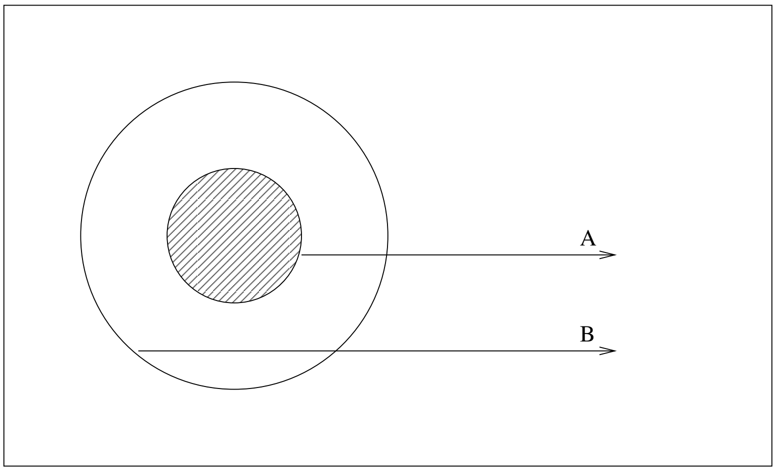
Na absorpcję ciągłą składają się przejścia związano–swobodne oraz swobodno–swobodne. Aby wymienić poszczególne procesy dominujące w danym miejscu atmosfery gwiazdy, należy znać temperaturę, gęstość, ciśnienie oraz zakres widma nas interesujący.

Dla gazu złożonego wyłącznie z wodoru w zakresie widzialnym widma absorpcja ciągła zachodzi wskutek jonizacji z poziomu trzeciego, czyli w tzw. kontinuum Paschena. Współczynnik absorpcji zależny jest od ilości atomów na danym poziomie energetycznym. Jeżeli dla przykładu rozpatrzymy warunki panujące w fotosferze słonecznej ($\log T = 3.78, \log P_e = 1.5$) i założymy LTE, to z równań Boltzmanna i Sahy możemy obliczyć obsadzenie poziomu 3 atomu wodoru. Okazuje się ono trzy rzędy wielkości mniejsze, niż gęstość ujemnego jonu wodoru H^-. Ponieważ ujemny jon wodoru absorbuje głównie w zakresie widzialnym widma, więc to on okazuje się być głównym czynnikiem absorpcji w fotosferze Słońca. W zakresie ultrafioletowym z kolei dominuje rozpraszanie Rayleigha na atomach metali, a w dalszym ultrafiolecie absorpcja w kontinuum Lymanna. W zakresie podczerwonym dominują przejścia swobodno–swobodne. Oczywiście w gwiazdach gorętszych i chłodniejszych dochodzą do głosu inne procesy.

Oprócz kontinuów nieprzezroczystość materii gwiazdowej zależy od obecności linii widmowych, których mogą być miliony. Zdarza się, że linie widmowe zachodzą na siebie blokując wypływ promieniowania w danym zakresie długości fal. Oczywiście energia zaabsorbowana w jednym zakresie musi być wyemitowana w innym, aby strumień był zachowany, więc efekt blokowania pokazuje, że linie widmowe choć same bardzo wąskie, są w stanie zmieniać widma gwiazd w szerokim zakresie.

Uwzględnienie absorpcji w liniach widmowych przy obliczaniu modeli atmosfer wymaga albo uwzględnienia ogromnej ilości częstotliwości pokrywających gęsto całe widmo, albo zastosowania rozmaitych uproszczeń.

Podsumowując – każdy program komputerowy obliczający model atmosfery gwiazdowej musi rozwiązywać układ równań nieliniowych, wysoce ze sobą sprzężonych, opisujących stan



Rysunek 4.2: Najprostszy model gwiazdy z otoczką

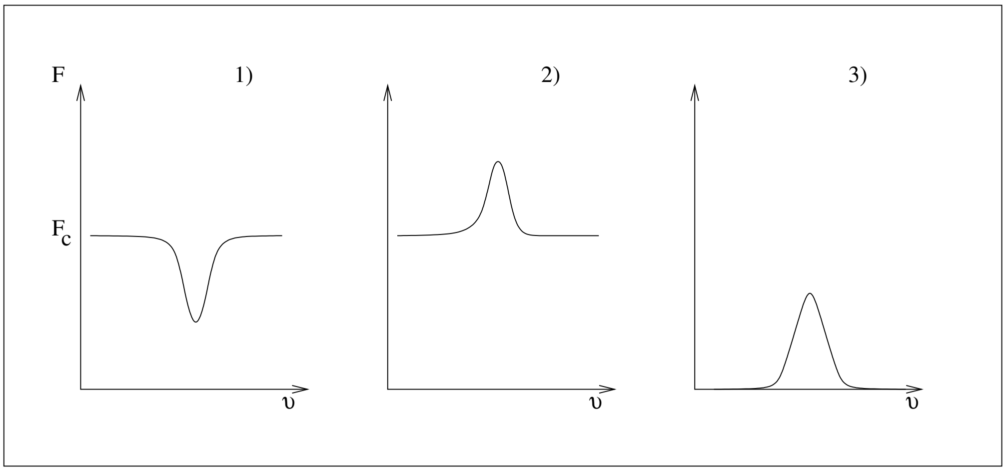
fizyczny materii:

- równanie przepływu promieniowania wyznaczające średnie natężenia $\bar{J}_\nu$
- równanie równowagi hydrostatycznej wyznaczające całkowitą gęstość cząstek N
- równanie równowagi promienistej określające rozkład temperatury T
- równanie zachowania ilości cząstek wyznaczające gęstość elektronową N_e
- równania równowagi statystycznej wyznaczające obsadzenia wszystkich uwzględnianych poziomów
- wiele równań definiujących poszczególne cząstki (atomy i jony uwzględniane w modelu)
- wiele równań obliczających współczynniki nieprzezroczstości oraz tempa przejść promienistych i zderzeniowych w liniach i kontinuach

W podręcznikach oraz pracach źródłowych opisane są szczegółowo metody rozwiązywania omawianego układu równań. Nie istnieje jedna najlepsza metoda i jeden program komputerowy rozwiązujący wszystko.

4.4 Przepływ promieniowania w ekspandujących atmosferach

Rozpatrzmy najprostszy model gwiazdy, w której atmosfera jest na tyle rozległa, że jej grubość jest porównywalna z promieniem gwiazdy. Taki model składa się z nieprzezroczystej sfery emitującej jak ciało doskonale czarne o temperaturze T_c, otoczonej sferyczną warstwą o temperaturze T_s, przy czym warstwa ta absorbuje jedynie w wąskiej linii widmowej. Przedyskutujmy, co zaobserwujemy patrząc na nasz obiekt wzdłuż dwóch linii: jednej – przechodzącej przez środkową sferę (A), drugiej – omijającej ją (B). Rozważmy przy tym dwa przypadki: $T_s < T_c$ oraz $T_s > T_c$; oraz dwie częstości: w środku linii widmowej ν_0 oraz daleko od niej ν_1.



Rysunek 4.3: Linie widmowe gwiazdy z otoczką. Rysunki odpowiadają omówionym w tekście przypadkom 1–3. F_c to strumień w kontinuum, wynoszący w naszym przypadku $B_\nu(T_c)$

1. linia A oraz $T_s < T_c$: zaobserwujemy na częstości ν_0 linię absorpcyjną pochodzącą od otoczki, leżącą na tle kontinuum $B_\nu(T_c)$, pochodzącego z centralnej sfery

2. linia A ale $T_s > T_c$: zaobserwujemy linię emisyjną ν_0 na tle kontinuum

3. linia B: zawsze zaobserwujemy linię emisyjną ν_0, a poza nią natężenie jest zerowe

Jeśli obserwujemy obiekt z daleka i nie widzimy tarczy gwiazdy, to linie: emisyjna (z boków) i absorpcyjna (z centrum), wypełniają się nawzajem. W zależności od szczegółów ich kształtów możemy mieć w rezultacie dominację absorpcji lub emisji na częstości ν_0, możemy obserwować emisyjne bądź absorpcyjne skrzydła. A jeśli otoczka gwiazdowa ekspanduje, wówczas profil absorpcyjny jest przesunięty w stosunku do emisyjnego w stronę fal krótszych i rezultatem jest profil typu P-Cygni. Oczywiście przesunięcie to będzie tym większe, im większa będzie prędkość ekspansji otoczki. Przykłady omawianych profili pokazane są na rysunku 4.4.

Jeśli zechcemy skonstruować model bardziej złożony, lepiej odpowiadający rzeczywistej gwieździe z wiejącym z niej wiatrem, to dla obliczenia profilu linii widmowej musimy rozwiązywać równanie przepływu promieniowania.

Teorię przepływu promieniowania można w prosty sposób uogólnić na przypadek ekspandujących atmosfer. Najistotniejszym zjawiskiem, które trzeba przy tym uwzględnić, jest efekt Dopplera powodujący, że profil absorpcyjny ϕ_ν staje się zależny od zmiennej kątowej μ. Przypomnijmy profil linii widmowej poszerzanej termicznie:

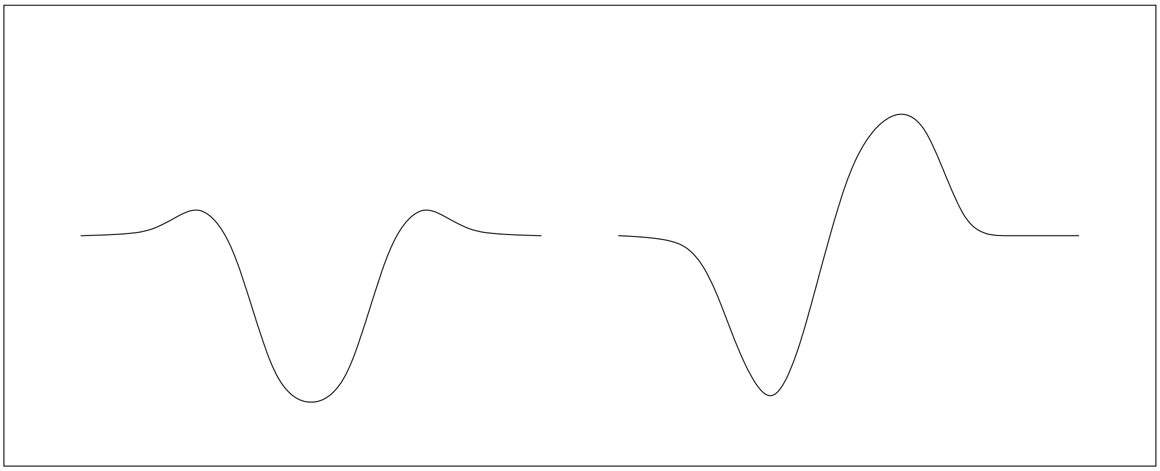
$$\phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

gdzie

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \quad \Delta\nu_D = \frac{\nu_0 v_{th}}{c}$$

W ośrodku ekspandującym prędkość ekspansji wyraża się zazwyczaj w jednostkach prędkości dopplerowskiej v/v_{th}. Wówczas obserwowany profil trzeba opisać zależnością:

$$\phi(x - \mu v)$$



Rysunek 4.4: Przykłady profili otoczkowych powstałych z superpozycji linii absorpcyjnej i emisji otoczkowej. Z lewej strony przykład otoczki stacjonarnej, z prawej – profil typu P-Cygni otoczki ekspandującej.

gdzie μ jest kosinusem kąta między kierunkiem wektora prędkości w danym miejscu a kierunkiem do obserwatora. Wzór ten opisuje Dopplerowskie przesunięcie częstości w przybliżeniu nierelatywistycznym, łatwo rozpoznajemy sytuację, kiedy efekt ten jest zerowy (gdy ruch materii odbywa się prostopadle do kierunku patrzenia), a kiedy maksymalny (gdy ruch odbywa się do lub od obserwatora).

Oczywiście opublikowane są liczne metody rozwiązywania równania przepływu w ekspandującym, sferycznie symetrycznym ośrodku.

Bardzo wydajne okazały się algorytmy oparte na metodzie Feautrier. Sferyczną atmosferę dzielimy na siatkę wybierając zbiór promieni r_i oraz zbiór tzw. linii patrzenia p_j równoległych do kierunku do obserwatora. Zwykłe całkowanie równania przepływu z jednym warunkiem brzegowym może dać narastający błąd. Metoda Feautrier przekształca to równanie w równanie drugiego rzędu, które musi mieć dwa warunki brzegowe, zatem kontrolujemy rozwiązanie z dwóch stron.

Powszechne też są metody oparte na przybliżeniu Sobolewa zasadnym w przypadku dużych gradientów prędkości. Problem przepływu promieniowania staje się wówczas lokalny. Wokół danego punktu istnieje obszar, w którym fotony danej linii widmowej mogą oddziaływać z materią. Sąsiednie obszary ekspandują zaś z prędkością na tyle różną, że efekt Dopplera przesuwa w nich daną linię widmową do inych częstości, a wspomniane przed chwilą fotony mogą z nich swobodnie uciekać. W literaturze publikowane są wzory na funkcję źródłową i na profile linii, przy czym tak naprawdę równanie przepływu promieniowania rozwiązywane nie jest.

4.5 Hydrodynamika sferycznych i ekspandujących atmosfer

Będziemy zajmować się gazem doskonałym, ściśliwym, bez lepkości, nieprzewodzącym, składającym się z jednego rodzaju cząstek o masie m, zaniedbujemy efekty związane z jonizacją. Określamy **funkcję rozkładu prędkości** $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ taką, że

$$f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$$

jest ilością cząstek w elemencie objętości $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+d\mathbf{r})$ z prędkościami z przedziału $(\mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v})$. Na pole prędkości $\mathbf{v}$ każdej cząstki składają się:

- prędkości przepływu makroskopowego
- mikroskalowy rozkład termiczny, który zakładamy izotropowy

Gęstość cząstek w 1cm^3 wynosi:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

Gęstość masowa wynosi:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = m \cdot n(\mathbf{r}, t)$$

Średnia prędkość cząstki, czyli prędkość przepływu gazu (cieczy), w kierunku „i” $(i = x, y, z)$ wyraża się wzorem:

$$n\langle v_i \rangle = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathrm{v}_i$$

Pełna prędkość cząstki w danej chwili jest sumą:

$$v_i = \langle v_i \rangle + v_i'$$

gdzie v_i' jest składową i ruchów termicznych. Strumień masy w danej chwili wynosi:

$$m \cdot n(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \varrho \mathbf{v}$$

Tensor przenoszenia pędu – czyli tempo przenoszenia składowej i pędu przez powierzchnię ustawioną prostopadle do kierunku j:

$$\Pi_{ij}(\mathbf{r}, t) = m \int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) v_i v_j$$

Gdy rozpiszemy na składowe $\langle v \rangle$ i v', skorzystamy z faktu, że $\langle v' \rangle = 0$ oraz $\langle v_i' v_j' \rangle = \langle (v_i')^2 \rangle \delta_{ij} = \frac{kT}{m}\delta_{ij}$ otrzymamy:

$$\Pi_{ij} = mn\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + nkT\delta_{ij} = \varrho v_i v_j + p\delta_{ij}$$

W dalszym ciągu wykładu pisząc o prędkości v przepływu będziemy mieli na myśli wielkość $\langle v \rangle$, skorzystaliśmy z tego w drugiej części powyższego równania.

Do opisu zmian w gazie powodowanych przepływem materii stosowane są dwa podejścia:

- opis Eulera – jest to opis zmian posługujący się układem stacjonarnym, w którym obliczamy pochodne cząstkowe, np $\frac{\partial}{\partial t}$
- opis Lagrange'a – opis, w którym układ odniesienia podąża za poruszającym się gazem, w nim obliczamy pochodne całkowite (substancjalne) $\frac{D}{Dt}$

Różnica między tymi podejściami staje się istotna w przypadku relatywistycznym, w przypadku nierelatywistycznym jest to tylko sprawa wygody zapisu. Opis Lagrange'a jest korzystniejszy w prostszych, np jednowymiarowych przypadkach. Powiązanie obu pochodnych wyraża się następującym wzorem:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

4.5.1 Równanie ciągłości

Ubytek masy w elemencie objętości $d\tau$ musi być równoważony przepływem masy przez powierzchnię S tego elementu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho d\tau = -\oint \varrho \mathbf{v} dS = -\int \nabla(\varrho \mathbf{v}) d\tau$$

Zastosowaliśmy tu twierdzenie o dywergencji. Ponieważ równość musi zachodzić dla dowolnego $d\tau$, więc funkcje podcałkowe muszą być równe. Otrzymujemy równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0$$

lub:

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Dla przepływu sferycznie symetrycznego:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \varrho v\right) = 0$$

W przypadku stacjonarnym otrzymujemy:

$$4\pi r^2 \varrho v = const = \dot{M}$$

4.5.2 Równanie pędu

Gęstość pędu wynosi $\varrho \mathbf{v}$. W ustalonym elemencie objętości $d\tau$ bilansujemy zmianę pędu wynikającą z wypływu pędu przez powierzchnię i z działania zewnętrznej siły $\mathbf{f}$ mierzonej na jednostkę objętości:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \varrho \mathbf{v} d\tau\right) = -\oint \Pi \cdot dS + \int \mathbf{f} d\tau = \int \left(\mathbf{f} - \nabla \cdot \Pi\right) d\tau$$

Otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \Pi + \mathbf{f}$$

Podstawiając znaną wartość Π_{ij} oraz korzystając z równania ciągłości otrzymujemy:

$$\varrho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mathbf{f}$$

Inaczej:

$$\varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

w sferycznej symetrii (jeden wymiar), z siłą grawitacji $f = -GM\varrho r^{-2}$:

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM\varrho}{r^2}$$

4.5.3 Równanie energii

I zasada termodynamiki:

$$d\epsilon = dQ - dW$$

gdzie $d\epsilon$ jest zmianą energii wewnętrznej, na którą składają się ruchy mikroskalowe oraz wewnętrzne wzbudzenia cząstek gazu, dQ jest ciepłem, dodatnie w przypadku zysku, dW jest pracą wykonaną przez gaz. To samo równanie dla energii wewnętrznej na jednostkę masy:

$$de = dq - pd(1/\varrho)$$

W prostszym przypadku, gdy wymiana ciepła odbywa się wyłącznie przez przewodnictwo:

$$\mathbf{q}_c = -\kappa\nabla T, \qquad dq/dt = -\frac{1}{\varrho}\nabla\mathbf{q}_c$$

A w układzie Lagrange'a mamy:

$$\frac{De}{Dt} + p\frac{D(1/\varrho)}{Dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla\cdot\mathbf{q}_c$$

Korzystając z równania ciągłości otrzymamy:

$$\varrho\frac{De}{Dt} + p\nabla\cdot\mathbf{v} = -\nabla\cdot\mathbf{q}_c$$

Z wprowadzonego wcześniej równania pędu po wymnożeniu stronami przez $\mathbf{v}$ otrzymamy:

$$\varrho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,p = \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}$$

Dodajemy oba równania energii:

$$\varrho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right) + \nabla\cdot(p\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{f} - \nabla\cdot\mathbf{q}_c$$

Po przejściu do układu Eulera, skorzystaniu z równania ciągłości i odrobinie przekształceń, otrzymujemy równanie dla energii:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho e\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho e + p\right)\mathbf{v} + \mathbf{q}_c\right] = \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}$$

W przypadku stacjonarnym w symetrii sferycznej (jeden wymiar):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 v\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho e + p\right) - r^2\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right] + r^2\varrho v\frac{GM}{r^2} = 0$$

4.5.4 Fale akustyczne

Jako przykład wniosków, ktore można wyprowadzić z podanych powyżej równań, rozpatrzmy rozchodzenie się fal w gazie.

Jeśli ściśliwy gaz poddamy małym impulsowym zaburzeniom (ściskanie i rozrzedzanie), to wytwarzają się w nim i rozchodzą się fale akustyczne. Oznaczmy stan równowagi indeksem 0: ϱ_0 i p_0; a stan zaburzony:

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1, \qquad p = p_0 + p_1$$

$$\varrho_1 \ll \varrho_0, p_1 \ll p_0$$

W przypadku jednowymiarowym z pochodnej przestrzennej ∇ zostaje $\frac{\partial}{\partial x}$. Jeśli pominiemy w równaniach iloczyny małych wyrazów, przy czym przyjmiemy, że prędkość fali v też jest mała, to z równania ciągłości zostanie nam:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

a z równania pędu, przy f=0 zostanie:

$$\varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

W gazie doskonałym, bez lepkości i przewodnictwa, nie ma wymiany ciepła między elementami gazu, mamy proces adiabatyczny, zachowana jest entropia S, możemy zapisać dla pochodnej:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \varrho}|_S \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$$

gdzie $|_S$ oznacza pochodną przy stałej entropii. Mamy więc układ dwóch równań, z których przez zróżniczkowanie i wyeliminowanie pochodnych mieszanych otrzymujemy jedno równanie:

$$\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} = 0$$

Jest to równanie falowe dla fal rozchodzących się z prędkością a.

Dla procesów adiabatycznych w gazie doskonałym możemy obliczyć pochodną występującą w definicji a:

$$a = \sqrt{\gamma p/\varrho} = \sqrt{\frac{\gamma k T}{\mu m_H}}$$

W przypadku swobodnej wymiany ciepła elementu gazu z otoczeniem fluktuacje temperatury w fali są niszczone, fala jest tłumiona, a proces jest izotermiczny, otrzymujemy:

$$a = \sqrt{\frac{k T_0}{\mu m_H}}$$

4.5.5 Rozważania teoretyczne dotyczące wiatrów gwiazdowych

Rozpatrzmy taką ekspansję atmosfery gwiazdowej, która jest stała, radialna, sferycznie symetryczna. Takie zjawisko nazywamy ogólnie wiatrem gwiazdowym. Równania energii i pędu można połączyć (jest to wycałkowany ostatni wzór z rozdziału wprowadzającego równanie energii, ale pomińmy szczegóły rachunkowe) w jedno równanie:

$$F = -\dot{M}_* \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} - \frac{G M_*}{r} \right] + 4\pi q r^2 = F_0 + F_A$$

gdzie indeks 0 dotyczy poziomu odniesienia r_0, a

$$F_A = \int_{r_0}^{r} dr' \left[-\dot{M}_* D + 4\pi r^2 Q \right]$$

F tak określone jest strumieniem energii wiatru powiązanym ze strumieniem przepływającej materii, entalpii, grawitacyjnej energii potencjalnej oraz z przewodnictwem cieplnym. Energia dodana do do wiatru F_A wynika zarówno z dodawania pędu D jak i ciepła Q. Warto pamiętać o rozróżnianiu tych dwóch źródeł energii. Wzrost pędu następuje wskutek działania sił przyłożonych do materii, natomiast wzrost ciepła to przyrost energii wewnętrznej gazu (wzrost entropii) powodowany rozpraszaniem jakiegoś strumienia energii (np promieniowania elektromagnetycznego lub fal magnetohydrodynamicznych). W zależności od mechanizmu dominującego w przekazywaniu energii do wiatru wyróżniamy:

- wiatr napędzany termicznie – kiedy gradient ciśnienia termicznego jest jedyną siłą skierowaną na zewnątrz. Energia potrzebna dla podtrzymania wymaganej temperatury może być dostarczana wieloma sposobami, choć właściwie konieczny jest jakiś strumień fal mechanicznych
- wiatr napędzany falami – przede wszystkim rozpatrywane są fale magnetohydrodynamiczne mogące przekazywać pęd wiatrowi
- wiatr napędzany promieniście – kiedy silny strumień ultrafioletowy gwiazdy jest absorbowany przez liczne silne linie rezonansowe
- wiatr napędzany falami uderzeniowymi – pulsacje gwiazdy mogą rozwijać się w fale uderzeniowe rozchodzące sie na zewnątrz

Energię wiatru gwiazdowego na jednostkę masy można określić:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}v_t^2 - \frac{1}{2}v_g^2 + \frac{1}{2}v_q^2$$

Wartości poszczególnych charakterystycznych prędkości, powiązanych z energią wewnętrzną (v_t), grawitacyjną (v_g) i przewodnictwem cieplnym (v_q) można łatwo wyprowadzić z podanego wcześniej wzoru na F.

Możemy przyjąć w uproszczeniu, że wiatr u podstawy jest silnie związany grawitacyjnie

$$E_0 \approx -\frac{1}{2}v_{g_0}^2 + \frac{1}{2}v_{q_0}^2$$

a z kolei w dużej odległości energia jest niesiona głównie przez przepływ

$$E_\infty \approx \frac{1}{2}v_\infty^2$$

Różnica $E_\infty - E_0$ to energia dodana do wiatru, jest to energia rozpędzająca wiatr. Ponadto w wietrze rozchodzi się strumień energii w formie przewodzonego ciepła. Zatem strumień energii F_{d_0} pochodzący z gwiazdy i docierający do podstawy wiatru musi być conajmniej równy sumie

- strumienia przewodzącego $r^2 q_0$
- strumienia rozpędzającego $F_\infty - F_0$

Strumień ten musi dostarczyć energii do:

- wyniesienia materii z pola grawitacyjnego gwiazdy
- rozpędzenia materii do prędkości asymptotycznej
- dostarczenia energii wypromieniowanej na zewnątrz przez wiatr

W masywnych wiatrach gwiazd wczesnych typów widmowych $v_\infty^2 \gg v_{g_0}^2$ i większość energii zużywana jest na przyspieszanie. W wiatrach gwiazd typu słonecznego $v_\infty^2 \approx v_{g_0}^2$. Z kolei w gwiazdach późnych typów widmowych $v_\infty^2 \ll v_{g_0}^2$ i niemal cała energia wykorzystywana jest na wyniesienie materii z pola grawitacyjnego.

Przy zadanych parametrach gwiazdy można oszacować strumień F_{d_0} uchodzący z atmosfery i potrzebny do rozpędzenia wiatru:

$$\frac{F_{d_0}}{r_0^2} \approx 3.3 \cdot 10^3 \left(\frac{-\dot{M}}{10^{-7}}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{400 R_\odot}{R_*}\right)^3 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{v_{g_0}^2}\right) \mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}}$$

- Dla wiatru słonecznego mającego bardzo małe tempo utraty masy $\dot{M} \approx 2\,10^{-14} M_\odot rok^{-1}$ otrzymujemy $\frac{F_{d_0}}{r_0^2} \approx 10^5$
- Dla typowego nadolbrzyma K5, $M_* \approx 16 M_\odot$, $R \approx 400 R_\odot$, z dużo większym tempem utraty masy $\dot{M} \approx 10^{-7}$ otrzymujemy $\frac{F_{d_0}}{r_0^2} \approx 6\,10^4$
- Dla Miry $M_* \approx 1 M_\odot$, $R \approx 400 R_\odot$, z jeszcze większą utratą masy $\dot{M} \approx 2\,10^{-6}$ otrzymujemy $\frac{F_{d_0}}{r_0^2} \approx 5\,10^4$

Dlaczego otrzymujemy tak podobne energie przy tak różnych gwiazdach i tempach utraty masy? Po pierwsze promienie gwiazd masywnych są tak duże, że bariera potencjału grawitacyjnego jest w nich znacznie mniejsza niż na Słońcu. Po drugie większy promień oznacza większą powierzchnię, przez którą strumień energii jest transportowany, znacznie większą, niż powierzchnia Słońca. Czyli różnorodność temp wypływu materii dużo bardziej jest powiązana z rozmiarami atmosfer niż z wypływających z nich strumieniem energii.

4.6 Atmosfera Słońca

Fotografia rentgenowska Słońca pokazuje trzy główne grupy struktur:

1. obszary aktywne i jasne miejsca w koronie, powiązane z zamkniętymi strukturami pól magnetycznych
2. dziury koronalne, powiązane z otwartymi konfiguracjami pól mag
3. obszary spokojne, ze słabymi koronalnymi polami magnetycznymi, które wydają się być zamknięte w dużej skali

Różnice w warunkach fizycznych w różnych warstwach atmosfery wydają się być powiązane z konfiguracją i siłą pól magnetycznych w tych obszarach.

4.6.1 Modele atmosfery Słońca

Konstruowane są dwa typy modeli atmosfer: teoretyczne i półempiryczne. W modelach teoretycznych rozkład temperatury jest wyznaczany z obliczeń zgodnie z teoriami fizycznymi, z tylko kilkoma parametrami charakteryzującymi atmosferę. W modelach półempirycznych rozkład temperatury jest dopasowywany metodą prób i błędów aż do otrzymania zadowalającego widma zgodnego z obserwacjami. Modele teoretyczne obliczali Kurucz (w LTE) i Anderson (non-LTE), obaj uwzględniali miliony linii widmowych. Modele półempiryczne najbardziej znane, to Maltby et al, który jest ulepszoną wersją modellu Vernazza, Avrett and Loeser (VAL).

Model VAL pokazuje przebieg temperatury z wysokością dla przeciętnie spokojnego Słońca, pokazuje obszary formowania się linii i kontinuów. Wzrost temperatury w koronie wynika ze wzrostu temperatury jasnościowej w zakresie dużych nieprzezroczystości. Wzrost ten jest przerwany przez plateau ok. 20 000 K, które zostało wprowadzone dla powiększenia głębokości optycznej linii Ly-beta.

Półempiryczne modele Ayres and Testerman oparte na analizie obserwowanych linii CO wykazują, że o ile linie te formują się w LTE, temperatura powinna maleć, bez chromosferycznego wzrostu. Ale istnieją prace wykazujące, że efekty non-LTE są tu zaniedbywalnie małe. Z drugiej strony są dowody obserwacyjne chromosferycznego wzrostu temperatury. Najwidoczniej wzrost chromosferyczny nie występuje na całej powierzchni Słońca, odpowiednia ilość chłodnego materiału musi być obecna, by wyjaśnić obserwowaną niską temperaturę jasnościową w liniach CO.

4.6.2 Fotosfera i chromosfera słoneczna

Minimum temperatury nie jest do dzisiaj jednoznacznie określone. Pierwsze obliczenia (1964) dawały wartość 4500K. Uwzględnienie najnowszych obserwacji UV dawało w 1968 r. temperaturę 4600K. Modele VAL dawały nieco ponad 4100K. Jedne z ostatnich pomiarów dają wartość bliską 4400K. Głównym problemem jest tu sposób traktowania wielu linii widmowych i kontinuów w całym widmie. Wartość 4400K według Maltby et al jest w zgodzie z większościa obserwacji, oprócz temperatury 3700K wynikającej z linii CO obserwowanych blisko brzegu Słońca.

Obserwacje wykazują, że **siatka supergranul** promieniuje wydajniej, niż oczka sieci. Dla obszarów kilku tys. km siatka wypromieniowywuje dwukrotnie więcej energii, niż oczka. To zwiększone ogrzewanie na sieci jest powiązane z lokalną koncentracją pól magnetycznego.

Obszary aktywne chromosfery mają przesunięte w głąb minimum temperaturowe i nieco płytsze. Mechaniczne grzanie jest w nich silniejsze, niż w obszarach spokojnych. Silne pola magnetyczne mają strukturę zamkniętą w kształcie łuków łączących przeciwne magnetyczne polaryzacje.

Obszary spokojne to te, które nie wykazują aktywności, struktur włókien, dziur. Mają one konfiguracje pól magnetycznych zamknięte w dużych skalach, co potwierdzają obliczenia teoretyczne oraz obserwacje w promieniach X. Tym niemniej istnieje możliwość, że struktury te są częściowo otwarte i wypływa z nich wiatr słoneczny.

Warstwa przejściowa i dolna korona przejawiają dwa rodzaje struktur: (1) małoskalowe (kilkadziesiąt tys.km), magnetycznie zamknięte obszary, powiązane z jasnymi punktami w koronie, oraz (2) obszary, z których strumień magnetyczny rozbiega się poza sieć chromosferyczną. W obszarach spokojnych linie pola ostatecznie powracają na powierzchnię, podczas gdy w dziurach koronalnych pozostają otwarte. Obszar przejściowy jest aktywny dynamicznie ze strumieniami w górę i w dół obecnymi wszędzie na powierzchni. Nie jest jasne, czy obserwowane ruchy w dół pochodzą z opadających warstw korony, czy ze spikul.

Spikule są głównym składnikiem subtelnej struktury chromosfery, szerokość ok 10^3km, długość ok 10^4km, są wyrzutami materii o temperaturach chromosferycznych (10^4 K), rozciągają się od sieci chromosferycznej aż do gorącej korony. Dla zachowania wyznaczonego tempa utraty masy, większość materii spikul musi wracać do chromosfery. Spikule wydają się być dłuższe, gdy są obserwowane w dziurach koronalnych, niż w obszarach spokojnych, bardzo długie (40 tys.km) były obserwowane w biegunowych dziurach koronalnych. Były proponowane różne mechanizmy, do dziś nie uzgodniono najlepszego modelu.

Dziury koronalne wydają się być powiązane ze słabymi polami magnetycznymi z otwartymi rozbieżnymi konfiguracjami. Może zatem wypływać z nich wiatr słoneczny, ale jak na razie nie ma dowodów, by było to główne jego źródło.

Prominencje to wielkie struktury o kształtach włókien, wydające się być podtrzymywane w koronie przez pola magnetyczne. Najprawdopodobniej są to włókna chłodnej (7000 K) plazmy otoczonej przez gorącą materię koronalną. Niektóre są stabilne przez wiele dni, inne spadają w postaci deszczu.

Rozbłyski wyzwalają duże ilości energii, której źródłem jest najprawdopodobniej pole magnetyczne. Ich przejawy są rozmaite we wszystkich długościach fal. Często są z nimi związane wyrzuty masy, lecz ze zbyt małą energią, by opuścić Słońce.

Przejścia koronalne to zjawiska wyrzutu materii. Pojawiają się w dolnej koronie i rozchodzą się w górę. Ich wkład do całkowitego tempa utraty masy jest ok. 5%.

4.6.3 Modele wiatru koronalnego

Samą obecność wiatru słonecznego trudno było by wykryć, gdybyśmy obserwowali Słońce z daleka, jak inne gwiazdy. Obserwacje (np. podczas zaćmień) wykazują obecność wokół Słońca tzw. korony, czyli rozrzedzonej i gorącej warstwy o gęstości elektronowej $n_e \approx 4\,10^8 \mathrm{cm}^{-3}$ i temperaturze $T \approx 1.5\,10^6$K. Jeszcze przed epoką badań satelitarnych wiadomo było, że taka otoczka nie może być statyczna. Pod koniec lat 50-tych Parker wykazał, że jakikolwiek rozsądny model korony, uwzględniający warunki panujące w pobliżu Słońca, prowadzi do niefizycznie wielkich wartości ciśnienia wywieranego przez koronę w środowisko międzygwiazdowe. Jedynym wyjściem z tej sytuacji jest odrzucenie założenia o statyczności korony i przyjęcie, że jest to wiatr podlegający stałej ekspansji.

Klasyczny już opis wiatru koronalnego dotyczy sferycznie symetrycznego, stacjonarnego wypływu, izotermicznego, zjonizowanego gazu wodorowego. W takich warunkach korona opisywana jest równaniami:

1. ciągłości:
$$r^2 \rho v = const$$
2. pędu:
$$\rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM\rho}{r^2}$$
3. gazu doskonałego:
$$p = 2\rho kT/m$$

Można je sprowadzić do jednego równania względem v:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial r}\left(v^2 - \frac{2kT_0}{m}\right) = -\frac{GM_\odot}{r^2}\left(1 - \frac{4kT_0 r}{GM_\odot}\right)$$

Szczegółowa dyskusja możliwych rozwiązań $v(r)$ przeprowadzona jest w podręczniku Mihalasa. Omówimy tylko najważniejsze wnioski. Zauważmy, że dla $r = r_c$ (promień krytyczny) zdefiniowanego jako:

$$r_c = \frac{GM_\odot m}{4kT_0}$$

prawa strona równania znika. Dla $r < r_c$ jest ona ujemna, dla $r > r_c$ jest dodatnia. Obliczone dla korony Słonecznej $r_c \approx 3.5 r_0$. Skoro prawa strona równania znika dla promienia krytycznego, to lewa też musi być zerem. Może to zostać zrealizowane na dwa sposoby:

1. $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$

2. $v(r_c) = v_c = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}}$

W pierwszym przypadku mamy rozwiązania posiadające w r_c maksimum albo minimum, nie nadające się do opisu obserwowanego wiatru słonecznego. W drugim przypadku otrzymujemy tzw. rozwiązania krytyczne. Dla promienia krytycznego r_c otrzymujemy prędkość krytyczną v_c, w tym przypadku równą izotermicznej prędkości dźwięku. Odpowiadające rzeczywistości jest rozwiązanie monotonicznie rosnące i „transsoniczne". Prędkość ekspansji wiatru wzrasta ze wzrostem promienia, a gęstość i ciśnienie maleją do zera.

To, że prędkość wzrasta bez ograniczeń jest artefaktem wynikającym z założenia izotermiczności korony. W dużych odległościach ekspansja gazu musi prowadzić do ochłodzenia, więc wymuszenie stałej temperatury wprowadza sztuczne źródło energii dla podtrzymania wielkości $T = T_0$. Ta energia może wykonywać pracę przy rozpędzaniu gazu do nieskończonej prędkości.

W swoim czasie szczegółowo dyskutowana była rola punktu krytycznego rozwiązania transsonicznego. Z matematycznego punktu widzenia jest to punkt, poza który zaburzenia ciśnieniowe nie mogą propagować się pod prąd, więc nie mogą dotrzeć do podstawy atmosfery i modyfikować tempo utraty masy. Dodatkowe grzanie Q i dodatkowe źródło pędu D mogą wpływać na utratę masy tylko o ile występują w rejonie przepływu poddźwiękowego. Jeśli występują w przepływie naddźwiękowym, mogą co najwyżej zwiększać prędkość wiatru.

W atmosferze izotermicznej punkt krytyczny i dźwiękowy pokrywają się. Z kolei dla fal rozchodzących się adiabatycznie punkt dźwiękowy może wypadać dalej, niż punkt krytyczny, a przedstawiona przed chwilą dyskusja staje się wątpliwa. Rolę pewnego rodzaju bariery w wietrze raczej należało by przypisać punktowi dźwiękowemu. Ponadto w wietrze mogą rozchodzić się tzw. fale Alfvena, które mogą propagować się pod prąd. Przewodnictwo cieplne może przenosić energię pod prąd także w przepływie naddźwiękowym. Rzeczywisty wiatr słoneczny jest więc dużo bardziej skomplikowany, niż omówiony tu klasyczny model.

4.6.4 Zewnętrzna korona słoneczna

Fotografie zaćmieniowe pokazują strukturę korony. Konfiguracje pól magnetycznych zmieniają się z zamkniętych na otwarte – kształt hełmu z „pickelhaubą". Jest to obszar rozpędzania wiatru. Dziury koronalne są źródłem bardzo szybkich strumieni wiatru o prędkościach 700–800 km/s. Generalnie szybki wiatr pochodzi z obszarów biegunowych. Z kolei wiatr z obszarów zamkniętych pól magnetycznych, z okolic równikowych, jest wolniejszy, ok. 400 km/s. Dokładne obserwacje sondy kosmicznej Ulysses wykazały, że nie ma istotnej różnicy w tempach utraty masy między różnymi rodzajami wiatru słonecznego, wszędzie jest ok. $2\,10^{-14} M_\odot/rok$.

Ponieważ prędkość graniczna wiatru jest porównywalna z prędkością ucieczki z pola grawitacyjnego, więc ilości energii, których należy dostarczyć do wiatru poniżej i powyżej punktu krytycznego są porównywalne. Wiatr jest silnie grawitacyjnie związany u podstawy korony, więc sam jego strumień nie niesie dostatecznej ilości energii. Przewodnictwo cieplne jest głównym podejrzanym, lecz trudno sobie wyobrazić przepływ ciepła od chłodniejszej chromosfery do gorętszej korony. Wydaje się, że musi być jakiś rodzaj mechanicznego transportu energii do obszaru naddźwiękowego. Głównym kandydatem są tu fale Alfvena, ale nie jest to kandydat jedyny ani też absolutnie niezbędny. Zatem wiatr słoneczny jest napędzany termicznie, ale z modyfikacją falową, gradient ciśnienia termicznego wypycha wiatr z pola grawitacyjnego Słońca, a fale pomagają rozpędzić go do asymptotycznej prędkości.

Obserwacje wykazują różne temperatury elektronów i protonów. Jest to zgodne z teoretycznymi podejrzeniami, że jony mogą otrzymywać więcej energii, niż elektrony, w przypadku rozchodzenia się pewnego typu fal magnetohydrodynamicznych.

Nie mozna poprawić naszego rozumienia wiatru słonecznego bez potraktowania zarówno korony jak i wiatru łącznie jako jednego zjawiska. To z kolei wymaga zrozumienia procesów przepływu energii w rozciągłej atmosferze słonecznej oraz sposobów tracenia tejże energii. Są to najważniejsze procesy sterujące strukturą korony, strumieniem wiatru słonecznego i jego asymptotyczną prędkością. Autorzy licznych prac zgodnie przyznają, że są to procesy ciągle bardzo słabo znane.

4.6.5 Pole magnetyczne

W pobliżu powierzchni Słońca pole magnetyczne ma postać zamkniętych pętli, a jego natężenie jest na tyle silne, że powstrzymuje plazmę przed ekspansją na zewnątrz. Ze wzrostem wysokości pole słabnie, by daleko ponad fotosferą mieć kształt w przybliżeniu dipolowy. Dipol mniej więcej pokrywa się z osią rotacji w pobliżu minimum aktywności, ale sonda Ulysses pokazała, że w okresie poprzedzającym minimum jest znacznie do niej nachylony. W okresie maximum aktywności kształt pola różni się od prostego dipola.

Istnieją rozliczne publikacje rozpatrujące pole magnetyczne Słońca jako rezultat stochastycznych magnetycznych dynamo napędzanych przez turbulencje. W ostatnim czasie zyskują jednak popularność teorie postulujące możliwość istnienia pól magnetycznych wmrożonych w jądro od czasu powstania gwiazdy. Obliczenia pokazują, że ucieczka takiego pola przez dyfuzję odbywa się w skalach czasowych znacznie przewyższających wiek Słońca. Zatem w jądrze słonecznym zakotwiczony byłby znaczący strumień magnetyczny, podczas gdy warstwa konwektywna była by magnetycznie przepuszczalna, w skali ok. 10 lat. Jakie są argumenty przemawiające za teorią wmrożonego pola a przeciw stochastycznemu dynamo:

1. powierzchnia Słońca pokryta jest nierówno strukturami magnetycznymi, plamy skupiają się w niższych szerokościach, a na południowej półkuli jest ich mniej – trudno to wyjaśnić stochastycznym dynamo

2. plamy zmieniają się w cyklu 11 letnim, lecz bardziej dokładny jest cykl 22 letni, tzw. Hale'a. Conajmniej 16 cykli Hale'a zostało prześledzonych, choć publikowane są identyfikacje sięgające w czasie milionów cykli. Taka cykliczność nie pasuje do stochastycznego dynama

3. rejony równikowe rotują szybciej (okres 25 dni), niż bieguny (okres 35 dni), a prawdopodobnie także szybciej, niż wnętrze. Jest to odwrotne niż można się spodziewać, wskazuje na obecność magnetycznego momentu obrotowego wiążącego magnetyczne jądro z otaczającą plazmą.

4. wykryte oscylacje (*torsional oscillations*), polegające na tym, że półkule północna i południowa nie rotują identycznie, dla wyjaśnienia wymagają istnienia magnetycznego momentu obrotowego działającego pomiędzy jądrem Słońca a warstwą konwektywną

Najprawdopodobniej w jądrze Słońca zamrożone są dwa przeciwnie skierowane dipole. Ich pole jest modulowane przez namagnesowaną warstwę konwektywną. Szczegóły – ciągle czekają wyjaśnienia.

Nie da się ukryć, że Słońce, choć jest gwiazdą obserwowaną najdokładniej, poznane jest ciągle w mało zadowalającym stopniu.

Literatura

[1] C.J.Cannon „The transfer of spectral line radiation", Cambridge University Press, Cambridge, 1985

[2] D.F.Gray „The observation and analysis of stellar photospheres", John Wiley & Sons, 1976

[3] H.Hacken „Światło. Fale, fotony, atomy", PWN Warszawa 1993

[4] H.Hacken i H.C.Wolf „Atomy i kwanty. Wprowadzenie do współczesnej spektroskopii atomowej", PWN Warszawa 1997

[5] W.Heitler „The quantum theory of radiation", Clarendon, Oxford, 1954

[6] R.Kippenhahn „Na tropie tajemnic Słońca", Prószyński i S-ka, Warszawa 1997

[7] M.Kubiak „Gwiazdy i materia międzygwiazdowa", PWN, Warszawa 1994

[8] A.G.Masiewicz i A.W.Tutukow "Ewolucija zwiezd: teorija i nabljudenija", Moskwa, wydawnictwo „Nauka" 1988

[9] D.Mihalas „Stellar Atmospheres", W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1978

[10] G.B.Rybicki and A.P.Lightman „Radiative processes in astrophysics", John Wiley & Sons, 1979

[11] K.Stępień „Fizyka atmosfer gwiazd - transport promieniowania", Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1983