Fizyka wnętrz gwiazdowych

Spis treści

Rozdział 1

Pierdoły

Rozdział 2

Równowaga mechaniczna

2.1 Równowaga hydrostatyczna

2.1.1 Równanie ciągłości

Gwiazdy są chmurami gazu pozostającymi w równowadze mechanicznej dzięki zrównoważeniu ciśnienia gazu i własnej grawitacji. Równowaga taka nazywana jest równowagą hydrostatyczną. Prawa Pascala i Newtona gwarantują odpowiednio izotropowość ciśnienia i sił grawitacyjnych. Stąd przy braku innych sił gwiazdy uzyskują sferyczny kształt.

Jednym ze sposobów opisania rozkładu masy wewnątrz sferycznej gwiazdy jest przedstawienie gęstości ρ jako funkcji odległości r od środka gwiazdy $\rho = \rho(r)$. Inny sposób polega na podawaniu masy gwiazdy zawartej wewnątrz promienia r $m = m(r)$. Zwiększenie promienia o dr odpowiada przyrostowi masy o dm zawartej w sferycznej warstwie o promieniu r i grubości dr. Objętość tej warstwy wynosi $4\pi r^2 dr$ więc

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \tag{2.1}$$

Jest to równanie ciągłości odzwierciedlające zasadę zachowania masy. Przy takich oznaczeniach dla całkowitej masy gwiazdy M i jej całkowitego promienia R dostajemy $M = m(R)$

2.1.2 Pole grawitacyjne

Pole grawitacyjne sferycznej gwiazdy ma prostą strukturę. Według udowodnionego przez Newtona twierdzenia, dla odległości r od centrum gwiazdy, siły grawitacyjne pochodzące od masy spoza sfery o promieniu r znoszą się, i pozostaje przyciąganie grawitacyjne takie jakby cała masa m była skupiona w jednym punkcie w centrum gwiazdy.Przyspieszenie grawitacyjne powodowane przez tę masę wynosi

$$g = Gm/r^2 \tag{2.2}$$

Równanie to opisuje pole grawitacyjne sferycznych gwiazd.

Tabela 2.1: Warunki graniczne

Położenie	Promień	Masa	Ciśnienie
Centrum	$r = 0$	$m = 0$	$P \equiv P_c$
Powierzchnia	$r \equiv R$	$m \equiv M$	$P \approx 0$

Definiując potencjał Φ tak, że $d\Phi/dr \equiv g$ dostajemy $(d/dr)(r^2 d\Phi/dr) = (d/dr)gr^2 = Gdm$. Zastępując dm wyrażeniem z równania ciągłości dostajemy równanie Poisona dla Φ:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G r^2 \rho \tag{2.3}$$

2.1.3 Równanie równowagi hydrostatycznej

Wewnątrz cienkiej sferycznej warstwy w równowadze mechanicznej ciśnienie rośnie wraz ze wzrostem ciężaru kolumny gazu długości dr i jednostkową powierzchnią przekroju czynnego $dP = -\rho g dr$. Ponieważ $g = Gm/r^2$ to

$$dP = -\frac{Gm}{r^2}\rho dr \tag{2.4}$$

Jest to tzw. równanie równowagi hydrostatycznej.

2.1.4 Warunki brzegowe

Aby uzyskać rozwiązania szczegółowe różnych równań niezbędna jest znajomość warunków początkowych. Warunki początkowe dla równań budowy gwiazdy są zdefiniowane w dwóch różnych miejscach: w centrum i na powierzchni gwiazdy (Tabela 2.1). Sformułowane są trzy różne warunki początkowe. Są to proste definicje nowych parametrów: centralnego ciśnienia (P_c), promienia (R) i masy gwiazdy (M). Dwa różniczkowe równania budowy gwiazdy, mianowicie równanie ciągłości i równanie równowagi hydrostatycznej zawierają 3 nieznane funkcje r: m, P i ρ. Potrzebne jest zatem jeszcze jedno równanie.

2.1.5 Równania barotropowe

Układ równań różniczkowych (2.1) i (2.4)jest uzupełniony przez równanie stanu. Równanie stanu jest równaniem algebraicznym wiążącym różne parametry stanu tj. parametry opisujące lokalny stan gazu takie jak P, ρ, $*$, $\cdots$. W bardziej ogólnej formie mamy

$$0 = f(P, \rho, *, \cdots). \tag{2.5}$$

Równanie stanu zamyka układ równań budowy gwiazdy jeśli wszystkie parametry $(*)$ oprócz P i ρ są znane. Takie równania noszą nazwę równań barotropowych. Najbardziej znanym równaniem stanu ważnym dla gazu jest równanie zależne od T. Równania stanu spotykane w astrofizyce zwykle przybierają prostszą postać od równania (2.5): $P = f(\rho, *, \cdots)$

2.2 Proste równania stanu

2.2.1 Gaz doskonały

Równanie gazu doskonałego składającego się z cząsteczek o masie μ i temperaturze T ma postać

$$\frac{P_g}{\rho} = \frac{kT}{\mu} = (\gamma - 1)C_v T \text{ gdzie} \tag{2.6}$$

$$U_g = C_v T \text{ jest energią wewnętrzną} \tag{2.7}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} \tag{2.8}$$

$$k = \frac{R}{N} \text{ to stała Boltzmana} \tag{2.9}$$

R jest stałą gazową, N liczbą cząstek na mol (liczba Avogadro), a C_p i C_v są to ciepła właściwe przy stałym ciśnieniu i stałej objętości, odpowiednio.

2.2.2 Promieniowanie

Według prawa Stefana - Boltzmana strumień, tj. energia emitowana przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego (CDC), wynosi $F = \sigma T^4$. Energia emitowana przez jednostkę powierzchni w kąt bryłowy
$d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$ wynosi $Id\Omega$ gdzie I jest natężeniem promieniowania. Z definicji CDC emitowane promieniowanie jest w równowadze termodynamicznej, gdzie temperatura jest wszędzie taka sama i stąd promieniowanie jest izotropowe. Ze względu na I strumień wynosi

$$F = \int I \cos\theta d\Omega = \pi I \tag{2.10}$$

gdzie $\cos\Theta$ stanowi rzutowanie jednostkowej powierzchni na kierunek emisji, a całkowanie odbywa się po półsferze. Pęd fotonów jest energią podzieloną przez prędkość światła c: $p = h\nu/c$. Zatem strumień pędu w danym kierunku jest energią strumienia podzieloną przez c. Składowa normalna momentu pędu jest mniejsza od strumienia pędu o czynnik $\cos\Theta$. Ciśnienie jest to siła na jednostkę powierzchni. Z drugiego prawa Newtona siła jest zmianą momentu pędu na jednostkę czasu. Dla cząsteczek odbijających się od ściany są to dwa strumienie pędu

$$P_r = 2\int \frac{I}{c}\cos^2\Theta d\Omega = \frac{4\pi I}{3c} \tag{2.11}$$

Wstawiając F otrzymujemy

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c}T^4 \tag{2.12}$$

Fotony opuszczające w każdej sekundzie powierzchnię jednostkową w kierunku $d\Omega$ zajmują objętość $1\cdot c$. Odpowiadająca im gęstość energii wynosi $Id\Omega/c = Fd\Omega/\pi c$. Całkowita gęstość energii fotonów poruszających się w pełnym kącie bryłowym 4π wynosi

$$U_r = \frac{4\sigma}{c}T^4 = \frac{P_r}{3} \tag{2.13}$$

2.2.3 Politropowe równanie stanu

Politropowe równanie stanu zdefiniowane jest równaniem

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n} \tag{2.14}$$

gdzie K, γ i n są stałymi. Politropy dla szczególnych wartości γ odpowiadają określonym procesom gazowym (Tabela 2.2). Dla gwiazdy o stałej gęstości, $\gamma = \infty$ uzyskujemy średnią gęstość

Tabela 2.2 Określone politropy

Nazwa	γ	n	Niezmiennik
izobara	0	-1	P
izoterma	1	∞	T
adiabata	C_p/c_v	$1/(\gamma-1)$	ciepło
izochora	∞	0	ρ

$$<\rho> = 3M/4\pi R^3 \tag{2.15}$$

Dla gwiazd o stałym promieniowaniu i stałym stosunku promieniowania uzyskujemy $const = P_r/P_g \sim T^4/\rho T$, a stąd $T \sim \rho^{1/3}$ i ostatecznie

$$P_r \sim P_g \sim \rho^{4/3}, \quad \text{tj.} \quad \gamma = 4/3. \tag{2.16}$$

2.3 Szacowanie własności gwiazd

2.3.1 Warunki centralne

Przybliżone określanie parametrów gwiazdy bierze się z zastępowania nieskończenie małych różniczek przez skończone zmiany wartości powierzchniowych i centralnych. W ten sposób z równania równowagi hydrostatycznej otrzymujemy

$$(0 - P_c) \sim -\frac{GM/2}{(R/2)^2}\frac{3M}{4\pi R^3} \tag{2.17}$$

$$P_c \sim \frac{GM^2}{R^4} \sim GM^{2/3}\rho^{4/3} \sim 10^{14} dyn/cm^2 \tag{2.18}$$

2.3.2 Energia i twierdzenie wirialne

Energia grawitacyjna E_G gwiazdy odpowiada mniej więcej energii dwóch mas $m = M/2$ działających z odległości $r = R/2$

$$E_G \sim -\frac{GM^2}{R} \tag{2.19}$$

Ponownie zaniedbujemy wszystkie czynniki rzędu jedności. Średnia energia cieplna na cząstkę jest rzędu kT. Wynika to z termodynamicznej definicji T jako miary energii kinetycznej cząstki. Energia cieplna E_T gwiazdy składającej się z M/μ cząstek wynosi

$$E_T \sim \frac{M}{\mu}kT \sim \frac{GM^2}{R} \sim E_G \tag{2.20}$$

Końcową formę ?RHS? uzyskano przez zastąpienie równania (2.19). Należy zauważyć, że wyprowadzenie to nie oznacza iż $E_T = E_G$. Generalnie rzecz biorąc związek różnych form energii w równowadze nosi nazwę twierdzenia wirialnego. Nasza relacja $E_T \sim E_G$ stanowi pewien przypadek twierdzenia wirialnego. Dla całkowitej energii $E = E_T + E_G$ także zachodzi podobna relacja

$$-E \sim \frac{GM^2}{R} \sim \frac{M}{\mu} kT \tag{2.21}$$

Dla gwiazd o skończonych rozmiarach całkowita energia $-E > 0$. Natomiast rozszerzenie gwiazdy na chmurę nieskończonych rozmiarów ($R \to \infty$) może zachodzić spontanicznie w procesach obniżających energię.

2.3.3 Skale czasu

Ważnym jest oszacowanie skali czasu przywracania równowagi gwiazdy. Dynamiczny brak równowagi pojawia się gdy ciśnienie gazu P_g nie zrównoważy sił grawitacji. Rozważmy skrajny przypadek, gdy $P_g = 0$. Odpowiedzią gazu na taki brak równowagi jest w gruncie rzeczy spadek swobodny. Do przybliżonego oszacowania dynamicznej skali czasu τ_d weźmy czas swobodnego spadku na dystansie równym promieniu gwiazdy R. Przybliżając przyspieszenie grawitacyjne stałą wartością $g \sim GM/R^2$ uzyskujemy $R \sim g\tau_d^2/2$. Rozwiązując otrzymujemy następującą dynamiczną skalę czasu

$$\tau_d \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \frac{1}{\sqrt{G < \rho >}} \sim 1 \text{ godziny} \tag{2.22}$$

Końcowa wartość odpowiada wartości dla Słońca. Przywrócenie równowagi hydrostatycznej w gwieździe odbywa się w dynamicznej skali czasu, bardzo krótkiej jak na kosmiczne warunki.

Cieplna skala czasu (skala Kelvina - Helmholtza) określa czas ochładzania się gwiazdy pozbawionej źródła energii. Do szacunkowego wyznaczenia tej skali zakładamy, że podczas ochładzania moc promieniowania L jest taka, że $L\tau_T \sim E_T$. Podstawiając to do równania (2.21) uzyskujemy

$$\tau_T \sim \frac{GM^2}{RL} \sim 10^7 \quad \text{lat} \tag{2.23}$$

Przywrócenie równowagi cieplnej (energetycznej) przez ochładzanie lub grzanie gwiazdy odbywa się w cieplnej skali czasu.

Cieplna skala czasu jest krótka w porównaniu z geologicznym wiekiem Układu Słonecznego szacowanym na około $4 \cdot 10^7$lat. Do utrzymania w tak długim okresie niemal stałej mocy promieniowania Słońce potrzebuje źródła energii. Źródłem energii Słońca są reakcje termojądrowe. W reakcjach tych 4 jądra wodoru zostają połączone w atom helu. Jednakże masa 4 protonów jest większa od masy jądra helu o czynnik

$$\frac{4\mu_H - \mu_{He^4}}{\mu_{He^4}} \approx 0.007 \tag{2.24}$$

Tracona podczas tych reakcji masa jest zamieniana na energię zgodnie ze wzorem $E = Mc^2$. Czas całkowitego wypalenia wodoru nazywamy jądrową skalą czasu τ_N. Aby uprościć oszacowanie tej skali, załóżmy że gwiazda składa się wyłącznie z wodoru i wypala go całkowicie.

$$\tau_N \sim \frac{0.007Mc^2}{L} \sim 10^1 0\mathrm{lat} \tag{2.25}$$

Jądrowa skala czasu znacznie przekracza wiek Układ Słonecznego i jest bliska wiekowi całego Wszechświata.

Należy zauważyć, że dynamiczna skala czasu jest o kilka rzędów wielkości krótsza od skali cieplnej, tak że podczas przywracania równowagi dynamicznej pojawiający się przepływ ciepła jest zaniedbywalny. Innymi słowy odpowiadający temu proces jest adiabatyczny. Natomiast przywracanie równowagi cieplnej odbywa się na tyle wolno, że gwiazda zawsze pozostaje w równowadze hydrostatycznej.

2.4 Stabilność równowagi hydrostatycznej

2.4.1 Kryterium stabilności dynamicznej

Do sprawdzenia równowagi mechanicznej gwiazdy badamy ewolucję małych perturbacji rozmiarów gwiazdy R. Rozpatrzmy odpowiedź siły hydrostatycznej (grawitacyjnej) i ciśnienia gazu na odpowiednie perturbacje gęstości $\rho \sim R^{-3}$. Przywracanie równowagi hydrostatycznej odbywa się w dynamicznej skali czasu. Dynamiczna skala czasu w porównaniu do skali cieplnej jest na tyle krótka, że zaniedbujemy przepływ ciepła przed ustaleniem się równowagi hydrostatycznej. Tak więc dla tych szybkich procesów przyjmiemy adiabatyczne równanie stanu $P_g \sim \rho^\gamma$ (rów. 2.14). Formalnie ciśnienie hydrostatyczne również może być wyrażone politropową funkcją gęstości (rów. 2.18). Stąd ich stosunek jest dodatkowo pomnożony przez potęgę gęstości

$$\frac{P_c}{P_g} \sim \frac{G}{K} M^{2/3} \rho^{4/3-\gamma} \tag{2.26}$$

Ciśnienie hydrostatyczne działa do wewnątrz gwiazdy odzwierciedlając grawitacyjne zapadanie gwiazdy. Ciśnienie gazu działa na zewnątrz. Dla gwiazdy pierwotnie zostającej w równowadze ciśnienia te równoważą się $P_c/P_g = 1$. Rozważmy zaburzenie zmniejszające rozmiar, a zwiększające średnią gęstość gwiazdy ρ. Dla zachowania równowagi zaburzenie to powinno wytworzyć większe ciśnienie gazu $P_c/P_g < 1$, tak by gwiazda powróciła do początkowych rozmiarów. Zbadanie wykładnika ρ w równaniu (2.26) pokazuje, że zachodzi to tylko wtedy, gdy

$$\gamma > \frac{4}{3} \tag{2.27}$$

Równanie (2.27) jest kryterium równowagi dynamicznej gwiazdy.

2.4.2 Pulsacje promieniste

Rozważmy uproszczony model pulsacji gwiazdy: oscylacja otoczki masy $M^*/2$ spowodowana nierównowagą ciśnienia hydrostatycznego i ciśnienie gazu rzędu połowy wartości ciśnienia centralnego $P_h^*/2P_g^*/2$ powoduje zmianę rozmiaru gwiazdy o δR od promienia gwiazdy w równowadze. Biorąc jedynie wartości oznaczone gwiazdką zaniedbując czynniki rzędu 1 uzyskujemy następujące równanie ruchu

$$-\frac{d^2\delta R}{dt^2} \sim \frac{R^2 P\partial(\ln P_h - \ln P_g)}{\partial\rho}\delta\rho \sim \frac{GM}{R^3}(3\gamma - 4)\delta R \tag{2.28}$$

gdzie $\delta P = P\delta\ln P$ i $\delta\rho \sim \rho\delta\ln(M/R^3) \sim -3(M/R^3)\delta R/R$. Otrzymane równanie jest równaniem oscylacji harmonicznych. Podstawiając rozwiązanie w postaci $\delta r \sim e^{i\omega t}$ otrzymujemy kryterium stabilności

$$\omega^2 = \frac{GM^2}{R^3}(3\gamma - 4) > 0 \tag{2.29}$$

tj. równanie (2.27). Dla $\omega^2 < 0$ rozwiązanie staje się wykładniczo niestabilne $\delta R \sim e^{\pm|\omega|t}$.

Rozdział 3

Gwiazdy politropowe

3.1 Teoria wirialna a stabilność

3.1.1 Wyznaczanie energii

Wprowadźmy całkę pomocniczą

$$I = \int PdV = \int_0^R P4\pi r^2 dr > 0 \tag{3.1}$$

Dla funkcji podcałkowej wszędzie dodatniej wartość całki jest dodatnia. Teraz przystąpimy do ustalenia energii potencjału grawitacyjnego. Aby to zrobić dodamy wkłady pochodzące od kolejnych powłok o masach dm. Do uzyskania wyrażenia na energię grawitacyjną zastąpimy równanie ciągłości (rów. 2.1) dla dm, równaniem równowagi hydrostatycznej dla dP/dr (rów. 2.4) na koniec całkując przez części

$$\begin{aligned} E_G &= -\int_0^M \frac{Gmdm}{r} = -\int_0^M \frac{Gm}{r} 4\pi\rho r^2 dr = -\int_0^M \frac{Gm\rho}{r^2} 4\pi r^3 dr = \\ &= \int_0^M \frac{dP}{dr} 4\pi\rho r^3 dr = P4\pi r^3 \Big|_0^R - 3\int_0^R P4\pi r^2 dr = -3I \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pierwszy wyraz znika z racji warunków granicznych.

Energia cieplna może być wyliczona przez zsumowanie energii gazu U w całej gwieździe

$$E_T = \int Udm \tag{3.3}$$

Wyliczenie całki wymaga zastosowania pewnego triku. Należy zauważyć, że U zależy jedynie od stanu gazu, a nie od sposobu, w jaki ten stan został osiągnięty. Zatem możemy założyć, że gwiazda została utworzona przez adiabatyczne kontrakcje (skurczenie), w których entropia wszędzie pozostawała stała $dS = 0$. Należy pamiętać o odmiennym zapisywaniu różniczek spowodowanych kontrakcjami a spowodowanymi całkowaniem po objętości. Te pierwsze są oznaczane symbolem δ, te drugie symbolem d. Zastosujemy pierwszą zasadę termodynamiki w formie $\delta U = T\delta S - P\delta(1\rho)$. Pierwszy wyraz na R.H.S. dla adiabatycznych kontrakcji zanika, więc

$$\delta E_T = \int \delta U dm = -\int P\delta(1/\rho)dm = \int K\rho^{\gamma-2}\delta\rho dm \tag{3.4}$$

Teraz całkujemy po symbolu δ. Fizycznie oznacza to dodawanie infinitezymalnych zmian spowodowanych kontrakcją pierwotnej chmury gazu. Zaczynamy kontrakcję od chmury nieskończonych rozmiarów o temperaturze bliskiej zeru ($E_T = 0$) i kontynuujemy aż osiągniemy aktualny stan gwiazdy. Z powodu zachowania masy, całkowanie to nie zawiera całkowania po masie gwiazdy. Tym sposobem uzyskujemy

$$E_T = \frac{K}{\gamma - 1}\int \rho^{\gamma-1}dm = \frac{1}{\gamma-1}\int \frac{P}{\rho}dm = \frac{I}{\gamma-1} \tag{3.5}$$

3.1.2 Teoria wirialna

Przez eliminację I z równań (3.2) i (3.5) uzyskamy teorię wirialną dla gwiazd politropowych

$$3(\gamma - 1)E_T = -E_G \tag{3.6}$$

Całkowita energia gwiazdy politropowej wynosi

$$E = E_T + E_G = -\frac{3\gamma - 4}{\gamma - 1}I \tag{3.7}$$

Dla dynamicznej stabilności układu niedopuszczającego do nieskończonej ekspansji całkowita energia musi być ujemna. Zatem dla dodatniego I musi być, że $\gamma < 1$ lub $3\gamma > 4$. Pierwszy warunek nie odpowiada fizycznemu układowi, ponieważ oznacza on ochładzanie przez adiabatyczne kontrakcje. Tym sposobem uzyskaliśmy formalne analityczne wyliczenie kryterium stabilności dla równowagi dynamicznej politropowych gwiazd

$$\gamma > \frac{4}{3} \tag{3.8}$$

Należy podkreślić osobliwą cechę gwiazd: ich całkowite „określone ciepło” jest ujemne. Oznaczamy w ten sposób, że dodawanie do gwiazdy energii obniża jej temperaturę wewnętrzną. Dodawanie do gwiazdy energii zwiększa E. Ponieważ E jest ujemne oraz $I = -(1/3)E_G \sim GM^2/R$ (rów. 2.19), oznacza to, że dla $\gamma > 4/3$ I maleje, więc maleje również E_T. Ponieważ E_T jest zsumowanym U i dla gazu doskonałego $U = c_V T$, gdzie c_V dla określonego gazu jest stałe, zatem obniża się i temperatura T.

3.2 Gwiazdy politropowe

3.2.1 Równanie Lane- Emdena

Równania budowy gwiazdy odnoszące się do gwiazd politropowych to równania (2.1), (2.4) i (2.14):

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \qquad dP = -\frac{Gm}{r^2}\rho dr \qquad P = K\rho^{1+1/n}$$

Zastąpmy w tych równaniach ρ i r bezwymiarowymi zmiennymi θ i ξ takimi że

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c \theta^n \\ r &= r_n \xi \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie ρ_c i r_n są stałymi oznaczającymi gęstość centralną i na razie nie określoną jednostkę długości. Następnie rozwiążemy równanie równowagi hydrostatycznej względem m różniczkując po ξ i podstawiając do niego równanie ciągłości. Uzyskujemy w ten sposób równanie Lane - Emdena (jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu)

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \qquad \text{dla } r_n \text{ spełniającego} \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{P_c(n+1)}{4\pi G\rho_c^2}\right)^{1/2} = r_n \tag{3.11}$$

Tym sposobem r_n nie jest już wielkością nieokreśloną. W centrum występują dwa warunki graniczne

$$\theta(0) = 1 \qquad \frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0 \tag{3.12}$$

Drugi warunek jest zgodny z zanikającym R.H.S. równania hydrostatycznego, $Gm\rho/r \to G\rho^2 4\pi r^3/3r \to 0$ dla $r \to 0$. W ten sposób dla danego

n uzyskaliśmy jednoznaczne rozwiązanie równania Lane - Emdena. Ważne fizycznie rozwiązania spełniają warunek powierzchniowy

$$\theta(\xi_1) = 0 \tag{3.13}$$

Rozwiązania takie występują dla $0 < n < 5$. Ujemne n nie ma sensu fizycznego, ponieważ oznacza spadek ciśnienia wraz ze wzrostem gęstości. Rozwiązania dla $n > 5$ i rosnącego ξ najpierw dążą do dodatniego minimum a potem do nieskończoności.

3.2.2 Rozwiązania

Kilka szczególnych wartości n przyjmuje rozwiązania analityczne zestawione w poniższej tabeli.

Tabela 3.1. Analityczne rozwiązania dla gwiazd politropowych

n	$\theta^{(n)}(\xi)$
0	$1-\frac{\xi^2}{6}$
1	$\frac{\sin\xi}{\xi}$
5	$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\xi^2}{3}}}$

Rozwiązania równania Lane - Emdena definiują rodzinę określonych funkcji nazywanych funkcjami Lane - Emdena. Ze względu na symetrię wszystkie nieparzyste pochodne θ znikają dla $\xi = 0$. Bezpośrednie podstawienie do równania Lane - Emdena pokazuje, że $\theta^{(n)} = 1 - \xi^2/6$ jest ważnym rozwiązaniem dla dowolnego n i małego ξ do rzędu ξ^3.

3.2.3 Parametry gwiazdy

Wyprowadzimy teraz parametry gwiazdy odpowiadające rozwiązaniom Lane - Emdena. Używając równań (2.1) i (3.10) uzyskujemy

$$\begin{aligned} M &= \int \frac{dm}{dr}dr = 4\pi r_n^3\rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2\theta^n d\xi = 4\pi r_n^3\rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)d\xi = \\ &= -4\pi\left(\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right)^{3/2}\rho_c^{\frac{3-n}{2n}}\left(-\xi\frac{d\theta}{d\xi}\right)\Bigg|_{\xi_1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podobnie

$$R = r_n\xi_1 = \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right)^{1/2}\rho_c^{\frac{1-n}{2n}}\xi_1 \tag{3.15}$$

Eliminując z obu równań ρ_c uzyskujemy

$$M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{n-3}{n}} = \frac{K(n+1)}{G(4\pi)^{1/n}} \left[\left(-\xi^{\frac{n+1}{n-1}} \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} \right]^{\frac{n-1}{n}} = const \tag{3.16}$$

W ten sposób uzyskaliśmy relację masa – promień dla gwiazd politropowych. Relacja może być weryfikowana przez obserwacje zdegenerowanych gwiazd i posiada wiele zastosowań.

Inną przydatną kombinacją parametrów jest

$$\frac{\rho_c}{<\rho>} = \frac{4\pi\rho_c R^3}{3M} = -\frac{\xi_1}{3\frac{d\theta}{d\xi}\big|_{\xi_1}} \tag{3.17}$$

$$\frac{P_c}{\rho_c}(n+1)\left(-\xi\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} = \frac{GM}{R} \tag{3.18}$$

Poniższa tabela zawiera parametry powierzchniowe dla gwiazd politropowych

Tabela 3.2. Parametry powierzchniowe dla gwiazd politropowych

n	$\xi_1^{(n)}$	$-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\big|_1$	$\frac{\rho_c}{<\rho>}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
1.0	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2.0	4.35287	2.41105	11.40254
3.0	6.89685	2.01824	54.1825
4.0	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.8365	1.73780	6189.47
5.0	∞	1.73205	∞

3.2.4 Wyznaczanie całki energii

Wyznaczanie całki energii (rów. 3.1) jest trochę zawiłe. Najpierw wprowadzimy zmienne bezwymiarowe

$$I = \int P dV = 4\pi P_c r_n^3 \int_0^{\xi_1} \theta^{n+1}\xi^2 d\xi \tag{3.19}$$

Ustalimy teraz równanie algebraiczne dla nieznanej całki. ?L.H.S? Do bezwymiarowej całki podstawimy równanie Lane - Emdena i scałkujemy to przez części. Dla uproszczenia zapisu pomijamy granicę całkowania

$$\int \theta^{n+1}\xi^2 d\xi = -\int \theta \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) d\xi = 0 + \underline{\int \xi^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 d\xi} \tag{3.20}$$

Dla R.H.S. zaczynamy od tej samej całki, ale najpierw całkujemy przez części, a dopiero później wstawiamy równanie Lane - Emdena

$$
\begin{aligned}
\int \theta^{n+1}\xi^2 d\xi \quad &= \frac{1}{3}\int \frac{d}{d\xi}\Big(\xi^3\Big)\theta^{n+1}d\xi = 0 - \frac{n+1}{3}\int \xi^3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 d\xi = \\
&= \frac{n+1}{3}\int \xi\frac{d\theta}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)d\xi = \frac{n+1}{6}\int \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 d\xi = \\
&= \frac{n+1}{6}\left\{\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2\frac{1}{\xi}\bigg|_0^{\xi_1} + \int\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2\frac{d\xi}{\xi^2}\right\} = \\
&= \frac{n+1}{6}\left\{\xi^3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 + \underline{\int \xi^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 d\xi}\right\}
\end{aligned}
$$

Przyrównując stronami i rozwiązując względem podkreślonych wyrazów otrzymujemy

$$
\frac{n+1}{5-n} = \xi^3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2\bigg|_{\xi_1} = \int \xi^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 d\xi = \int \theta^{n+1}\xi^2 d\xi \tag{3.21}
$$

gdzie ostatnie równanie jest kopią z L.H.S. Podstawiając te rezultaty do równań (3.19), (3.2), (3.5) oraz (3.8) otrzymujemy końcowe formy na I i na energię politropowej gwiazdy

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P_c}{\rho_c}M\frac{n+1}{5-n}\left(-\xi\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1} = \frac{1}{5-n}\frac{GM^2}{R} && (3.22)\\
E_G &= -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R} && (3.23)\\
E_T &= \frac{n}{5-n}\frac{GM^2}{R} && (3.24)\\
E &= \frac{n-3}{5-n}\frac{GM^2}{R} && (3.25)
\end{aligned}
$$

Rozdział 4

Równowaga energetyczna

Dla niebarotropowych równań stanu, takich jak te zależne od temperatury, równowagi mechaniczna i energetyczna łączą się. Do znalezienia budowy gwiazdy musimy rozważyć transport i produkcję energii. Końcowy układ różniczkowych równań budowy gwiazdy składa się z dwóch równań wywodzących się od równowagi mechanicznej, oraz z dwóch równań wywodzących się z równowagi energetycznej.

4.1 Równanie produkcji energii

Zachowanie energii może być rozpatrywane w podobny sposób, jak zachowanie masy w równaniu ciągłości (rów. 2.1). Tempo produkcji energii (moc) na jednostkę masy gazu jest nową funkcją stanu $\epsilon = \epsilon(\rho, T, \cdots)$. Zdefiniujmy nową zmienną l jako całkowitą moc źródła energii zawartego wewnątrz promienia o promieniu r. Produkcja energii w cienkiej powłoce sferycznej wynosi

$$dl = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \tag{4.1}$$

Równanie to nazywane jest równaniem produkcji energii. Warunek graniczny ma postać

$$l(0) = 0 \tag{4.2}$$

Moc promieniowanie L jest zdefiniowana ze względu na l w następujący sposób

$$L = l(R) \tag{4.3}$$

Na tempo produkcji energii ϵ ma wpływ kilka czynników:

- **Reakcje jądrowe** (źródło energii). Temperatura we wnętrzu gwiazdy jest wystarczająco wysoka by zachodziły tam reakcje termojądrowe. W warunkach takich synteza lekkich jąder jest nieodwracalna i wytwarza duże ilości energii, gdyż masa wytworzonych składników jest mniejsza niż masa komponentów.

- **Emisja neutrin** (straty energii). Niektóre jądra wytworzone we wnętrzu gwiazdy są niestabilne ze względu na rozpad β tj. ze względu na emisję elektronów. Zjawiskiem odwrotnym do rozpadu β jest pochłanianie elektronów.Podczas rozpadu β jak i pochłaniania elektronów emitowane są bardzo lekkie, ale wysoko energetyczne cząstki – neutrina. Ich oddziaływanie z materią gwiazdy jest bardzo słabe, więc większość z nich opuszcza gwiazdę wynosząc część energii.

- **Praca pola grawitacyjnego** (źródło lub straty energii). Podczas ewolucji gwiazdy mogą występować okresy, podczas których nie jest zachowywana równowaga mechaniczna i cieplna. Na skutek tego dochodzi do kurczenia lub ekspansji gwiazdy, wymaga to przemieszczania się gazu, podczas którego pole grawitacyjne wykonuje pracę (dodatnią lub ujemną).

4.2 Transport energii

W gwieździe występują trzy procesy umożliwiające transport energii. W procesach tych za pomocą różnych „transporterów” przenoszone są różne rodzaje energii (Tabela 4.1). Liczby występujące w tabeli odpowiadają warunkom panującym na dużych głębokościach. Wartości blisko powierzchni są inne.

Tabela 4.1 Procesy transportu energii w gwiazdach

Nazwa	Energii	Przekaźnik	Ilość	Zasięg
promieniowanie	energia całkowita	fotony	$< 1keV$	1 cm
przewodnictwo	energia kinetyczna	elektrony	$< 1keV$	
konwekcja	ciepło	bąble gazu		10^8 cm

Ogólne równanie transportu energii może zostać napisane w znajomej z równania przewodnictwa cieplnego formie

$$F = D\frac{dT}{dr} \tag{4.4}$$

Przez F i D oznaczyliśmy odpowiednio strumień energii (moc na jednostkę powierzchni) i współczynnik przewodnictwa.

4.3 Transport przez promieniowanie

Transport energii przez promieniowanie jest omówiony w kursie atmosfer gwiazdowych. We wnętrzach gwiazd stosuje się proste przybliżenie zwane przybliżeniem dyfuzyjnym. Zakłada ono, że w zasięgu fotonów pojawiają się tylko niewielkie odchylenia od równowagi termodynamicznej. W szczególności promieniowanie jest prawie izotropowe i jednorodne.

Niech n i σ oznaczają odpowiednio gęstość cząsteczek i przekrój czynny dla ich wzajemnych oddziaływań. Przekrój czynny jest zdefiniowany w taki sposób, że prawdopodobieństwo wzajemnych oddziaływań cząsteczek ze strumieniem fotonów jest takie samo, jak prawdopodobieństwo uderzenia tych fotonów w powierzchnię σ. Połączony przekrój czynny wszystkich cząsteczek w jednostce objętości lub masy, $K = n\sigma$ lub $\kappa = n\sigma/\rho$ odpowiednio, nazywamy nieprzezroczystością. Średnia droga swobodna fotonów Λ jest długością gazowego słupa, w którym suma przekrojów poprzecznych jest zdolna do objęcia przekroju poprzecznego tegoż słupa. Innymi słowy, przemieszczając się na dystansie Λ foton prawdopodobnie znajdzie się w zasięgu oddziaływania innego fotonu. Dla jednostkowego przekroju poprzecznego słupa uzyskujemy

$$1 = K\Lambda = \kappa\rho\Lambda \tag{4.5}$$

W Słońcu typowe wartości gęstości i nieprzezroczystości są rzędu $\rho \sim 1g/cm^3$ i $\kappa \sim 1cm^2/g$, stąd średnia droga swobodna wynosi

$$\Lambda = 1/\kappa\rho \sim 1cm \tag{4.6}$$

Ponieważ astrofizycy wolą używać nieprzezroczystości κ dla poszczególnych przekrojów czynnych σ, więc dalej σ będzie oznaczać stałą Stefana – Boltzmanna, chyba że będzie podane inaczej.

Pole promieniowania może być opisane przez natężenie I i strumień F. Natężenie I jest energią na jednostkę czasu (mocą) przenoszoną przez fotony przechodzące przez powierzchnię jednostkową, których kierunki padają na jednostkowy kąt sferyczny. Średnia droga swobodna jest dużo mniejsza od promienia gwiazdy, możemy więc przybliżyć powłokę zakreślaną przez fotony płaską płytą gazu. W takiej geometrii natężenie promieniowania jest funkcją długości fali λ, promienia (położenia) r i kosinusa kąta pomiędzy kierunkiem fotonu a normalną do płaszczyzny powierzchni μ: $I = I_\lambda(\mu, r)$. Rozwińmy I w szereg Taylora względem μ

$$I_\lambda = I_\lambda^{(0)} + \mu I_\lambda^{(1)} + \cdots \tag{4.7}$$

W rozwinięciu tym $I_\lambda^{(1)}$ jest odpowiedzialne za asymetrię promieniowania. Przyczyną asymetrii jest przybywanie fotonów z innych powłok oddalonych średnio o Λ i różnica temperatur ΔT. Zależność natężenia I i temperatury T ma postać $I_\lambda^{(1)}/I_\lambda^{(0)} \sim \Delta T/T \sim \Lambda/R \sim 10^{-10}$. Pole promieniowania wewnątrz gwiazdy jest prawie izotropowe i w równowadze z pobliskim gazem o zbliżonej temperaturze, zatem natężenie posiada rozkład bliski rozkładowi odpowiadającemu równowadze termodynamicznej $I_\lambda^{(0)} \approx B_\lambda$ tj. rozkładowi ciała doskonale czarnego. Sieć strumieni F_λ jest natężeniem z zrzutowanej powierzchni scałkowanym po całym kącie bryłowym Ω. Rzutowanie powierzchni wprowadza dodatkowy czynnik μ

$$F_\lambda = \int I_\lambda \mu d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\lambda^{(1)} \mu^2 d\mu = 4\pi I_\lambda^{(1)}/3 \tag{4.8}$$

Z powodu antysymetrii wyrazy μ z nieparzystą potęgą znikają. W ten sposób pierwsze wyrazy rozwinięcia natężenia w szereg Taylora mogą być zapisane w postaci

$$I_\lambda = B_\lambda + \mu \frac{3}{4\pi} F_\lambda + \cdots \tag{4.9}$$

Całka (bolometryczna) strumienia od jednostkowej powierzchni ciała doskonale czarnego z racji prawa Stefana – Boltzmanna wynosi σT^4. Strumień ten może być wyrażony ze względu na natężenie bolometryczne B (rów. 2.10).

$$\sigma T^4 = F = \pi B \tag{4.10}$$

Rozpatrzmy skośny transfer promieniowania przez płaszczyznę równoległą do płaskiej warstwy gazu o grubości dr. Długość przejścia przez płaszczyznę wynosi dr/μ Natężenie przechodzącego przez płaszczyznę promieniowania zmienia się o dI_λ z powodu emisji i absorpcji. Absorpcja jest proporcjonalna do iloczynu nieprzezroczystości, natężenia $(dr/\mu)K_\lambda I_\lambda$ i długości przejścia przez płaszczyznę. Zauważmy, że na mocy definicji K_λ, $(dr/\mu)K_\lambda$ odpowiada części powierzchni obejmującej przekrój czynny cząstki. Emisja X_λ występuje w przypadkowych kierunkach tzn. jest izotropowa. Tym sposobem uzyskaliśmy równanie transferu energii

$$dI_\lambda = (X_\lambda - K_\lambda I_\lambda) dr/\mu \tag{4.11}$$

Mnożąc równanie transferu przez μ^2, podstawiając równanie (4.9) i całkując po pełnym kącie bryłowym, oraz pamiętając, że nieparzyste potęgi μ znikają, uzyskujemy

$$\frac{4\pi}{3}dB_\lambda = (0 + K_\lambda F_\lambda)dr \tag{4.12}$$

Następnie dzielimy równanie (4.12) przez K_λ i całkujemy po λ

$$\frac{4\pi}{3\tilde{K}}dB = Fdr \tag{4.13}$$

gdzie $\tilde{K}$ to tzw. średnia nieprzezroczystość Rosselanda zdefiniowana wzorem

$$\frac{1}{\tilde{K}}\frac{dB}{dT} \equiv \int \frac{1}{K_\lambda}\frac{dB_\lambda}{dT}d\lambda \tag{4.14}$$

Zmieniając zmienne różniczkowania i podstawiając równanie (4.10) otrzymujemy $\pi dB = (dB/dT)dT = 4\sigma T^3 dT$. Następnie wyrazimy moc promieniowania za pomocą strumienia: $l = 4\pi r^2 F$. Wstawiając ten związek do równania (4.14) otrzymujemy

$$\frac{16\sigma T^3}{3\tilde{K}}\frac{dT}{dr} = F = \frac{l}{4\pi r^2} \tag{4.15}$$

Rozwiązując względem T/dr uzyskujemy tradycyjną postać równania transferu energii

$$dT = -\frac{l}{4\pi r^2}\frac{3}{16}\frac{\tilde{K}\rho}{\sigma T^3}dr \tag{4.16}$$

Porównując z równaniem (4.6) otrzymujemy postać współczynnika transportu promienistego $D = (16/3)(\sigma T^3/\tilde{K}\rho)$.

4.4 Przewodnictwo

Gazy w zwykłych warunkach są słabymi przewodnikami ciepła. Zatem przewodnictwo nie odgrywa ważnej roli w gwiazdach typu Słońca. Przewodnictwo przez swobodne elektrony jest możliwe tylko wtedy, gdy dostępna jest większość stanów elektronowych, a sytuacja taka ma miejsce w zdegenerowanym gazie. W tych warunkach zanim elektron napotka nieobsadzony stan, przebywa długą drogę Λ. Duża Λ wskazuje na małą nieprzezroczystość K_c i efektywny transport ciepła (zobacz równanie (4.16)). Kiedy dwa mechanizmy transportu energii z nieprzezroczystościami K_r i K_c działają równolegle, powinniśmy dodać odpowiednie strumienie. Ponieważ $F \sim 1/K$, faktyczną nieprzezroczystość znajdujemy za pomocą poniższego równania

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_r} + \frac{1}{K_c} \tag{4.17}$$

Należy zauważyć analogię z równoległym połączeniem oporników.

4.5 Konwekcja

4.5.1 Akustyczna skala czasu

Z definicji absolutnej skali temperatury, średnia energia kinetyczna cząstek gazu wynosi $\mu v_T^2 \sim kT$. Prędkość termiczna i prędkość dźwięku v_T i v_S są równe z dokładnością do czynnika rzędu 1. Z takim samym przybliżeniem (z równania gazu doskonałego - równanie (2.6)) otrzymujemy $P/\rho \sim kT/\mu \sim \mu v_T^2/\mu \sim v_S^2$ i ostatecznie

$$v_S \sim \frac{P}{\rho} \tag{4.18}$$

Wprowadzimy teraz skalę wysokości ciśnieniowej H zdefiniowanej jako

$$H = \frac{1}{\frac{-d\ln P}{dr}} = \frac{P}{-\frac{dP}{dr}} \sim \frac{P}{g\rho} \tag{4.19}$$

Ostatnie przybliżenie opiera się na równaniu (2.4) i jest poprawne dla gładkiego rozkładu ciśnienia we wnętrzu gwiazdy, ale przestaje działać na powierzchni. Wprowadźmy częstotliwość akustyczną będącą częstotliwością fali dźwiękowej odbijającej się na dystansie H i przekształćmy to używając równań (4.18) i (4.19):

$$\omega_A^2 \sim \frac{v_S^2}{H^2} \sim \frac{P}{\rho}\frac{g\rho}{HP} \sim \frac{g}{H} \tag{4.20}$$

Częstotliwość ta nawiązuje do częstotliwości dynamicznych oscylacji o długości fali H do i odwrotności czasu przywracania równowagi hydrostatycznej w warstwie o grubości H. Fala dźwiękowa wymaga naprzemiennych ekspansji i kompresji gazu spowodowanych naprzemiennymi nadmiarami i brakami ciśnienia.

4.5.2 Stabilność przeciw konwekcji

Konwekcja spowodowana jest siłą wyporności a nie ciśnieniem (kompresją). Istnieją fale grawitacyjne, podobne do fal oceanicznych, a konwekcję można rozpatrywać jako szczególny przypadek fal grawitacyjnych. Rozpatrzmy ewolucję bąbla gazu poruszającego się pionowo we wnętrzu gwiazdy na drodze δr. Warunkiem początkowym dla zewnętrznej i wewnętrznej strony bąbla niech będzie $\delta r = 0$. Warunki końcowe dla wewnętrznej i zewnętrznej strony bąbla mogą być różne, dlatego też zmiany gęstości i ciśnienia w nowym miejscu będziemy oznaczać przez $\delta\rho_i$, δP_i oraz $\delta\rho_o$, δP_o, odpowiednio. δ oznacza różnicę pomiędzy warunkami początkowymi i końcowymi. Przez

$\Delta\rho = \delta\rho_i - \delta\rho_o$ oznaczamy różnicę między gęstością wewnątrz i na zewnątrz bąbla. Zakładamy, że ruch jest dużo wolniejszy od prędkości dźwięku, dlatego też zachowana jest równowaga hydrostatyczna

$$\delta P_i = \delta P_o \tag{4.21}$$

Przez zróżniczkowanie równania stanu w postaci $P = P(\rho, T)$, równowagę hydrostatyczną można zapisać w formie

$$0 = \Delta P = (\partial P/\partial\rho)_T \Delta\rho + (\partial P/\partial T)_\rho \Delta T$$

Dla gazu doskonałego równanie stanu (równanie (2.6)) ma postać $\delta \ln P = \delta \ln \rho + \delta \ln T$, stąd $1 = (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_T = (\rho/P)(\partial P/\partial\rho)_T$ i podobnie dla innych pochodnych. Podstawiając to dla bąbla w równowadze hydrostatycznej uzyskujemy następujące równanie

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T} \tag{4.22}$$

gdzie tak jak wcześniej symbol Δ oznacza różnicę między warunkami wewnątrz i na zewnątrz bąbla.

Siła wyporności zależy od $\Delta\rho$. Równanie ruchu jednostkowej objętości gazu poruszanej siłą wyporności ma postać

$$\begin{aligned} -\rho\frac{d^2\delta r}{dt^2} &= g\Delta\rho = g\rho\frac{d\Delta\ln\rho}{d\ln P}\frac{d\ln P}{dr}\delta r = \\ &= \frac{g\rho}{H}B\delta r = \omega_A^2\rho B\delta r \qquad \text{gdzie} \qquad (4.23) \\ B &= -\frac{d\Delta\ln\rho}{d\ln P} \qquad (4.24) \end{aligned}$$

W przekształceniu wykorzystaliśmy równania (4.19) i (4.21). Ostatnie równanie umożliwia przyjęcie ciśnienia za zmienną różniczkowania w wyrażeniu na B. Rezultat jest równaniem oscylatora harmonicznego.

Wstawiając pionowe przesunięcie $\delta r \sim e^{i\omega t}$ do równania (4.23) i przekształcając uzyskujemy częstotliwość oscylacji grawitacyjnych

$$\omega_{B-V}^2 = \omega_A^2 B \tag{4.25}$$

Częstotliwość ta nazywana jest częstotliwością Brunta - Väisäla. Ruch bąbla zależy od znaku B. Dla $B > 0$ początkowe pchnięcie prowadzi do oscylacji grawitacyjnych. Ponadto oznacza, że nie ma konwekcji. Dla $B < 0$ mamy niestabilność tj. konwekcję. Należy zauważyć, że znak B zależy od znaku

$\Delta\rho$. Dla $\Delta\rho > 0$ bąble toną tzn, powracają do równowagi. To właśnie oznacza zwrot „stabilność przeciw konwekcji".

Kryterium $B > 0$ może być przekształcone w bardziej powszechną formę wykorzystującą równanie stanu $\rho = \rho(P, T, \mu)$. Różniczkując to ze po ΔT i $\Delta\mu$ i wstawiając do równania (4.24) otrzymujemy

$$-B = \frac{\partial \ln\rho}{\partial \ln T}\left(\frac{d\ln T}{d\ln P_i} - \frac{d\ln T}{d\ln P_o}\right) + \frac{\partial \ln\rho}{\partial\mu}\left(0 - \frac{d\ln\mu}{d\ln P_o}\right) < 0 \tag{4.26}$$

Na mocy równania (4.21) ΔP znika, a skład chemiczny bąbla pozostaje nietknięty $\delta\mu_i = 0$. Dla $P, \mu = const$ w niepatologicznym równaniu stanu [cokolwiek to jest :))] $(-\partial\ln\rho/\partial\ln T) > 0$. Dzieląc przez to wyrażenie równanie (4.26) uzyskujemy kryterium konwekcji wyprowadzone w tej formie po raz pierwszy przez Ledouxa:

$$\begin{aligned}
\nabla_o &< \nabla_i + \frac{\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\mu}}{-\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}}\nabla_\mu \qquad \text{gdzie} && (4.27)\\
\nabla_o &\equiv \frac{d\ln T}{d\ln P_o}\\
\nabla_i &\equiv \frac{d\ln_T}{d\ln P_i}\\
\nabla_\mu &\equiv \frac{d\ln\mu}{d\ln P_o} \qquad \text{i}\\
B &= \left(-\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)\left(\nabla_i - \nabla_o + \frac{\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\mu}}{-\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}}\nabla_\mu\right) && (4.28)
\end{aligned}$$

Dla średniej masy cząsteczkowej rosnącej w kierunku wnętrza $\nabla_\mu > 0$, nierówność Ledouxa staje się bardziej ostra, zatem gwiazda staje się bardziej odporna na konwekcję. Zjawisko to widoczne jest w czerwonych olbrzymach: o warstwie bogatej w wodór konwekcja występuje, natomiast w warstwie helowej konwekcji nie ma.

Nierówność Ledouxa można uprościć dla jednorodnego gazu $\nabla_\mu = 0$ w głębokim wnętrzu gwiazdy, gdzie materia jest gęsta i tak nieprzezroczysta, że bąble tracą przez promieniowanie bardzo mało energii i zachodzą procesy adiabatyczne $\nabla_i \approx \nabla_{ad}$:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} \tag{4.29}$$

W dalszym uproszczenie równania (4.29) zastępujemy ∇_o jego wartością dla czystego transportu promienistego $\nabla_{rad} = (P/T)(dT/dr)/(dP/dr)$ wyprowadzoną z równań (4.16) i (2.4). Kryterium to nosi nazwę kryterium Schwarzschilda.

W ogólnym przypadku, kiedy występuje transport przez promieniowanie i konwekcję, prawdziwa jest poniższa nierówność

$$\nabla_{rad} > \nabla_o > \nabla_i > \nabla_{ad} \tag{4.30}$$

Pierwszy znak nierówności oznacza, że promieniowanie przenosi jedynie część energii, drugi jest zgodny z obecnością konwekcji, a trzeci oznacza, że część energii tracą bąble konwekcyjne. Dla adiabatycznego procesu gazu doskonałego $\delta \ln P = \gamma \delta \rho$ i $P = \delta \ln \rho + \delta \ln T$ (równania (2.14) i (2.6)). Eliminacja $\delta \ln \rho$ daje

$$\nabla_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \approx \frac{2}{5} \tag{4.31}$$

Ostatnia wartość odpowiada jednoatomowemu gazowi o $c_P = 3k/2\mu$ i $c_V = 5k/2\mu$.

4.5.3 Konwektywne równanie transportu

Dla konwekcji w głębokiej warstwie gwiazdy, ΔT rzędu kilku stopni jest zaniedbywalne w porównaniu z temperaturą $T \sim 10^7 K$. Zatem możemy założyć, że we wnętrzu gwiazdy w warstwie konwektywnej $\nabla_o \approx \nabla_{ad}$ i

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{P} \nabla_{ad} \frac{dP}{dr} \tag{4.32}$$

R.H.S. jest znaną funkcją parametrów. W szczególności jej ostatni czynnik znany jest z równania (2.4). Dla konwektywnej warstwy głęboko we wnętrzu gwiazdy, konwekcja jest prawie adiabatyczna, a równanie (4.32) zastępuje równanie transferu promienistego. W warstwach podpowierzchniowych konwekcja nie jest adiabatyczna i trzeba się odwołać do połączonej teorii długości (??) (rozdział 4.6).

Tabela 4.2. Przypadki konwekcji

Odpowiedzialny parametr	Scenariusz
$\kappa \nearrow \Longrightarrow \nabla_{rad} \nearrow$	częściowa jonizacja powłok chłodnych gwiazd
$F \nearrow \Longrightarrow \nabla_{rad} \nearrow$	jądra niebieskich olbrzymów (masywne gwiazdy ciągu głównego)
$\nabla_{ad} \searrow$	efekty termostatyczne częściowej jonizacji w chłodnych gwiazdach

Transport konwektywny występuje w dwóch podstawowych sytuacjach: wzrasta gradient promieniowania $\nabla_{rad} \nearrow$ lub maleje gradient adiabatyczny

$\nabla_{ad} \searrow$. Przez efekty termostatyczne rozumiemy efekty przypominające przejścia fazowe np. topnienie lodu. Podgrzewanie mieszaniny lodu i wody nie powoduje wzrostu temperatury mieszaniny, lecz prowadzi do dalszego topnienia lodu. Analogia nie jest całkowita, gdyż podczas częściowej jonizacji temperatura nie pozostaje stała, lecz powoli rośnie.

4.5.4 Efekty uboczne konwekcji

Przeregulowanie (Overshooting)
Mieszanie składu chemicznego
Mieszanie konwektywnych elementów następuje w czasie rzędu $1/\omega_{B-V}$, w porównaniu z nuklearną i cieplną skalą czasu jest on krótki. Dlatego też przy obecności konwekcji skład chemiczny w całej warstwie konwektywnej Δm jest jednakowy i wynosi $< X >$. Ewolucja składu chemicznego spowodowana zapaleniem się materii we wnętrzu strefy konwektywnej następuje z tempem $\partial X/\partial t$, natomiast spowodowana mieszaniem zewnętrznego materiału z tempem $\partial m/\partial t$:

$$\frac{\partial < X >}{\partial t} = \frac{1}{\Delta m}\left(\int_{\Delta m} \frac{\partial X}{\partial t}\delta m + \frac{\partial m}{\partial t}(X - < X >)\Big| \right) \tag{4.33}$$

Mieszanie konwektywne jest odpowiedzialne za niszczenie litu w otoczkach małomasywnych gwiazd ciągu głównego. Lit jest spalany z wodorem w stosunkowo niskich temperaturach:

$$\begin{array}{lll} Li^6 + p \rightarrow He^4 + He^3 & \text{dla} & T > 2.0 \cdot 10^6 \\ Li^7 + p \rightarrow He^4 + He^4 & \text{dla} & T > 2.4 \cdot 10^6 \end{array}$$

Młode gwiazdy wykazują obecność powłok okołogwiazdowych i nadwyżkę promieniowania podczerwonego emitowanego przez pobliski pył zawierający domieszkę litu pochodzącego z wewnętrznej materii gwiazdy w ilościach wykrywalnych spektroskopowo. Gwiazdy mniej masywne niż Słońce mają większą strefę konwektywną. Konwekcja nie występuje w regionach centralnych,gdzie zachodzi spalanie wodoru. Jednak może sięgać warstw,w których może zachodzić spalanie litu. Tym sposobem lit jest niszczony zaraz po uformowaniu się gwiazdy. Zatem obecność litu we wnętrzu gwiazdy wskazuje na jej młody wiek. Typowe gwiazdy ciągu głównego nie zawierają już litu.

4.6 Teoria drogi mieszania

4.6.1 Wpływ promieniowania

W ogólnym przypadku nieadiabatycznej konwekcji zarówno $\nabla_i - \nabla_o$ jak i $\nabla_i - \nabla_{ad}$ muszą być oszacowane z teorii. Wolny parametr jest średnią odległością pokonywaną przez bąble gazu tj. drogą mieszania h. Przyjęło się wyrażać h w jednostkach H: $\alpha = h/H$. Wielkość bąbla jest zbliżona do H. Dla uproszczenia wyprowadzenia założymy, że $\nabla_\mu = 0$.

Pierwsze równanie odzwierciedla równoległy transport energii przez konwekcję i promieniowanie:

$$\frac{l}{4\pi r^2} = F_c + F_r \equiv \frac{16}{3}\frac{\sigma T^3}{\tilde{K}P}\nabla_{rad}\frac{dP}{dr} \tag{4.34}$$

gdzie ostatnia równość definiuje ∇_{rad}. Drugie równanie jest wyraźnie kopią równania (4.16)

$$F_r = \frac{16}{3}\frac{\sigma T^3}{\tilde{K}P}\nabla_o\frac{dP}{dr} \tag{4.35}$$

4.6.2 Wpływ konwekcji

Ruchy konwekcyjne bąbli gazu mogą być przybliżone oscylacjami grawitacyjnymi. Bąble pokonują dystans h w czasie $\tau_{B-V} \equiv 1/\omega_{B-V}$. Ich prędkość wyrażona ze względu na ω_{B-V} (równania (4.25) i (4.28)) wynosi:

$$v^2 \sim h^2\omega_{B-V}^2 \sim \alpha^2 Hg\Big(-\frac{d\ln\rho}{d\ln T}\Big)(\nabla_o - \nabla_i) \tag{4.36}$$

Nadwyżka temperatury $\Delta\ln T$ ze względu na h wynosi: $\Delta\ln T = (\nabla_o - \nabla_i)(d\ln P/dr)h = (\nabla_o) - \nabla_i\alpha$. Teraz strumień konwektywny może być wyznaczony jako nadwyżka ciepła przenoszona przez bąble:

$$F_c \sim vC_PT\Delta\ln T \sim vC_PT(\nabla_o - \nabla_i)\alpha \tag{4.37}$$

Do oszacowania $\nabla_o - \nabla_i$ należy równanie (4.37) podnieść do kwadratu i wstawić do tego równanie (4.36):

$$F_c^2 \sim \alpha^3 Hg\Big(-\frac{d\ln\rho}{d\ln T}\Big)(C_PT)^2(\nabla_o - \nabla_i)^3 \tag{4.38}$$

Zadając $-d\ln\rho/d\ln T = \alpha = 1$ oraz inne wartości odpowiednie dla Słońca w odległości $r \sim R/2$: $H \sim R$, $C_PT \sim kT\rho/\mu \sim E_T\rho/M$, $\rho \sim M/R^3$, $F \sim L/R^2$, $Hg \sim GM/R \sim (R/\tau_d)^2$ i rozwiązując otrzymujemy

$$(\nabla_o - \nabla_i) \sim \Big(\frac{\tau_T}{\tau_D}\Big)^{2/3} \approx 10^{-7} \tag{4.39}$$

Jest to bardzo mała wartość odpowiadająca różnicy temperatur 1K na całym zakresie temperatur od powierzchni do $T_c \sim 10^7 K$. Tłumaczy to używanie uproszczonego równania transportu (równanie (4.32)) do konwekcji w głębokich warstwach. Podstawiając to do równania (4.28) i pamiętając, że dla głębokich warstw $\omega_A \sim 2\pi/\tau_D$ otrzymujemy

$$\omega_{B-V} \sim 10^{-4}\omega_A \sim \frac{10^{-3}}{\tau_D} \sim 0.1^{-d} \tag{4.40}$$

Zatem typowy czas ruchu bąbla τ_{B-V} jest rzędu miesiąca, w porównaniu z czasem dynamicznym $\sim 0.1d$ jest to czas długi. To z kolei uzasadnia zaniedbywanie wszelkich efektów dynamicznych i prawdziwość równowagi hydrodynamicznej w czasie ruchu.

4.6.3 Straty promieniowania

W przeciwieństwie do oscylatora okresowego, bąbel gazu po przebyciu drogi h nie wraca lecz miesza się z otoczeniem i ewentualnie ochładza tracąc nadmiar temperatury. W takim wypadku czas ochładzania wynosi $\tau_C > \tau_{B-V}$. Gorący bąbel ochładza się poprzez większą od absorpcji emisję promieniowania. Straty ciepła podczas ruchu i po ochłodzeniu się do warunków otoczenia są proporcjonalne do obniżenia nadmiaru temperatury, $\nabla_i - \nabla_{ad}$ i $\nabla_o - \nabla_i$, odpowiednio. Należy pamiętać, że strat nie ma jedynie w przypadku procesów adiabatycznych $\nabla_i = \nabla_{ad}$ i przy braku nadwyżki temperatury bąbla $\nabla_i = \nabla_o$. Zakładając stałe tempo ochładzania przez promieniowanie przez większą część życia bąbla, uzyskujemy prostą proporcję

$$\frac{\tau_{B-V}}{\tau_C} = \frac{\nabla_i - \nabla_{ad}}{\nabla_o - \nabla_i} \tag{4.41}$$

Do ustalenia proporcji potrzebne jest wcześniejsze ustalenie τ_C.

Nadmiar ciepła przenoszony przez bąbel wynosi $\Delta E \sim H^3 C_P \Delta T$. Straty ciepła bąbla mogą być wyznaczone z równania transportu promienistego (równanie (4.15)) i ustalenia $dT/dr \sim \Delta T/H$ oraz $F \sim \Delta l/H^2$: $\Delta l \sim H^2 F \sim \frac{H\sigma T^3}{\tilde{K}}\Delta T$. Przez analogię do równania (2.23) uzyskujemy czas ochładzania:

$$\tau_C \sim \frac{H^2 C_P \tilde{K}}{\sigma T^3} \tag{4.42}$$

Używając podobnych wartości jak w równaniu (4.39) oraz dla optycznej głębokości gwiazdy $\tau \sim \tilde{K}R$ przybliżenia Eddingtona $\sigma T^4 \sim F\tau \sim LR\tilde{K}/R^2$ otrzymujemy przybliżone oszacowanie

$$\tau_C \sim \frac{H^2 E_T}{R^2 L} \sim \frac{H^2}{R^2}\tau_T \tag{4.43}$$

tj. wiele tysięcy lat.

Używając równania (4.41) i $tau_{B-V} \sim h/v \sim \alpha H/v$ otrzymujemy

$$\frac{\alpha\sigma T^3}{vHC_P\tilde{K}} \sim \frac{\nabla_i - \nabla_{ad}}{\nabla_o - \nabla_i} \equiv \frac{1}{\Gamma} \tag{4.44}$$

Końcowy układ liczy 5 równań (równania (4.34 - 4.37) i (4.44)) oraz 5 niewiadomych: ∇_o, ∇_i, v, F_r, F_c. Zatem może być rozwiązany dla ogólnego przypadku konwekcji nieadiabatycznej.

4.6.4 Rola strat promieniowania

Aby określić efekt strat promieniowania z bąbla gazu musimy uwzględnić znak wymaganych różnic. Zapisując

$$\Delta \ln T = (\nabla_i - \nabla_o)\delta \ln P \tag{4.45}$$

dla przypadku stabilności konwektywnej jest $\nabla_i - \nabla_o > 0$, a dla początkowego pchnięcia do środka mamy $\delta \ln P > 0$, zatem $\Delta T > 0$. Straty promieniowania są przyczyną strat ciepła, zatem obniżają ΔT, a w konsekwencji równowagi hydrostatycznej (równanie (4.23)) obniżają całkowitą wartość ujemnego wyrazu $\delta\rho$. Oznacza to, że siła wyporności staje się niewystarczająca by cofnąć bąbel gazu i w rezultacie amplituda oscylacji jest tłumiona. Efektem strat promieniowania jest tłumienie wszystkich oscylacji pojawiających się w warstwie stabilnej z punktu widzenia konwekcji. Warstwa ta działa jako pompa cieplna: bąble gazu przenoszą do góry ciepło kosztem części energii mechanicznej.

Dla strefy $\nabla_\mu \gg 0$ pojawia się ciekawa możliwość. W strefie tej możliwe jest $\nabla_i - \nabla_o < 0$ mimo że $\nabla_i - \nabla_o + (\cdots)\nabla_\mu > 0$. W takiej sytuacji omawiany wcześniej bąbel ma $\Delta T < 0$, w związku z tym wymaga on dodatkowego ciepła powodującego silniejsze przywracanie siły wyporności. W efekcie rośnie amplituda oscylacji. Strefa działa jak silnik cieplny: absorbuje część transportowanego ciepła i zamienia je na energię mechaniczną.

4.7 Ewolucja składu chemicznego

4.7.1 Początkowy skład chemiczny

Skład chemiczny młodych gwiazd jest taki jak materii międzygwiazdowej, z której zostały zbudowane. W astrofizyce przyjęło się wyrażać skład przez ułamki masy

$$X_i = \frac{\mu_i n_i}{\rho} \qquad \text{gdzie} \qquad \sum_i X_i = 1 \tag{4.46}$$

Spektroskopowe obserwacje powierzchni Słońca i gwiazd pokrewnych pokazują, że ich skład jest podobny do składu materii międzygwiazdowej. Zawartości poszczególnych pierwiastków pokazuje poniższa tabela

$X = X_h$	$Y = X_{He}$	$Z = 1 - X - Y$ $\approx X_{CNO}$
0.6 - 0.7	0.36 - 0.3	0.04 - 0.001

4.7.2 Zmiana składu chemicznego spowodowana spalaniem jądrowym

Niech r_{ij} oznacza tempo (na jednostkę objętości) reakcji jądrowych, wskutek których atomy i zamieniane są na atomy j. Przy takim oznaczeniu całkowite tempo zmian masy zawierającej atomy i wynosi

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\mu_i}{\rho}\left(\sum_j r_{ji} - \sum_{ik} r_{ik}\right) \tag{4.47}$$

Wartościami łatwo dostępnymi dla astrofizyków są współczynniki produkcji energii

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\rho} r_{ij} E_{ij} \tag{4.48}$$

gdzie E_{ij} i $Q_{ij} = E_{ij}/\mu_i$ są energiami wyprodukowanymi w pojedynczej reakcji na jednostkę masy. Zauważmy, że

$$\epsilon = \sum_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{\rho}\sum_{ij} r_{ij} E_{ij} \tag{4.49}$$

Na mocy tych definicji

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \left(\sum_j \frac{\epsilon_{ji}}{Q_{ji}} - \sum_k \frac{\epsilon_{ik}}{Q_{ik}}\right) \tag{4.50}$$

W szczególności

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\epsilon_H}{Q_H} = -\frac{\partial Y}{\partial t} \tag{4.51}$$

4.7.3 Dyfuzja

Dyfuzja jest powolną, mikroskopową i selektywną migracją jądrową działającą jedynie przy braku makroskopowych ruchów takich jak konwekcja. Dyfuzja jest rodzajem procesów relaksacyjnych przywracających równomierne rozłożenie atomów. Jednym z efektów dyfuzji jest złagodzenie ostrych nieciągłości składu chemicznego. Innym efektem jest grawitacyjne rozwarstwienie atomów ze względu na ich masę, tak że masywniejsze jądra znajdują się głębiej. Odpowiadające zjawisku równanie transportu może być wyprowadzone w podobny sposób jak równanie transportu promienistego. Niech v, n i Λ będą prędkością cieplną, numerem gęstości i średnią drogą swobodną cząstek danego rodzaju. Cząstki z warstw odległych o Λ mieszają się swobodnie. Ich całkowity i ?net? strumień przez jednostkową powierzchnię wynoszą

$$\begin{aligned} \text{całkowity strumień} &= vn \\ \text{?net? strumień F} &= v\Delta n \end{aligned}$$

gdzie $\Delta n = \Lambda \partial n/\partial r$. Strumień ten może być wyrażony w postaci $F = D\partial n/\partial r$ gdzie $D \sim v\Lambda$ jest współczynnikiem dyfuzji. Odpowiadające cząstkom równanie zachowania ma postać $0 = \partial n/\partial t + \partial F/\partial r$, stąd

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(D\frac{\partial n}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.52}$$

Jest to równanie dyfuzji dla ogólnego przypadku zmiennej D.

Niech h oznacza odległość typowych niejednorodności cząstek. Zastępując w równaniu (4.52) różniczkowanie skończonymi zmianami, uzyskujemy wyrażenie na skalę czasową dyfuzji: $1/\tau_{dyf} \sim D/h^2$ lub

$$\tau_{dyf} \sim \frac{h^2}{D} \sim \frac{h^2}{v\Lambda} \sim 10^{13} lat \tag{4.53}$$

Ostatnia wartość dotyczy Słońca. Powyższa skala czasowa jest w porównaniu z wiekiem Słońca bardzo długa, zatem można ją bezpiecznie zaniedbać. Jednakże dla gwiazd o $h \sim R/1000$ skala czasowa dyfuzji jest porównywalna ze skalą cieplną.

Równomierny rozkład atomów, który jest przywracany w procesie dyfuzji posiada równomierny rozkład energii cząstek, tak więc

$$kT \sim E_k \sim E_g \sim g\mu_i H_i \tag{4.54}$$

gdzie H_i jest typowym rozkładem i-tych cząstek. W równowadze

$$H_i \sim \frac{kT}{g\mu_i} \tag{4.55}$$

odpowiada sytuacji, w której masywniejsze atomy poruszają ku się ku dołowi, a lżejsze atomy ku górze. Wyraźne efekty dyfuzji występują w gwiazdach, w których nie występuje mieszanie przez konwekcję i w tych o silnym przyspieszaniu grawitacyjnym g (białe karły).

4.8 Stabilność cieplna

4.8.1 Gwiazdy typu Słońca

Stabilność równowagi gwiazd (cieplnej lub energetycznej) zależy od właściwości ich reaktora jądrowego. Obecnie wystarczające jest wiedzieć, że $\partial \ln \epsilon / \partial \ln T \gg 0$. Należy zauważyć, że przy typowych prędkościach cieplnych jąder nie zachodzi fuzja jądrowa, natomiast w wyższych temperaturach stanowi ona potencjalne źródło energii. Zatem tempo reakcji jądrowych rośnie wraz z temperaturą, $\partial \ln \epsilon / \partial \ln T > 0$.

Zaburzenia równowagi energetycznej rozwijają się w termicznej skali czasu, τ_T, wolno w porównaniu do dynamicznej skali czasu τ_D. Z tych powodów w czasie ewolucji utrzymywana jest równowaga hydrostatyczna. Dla Słońca i podobnych gwiazd zbudowanych z gazu (prawie doskonałego) poprawna jest następująca forma teorii wirialnej (równanie (2.21)): $-E \sim \frac{GM^2}{R} \sim \frac{M}{\mu} kT$. Natomiast w postaci różniczkowej:

$$\delta \ln (-E) = -\delta \ln R = \delta \ln T \tag{4.56}$$

Z równania ciągłości mamy że $\rho \sim M/R^3$ tj.

$$\delta \ln \rho = -3 \delta \ln R \tag{4.57}$$

Aby uzyskać przybliżone oszacowanie w równaniu zachowania energii (równanie (4.1)), zastępujemy pochodne dl i dr skończonymi różnicami i przyjmując $\rho \sim M/R^3$ otrzymujemy

$$L \sim M\epsilon \tag{4.58}$$

Takie przybliżenie jest ważne dla Słońca i podobnych gwiazd, w których parametry zmieniają się gładko wraz z promieniem.

Równanie (4.58) utrzymuje równowagę strat i źródeł energii w gwieździe. Zaburzenia równowagi prowadzą do stopniowej zmiany całkowitej energii E gwiazdy o δE:

$$\frac{d\delta E}{dt} \sim \delta(M\epsilon - L) \sim L(\delta \ln \epsilon - \delta \ln L) \tag{4.59}$$

W ostatniej transformacji użyliśmy równania (4.58). Wykorzystajmy teraz równanie (4.56):

$$\frac{d\delta\ln T}{dt} = \frac{d\delta\ln(-E)}{dt} \sim \frac{1}{-E}\frac{-d\delta E}{dt} = \frac{L}{-E}(\delta\ln L - \delta\ln\epsilon)$$

Warto teraz odwołać się do cieplnej skali czasu (równanie (2.23)). Wykorzystując je uzyskujemy poniższe przybliżenie:

$$\frac{d\delta E}{dt} \sim -\frac{1}{\tau_T}\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T}\delta\ln T \tag{4.60}$$

Równanie (4.60) jest liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu opisującym ewolucję perturbacji $\delta\ln T$. Podstawiając próbne rozwiązanie $\delta\ln T \sim e^{\omega t}$ dla $\omega < 0$ uzyskujemy kryterium stabilności równowagi cieplnej

$$\omega = -\frac{1}{\tau_T}\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T} < 0 \tag{4.61}$$

Ponieważ $\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T} > 0$, kryterium (4.61) jest spełnione, zatem nasze Słońce jest stabilne ze względu na zaburzenia reakcji jądrowych. Skala czasowa ewolucji zaburzeń równowagi energii wynosi τ_D.

Zbadajmy efekt zaniedbania zależności L i ϵ od ich parametrów. Zapisując równanie transportu promienistego w postaci $L/R^2 \sim F \sim (d\sigma T^4/dr)/\tilde{\kappa}\rho \sim \sigma T^4 R^2/\tilde{\kappa}M$ i różniczkując otrzymujemy

$$\delta\ln L = 4\delta\ln R + 4\delta\ln T - \delta\ln\tilde{\kappa} = -\delta\ln\tilde{\kappa} \tag{4.62}$$

Głęboko we wnętrzu gwiazdy, gdzie gaz jest całkowicie zjonizowany, $\delta\ln\kappa$ można zaniedbać.

Zależność ϵ od T była wyznaczona właściwie. Pozostaje do omówienia podobna zależność od ρ. Tempo fuzji na objętość zależy od tempa kolizji, tj. od liczby par cząstek $\sim \rho^2$. Zatem tempo reakcji na masę $\epsilon \sim \rho^{-1}$, tj. $\partial\ln\epsilon/\partial\ln\rho = 1$. Uzyskujemy zatem

$$\delta\ln\epsilon = \frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T}\delta\ln T + \frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln\rho}\frac{d\ln\rho}{d\ln R}\frac{d\ln R}{d\ln T} = \left[\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T} + (+1)(-3)(-1)\right]\delta\ln T \tag{4.63}$$

Łącząc oba rezultaty otrzymujemy

$$\delta\ln L - \delta\ln\epsilon = 4\delta\ln R + 4\delta\ln T = -\left(\frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T} + 3\right)\delta\ln T - \delta\ln\tilde{\kappa} \tag{4.64}$$

Taki rezultat wskazuje, że zaniedbanie efektu zwiększa stabilność Słońca.

4.8.2 Gwiazdy barotropowe

Stabilność gwiazd opisanych barotropowym równaniem stanu stanowi odmienny przypadek od gwiazd typu Słońca. Barotropowe równanie stanu ma postać $P = P(\rho)$. Całkowita energia gwiazdy zależy od P, ale nie zależy T.

$$-E \sim \frac{GM^2}{R} \sim PR^3 \qquad \text{gdzie} \qquad \frac{\partial P}{\partial T} \equiv 0 \tag{4.65}$$

$$E_T \sim \frac{M}{\mu} kT \ll PR^3 \tag{4.66}$$

Spalanie jądrowe produkuje ciepło i powoduje wzrost E_T i T. Jednakże, ponieważ P nie zależy od T i $E_T \ll |E|$, to całkowita energia pozostaje prawie niezmieniona. Tak samo dzieje się z R i ρ. Zatem sytuacja przypomina ogrzewanie kawałka metalu: temperatura rośnie, ale nie zmienia się jego struktura. Nowe równanie perturbacji uzyskane z poprzedniego poprzez podstawienie $-E$ za E_T ma postać

$$\frac{d\delta \ln T}{dt} = \frac{d\delta \ln E_T}{dt} \sim -\frac{L}{E_T}(\delta \ln L - \delta \ln \epsilon) \sim +\frac{1}{\tau_T}\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T}\delta \ln T \tag{4.67}$$

Kryterium stabilności w tym przypadku ma postać

$$\omega = +\frac{1}{\tau_T}\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T} < 0 \tag{4.68}$$

Gwiazdy barotropowe są termicznie niestabilne. Rezultatem rozpoczęcia reakcji jest ekspotencjalny wzrost tempa reakcji i eksplozja termonuklearna. Eksplozja może być zatrzymana nie wcześniej niż dla $E_T \sim E$, kiedy ciśnienie gazu doskonałego staje się znaczące. Barotropowe równanie stanu stosuje się do zdegenerowanych jąder czerwonych olbrzymów i dla białych karłów. W czerwonych olbrzymach zapłon helu w zdegenerowanym jądrze powoduje niestabilność termiczną. Natomiast w przypadku kataklizmicznego układu podwójnego, jeden ze składników układu (biały karzeł) gromadzi materię pochodzącą od drugiego składnika i tym sposobem powstaje warstwa bogata w wodór. Zapalenie się wodoru w tej warstwie objawia się jako wybuch nowej. W przeciwieństwie do wybuchu supernowej, którego przyczyną jest niestabilność dynamiczna jądra, a eksplozja termonuklearna jest następstwem, a nie przyczyną niestabilności.

4.9 Równania budowy gwiazdy

4.9.1 Pełny zestaw równań

Matematycznie równania budowy gwiazdy są prostym układem 4 równań różniczkowych pierwszego rzędu. Jednakże ich prawe strony zawierają funkcje stanu, które są bardzo złożonymi funkcjami parametrów stanu, natomiast określenie parametrów stanu możliwe jest jedynie przy wykorzystaniu komputerów. Dlatego też realistyczne rozwiązania można uzyskać jedynie metodami numerycznymi. Dla metod tych ważnym jest, że całkowe rozwiązania są gładkimi funkcjami niezależnych zmiennych. Pod tym względem bardziej odpowiednią zmienną całkowania jest masa m, a nie promień r. Tak więc w praktycznym użyciu równanie (2.1) jest transformowane do postaci $dr/dm = (dm/dr)^{-1}$, a inne równania są wyprowadzane z równania (2.1), tak żeby otrzymać pochodne po m. Tym sposobem równania (2.1), (2.4), (4.1), (4.32) i (4.50) przybierają „profesjonalną" formę:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \underline{\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}} \qquad \tau_D \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_\eta - \epsilon_\nu - \underline{\frac{\partial Q}{\partial t}} \qquad \tau_T \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P}\nabla \tag{4.72}$$

$$\underline{\frac{\partial X_i}{\partial t}} = \underline{\left(\sum_j \frac{\epsilon_{ji}}{Q_{ji}} - \sum_k \frac{\epsilon_{ik}}{Q_{ik}}\right)} \qquad \tau_N \tag{4.73}$$

W równaniu transportu symbol ∇ oznacza albo ∇_{rad} albo ∇_{ad} w zależności od tego czy energia jest przenoszona przez promieniowanie czy też przez konwekcję. Dla transportu promienistego zakładamy w równaniu (4.35) $F \equiv l/4\pi r^2$.

W równaniach wyrazy odzwierciedlające wpływ czasu są podkreślone, a odpowiadające skale czasu są umieszczone po prawej stronie. Ponieważ $\tau_D \ll \tau_T \ll \tau_N$, zwykle znaczącą rolę odgrywa nie więcej niż jeden wyraz - nie ma czasu by pozostałe dwa efekty osiągnęły równowagę lub wywołały znaczące efekty. Wpływ czasu, tj. wyrazów $\partial/\partial t$ jest zazwyczaj niewielki. Wyrazy te są w obliczeniach zaniedbywane, lub zakłada się ich znajomość na podstawie wcześniejszych modeli. Tym sposobem problem budowy i ewolucji gwiazdy może być traktowany jako kolejne rozwiązanie równań stanu (równania (4.69 - 4.72)), które mogą być rozpatrywane jako równania różniczkowe pierwszego rzędu w przestrzeni wektorów

$$\overline{y} = (r, P, l, T) \tag{4.74}$$

Ewolucję gwiazdy określa się w następujący sposób: najpierw oblicza się model dla założonych warunków początkowych rozwiązując równania (4.69 - 4.72). Później dobiera się odpowiednio mały krok czasowy Δt i oblicza zmianę składu chemicznego $X_i(m, t + \Delta t) = X_i(m, t) + (\partial X_i(m, t)/\partial t)\Delta t$ (równanie (4.73)) we wszystkich warstwach gwiazdy. Następnie określa się model dla nowego składu chemicznego, potem znów oblicza zmianę składu chemicznego itd.

4.9.2 Funkcje stanu

Złożoność fizyki gwiazd zawiera się w funkcjach stanu opisujących lokalne warunki materii gwiazdy. Są to funkcje parametrów stanu takich jak ciśnienie, temperatura i skład chemiczny $P, T, X, \cdots$. Pełną listę funkcji stanu przedstawia poniższa tabela

Funkcje	Procesy
ρ, $\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}$, $\frac{\partial \ln rho}{\partial \ln \mu}$	równania stanu
∇_{ad}, c_P	równania stanu i termodynamiczne
$\tilde{\kappa}$	nieprzezroczystość
ϵ_η, ϵ_ν, r_{jk}	reakcje jądrowe

Funkcje te wystarczają do znalezienia rozwiązań równań budowy gwiazdy. Oprócz nich, dla wygody i przyspieszenia obliczeń, potrzebne są pochodne równań R.H.S.

Funkcje ∇_{ad} i c_P, tj. gradient adiabatyczny i ciepło właściwe, są obliczane z równań stanu za pomocą termodynamicznych relacji. W gwiazdach ciągu głównego produkowana energia ϵ_η pochodzi ze spalania wodoru w cyklach p - p i CNO. W przypadku gwiazd bardziej zaawansowanych ewolucyjnie energia pochodzi z innych reakcji np. 3α czy spalanie CO. Straty energii spowodowane emisją neutrin są wliczone do ϵ_ν.

4.9.3 Warunki brzegowe: wersja profesjonalna

W ogólnej formie warunki brzegowe mogą być zapisane za pomocą 4 funkcji b_j parametrów $\overline{y}$ (równanie (4.74)):

$$0 = b_j(\overline{y}_0) \quad \text{dla} \quad j = 1, 2 \quad \text{w centrum} \tag{4.75}$$

$$0 = b_j(\overline{y}_M) \quad \text{dla} \quad j = 3, 4 \quad \text{na powierzchni} \tag{4.76}$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych stanowi tzw. problem Cauchy'ego, tj. dla całego układu bierzemy warunki brzegowe z jednego miejsca. Warunki brzegowe dla budowy gwiazdy nie są jednakowe we wszystkich miejscach, zatem nie jest to problem Cauchy'ego. W tym przypadku jest to tzw. problem wartości własnych. Dowolne rozwiązania różnią się od siebie o skończoną wartość. Nie są znane żadne jednoznaczne rozwiązania.

Warunki brzegowe w centrum
Pierwotne warunki brzegowe w centrum $m = l = 0$ dla $r = 0$ są niedogodne do obliczeń ze względu na wyraz 0/0. Z tego powodu niezbędne jest używanie analitycznego rozwinięcia do znalezienia rozwiązań od $m = 0$ do $m_1 \ll M$. Centralny region przybliża się sferą o stałej gęstości ρ_c i masie m_1. Odpowiednia para warunków brzegowych blisko centrum ma postać

$$r_1^3 = \frac{3}{4\pi\rho_c} m_1 \tag{4.77}$$

$$l_1 = \left(\epsilon_\eta - \epsilon_\nu + \frac{\partial Q}{\partial t}\right)_c m_1 \tag{4.78}$$

Rozwiązania dają dokładne P i T dla m_1. Do obliczenia $f_c = (P_c, T_c)^T$ niezbędne są dodatkowe formuły.
Warunki brzegowe na powierzchni
Tymczasowe warunki na powierzchni $P \approx T \approx 0$ dla $m = M$ są zbyt przybliżone by mogły być używane w aktualnych modelach. Lepsze warunki uzyskuje się poprzez założenie $\kappa \equiv const$ i scałkowanie równania równowagi hydrostatycznej pomnożonego przez κ:

$$\underline{P_\kappa} = \kappa \int_r^\infty \frac{dP}{dr} dr = g \int_r^\infty \kappa\rho dr = \underline{g\tau} \tag{4.79}$$

Drugi warunek graniczny uzyskujemy całkując (4.13) $(4\pi/3\tilde{K})(dB/dr) = F \equiv const$ po głębokości optycznej $d\tau = \tilde{K} dr$:

$$\underline{T^4 = \frac{3}{4}(T_e^4 \tau + q)} \tag{4.80}$$

gdzie $\pi B = \sigma T^4$, $L/4\pi R^2 = F \equiv \sigma T_e^4$ i $q \approx 2/3$. Jest to tzw. przybliżenie Eddingtona dla atmosfery gwiazdy. W równaniach (4.79) i (4.80) $\tau \gg 1$ jest wolnym parametrem oznaczającym głębokość optyczną, w której stosuje się warunki brzegowe.

Warunki brzegowe (równania (4.79 i 4.80)) w wielu przypadkach są wystarczająco dobre. Jednakże czasami wymaga się jeszcze dokładniejszych warunków brzegowych. Uzyskuje się je z modeli atmosfer gwiazdowych. Modele atmosfer zależą od dwóch parametrów: T_e i $g = GM/R^2$. Te dwa parametry i warunek ciągłości na głębokości optycznej τ_M dostarczają warunki brzegowe w ogólnej postaci

$$0 = b_j(\overline{y}_M)_{\tau_M} \qquad \text{dla} \qquad j = 3, 4$$

4.10 Metody obliczeniowe

4.10.1 Iteracja Newtona - Raphsona

Niech y_0 oznacza przybliżoną wartość (odgadniętą) rozwiązania, a równanie niech ma postać

$$0 = f(y) \tag{4.81}$$

Wprowadzając δy takie, że $y = y_0 + \delta y$, równanie (4.81) przechodzi w w $0 = f(y_0+\delta y)$. Równanie to rozwijamy w szereg Taylora wokół y_0 i obcinamy na wyrazach drugiego rzędu

$$0 = f(y_0) + \frac{df}{dy_0}\delta y \tag{4.82}$$

Jest to liniowe równanie na δy. Rozwiązując je znajdujemy nowe rozwiązanie $y_0+\delta y$. Rozwiązanie to nie jest dokładne, gdyż zaniedbano wyrazy wyższego rzędu rozwinięcia Taylora. Jednakże, dla wystarczająco bliskiego rozwiązania początkowego, wyrazy wyższego rzędu są dość małe i nowe rozwiązanie $y_0 + \delta y$ jest lepsze niż y_0. Następnie podstawiamy $y_0 + \delta y$ jako nowe rozwiązanie początkowe i w ten sposób przybliżamy się do dokładnego rozwiązania. W reszcie tego rozdziału y i $f(y, m)$ oznaczają zależne zmienne całkowania i R.H.S. równań różniczkowych. Zauważmy, że symbol m może mieć dwa różne znaczenia, które powinny być jasne z kontekstu: może być to zmienna określająca masę lub indeks warstw gwiazdy. Zatem m_{m+1} oznacza masę odpowiadającą warstwie o numerze $m + 1$.

4.10.2 Metoda Schwarzschilda

Być może najprostszym sposobem na rozwiązanie równań budowy jest dodanie drugiego znanego parametru zamiast jednego (powiedzmy P_c i T_c dla $m = 0$) i całkowanie równań od tych początkowych wartości i sprawdzenie czy uzyskane warunki graniczne są zadowalające. Niestety jednostronna metoda „próbuj i błądź" działa bardzo kiepsko. Całkowe rozwiązania są niestabilne w tym sensie, że rozchodzą się szybko zanim osiągniemy granicę całkowania, nie jesteśmy więc w stanie określić rozwiązań blisko tych warunków.

Lepszą metodą jest pokrewna do powyższej metoda dwustronna. W metodzie tej zgaduje się warunki graniczna na obu końcach: $m = 0$ i M oraz całkuje z dwóch stron do warstwy pośredniej:

$$
\begin{aligned}
y_-(M/2) &= y_0 + \int_0^{M/2} f dm \\
y_+(M/2) &= y_M + \int_M^{M/2} f dm
\end{aligned}
$$

Dla warstwy pośredniej (powiedzmy $M/2$) narzucamy płynne przejście dla $y_\pm$, wystarcza to by poprawnie ustalić odgadywane wartości:

$$
0 = y_-(M/2) - y_+(M/2) \tag{4.83}
$$

Równanie (4.83) rozwijamy w szereg Taylora i obcinamy wyrazy wyższych rzędów:

$$
0 = y_- - y_+ + C_-\delta y_0 - C_+\delta y_m \tag{4.84}
$$

gdzie pochodne $C_\pm = \partial y_\pm/\partial y_{0,M}$ mogą być przybliżone skończonymi różnicami opierającymi się na wstępnych obliczeniach. Nie zanikają tylko 4 składowe δy_0 i δy_m, zatem po pierwszej próbie, rozwiązanie równania (4.84) dostarcza zbiór poprawnych δy. Poprawione rozwiązanie nie jest dokładne ponieważ przy rozwijaniu w szereg Taylora odrzuciliśmy wyrazy wyższego rzędu. Poprawione rozwiązania wykorzystuje się w następnej iteracji. Powyższa metoda dwustronnego zgadywania warunków początkowych w astronomii nosi nazwę metody Schwarzschilda.

4.10.3 Relaksacyjna metoda Henyeya

Metoda Schwarzschwilda została najpierw opracowana do obliczeń analitycznych, a dopiero później wykorzystano ją w obliczeniach numerycznych. Natomiast w przypadku metody Henyeya najpierw opracowano aspekt numeryczny. Gwiazda dzielona jest na kilkaset warstw ponumerowanych od $m = 1, \cdots, M$. Równania różniczkowe zastępowane są układem $M-1$ równań różniących się o skończone wartości, odzwierciedlające różnicę między warstwami m i $m+1$. Właśnie to jest numerycznym aspektem tej metody. Do poprawnego znalezienia y powinien wystarczyć układ równań

$$
0 = \frac{y_{m+1} - y_m}{m_{m+1} - m_m} - \frac{f(y_{m+1}) + f(y_m)}{2} \tag{4.85}
$$

dla $m = 1, \cdots, M$, odpowiadający $4 \times (M-1)$ równaniom. Oprócz równań niezbędne są 4 warunki brzegowe (równania (4.75) i (4.76)). W sumie mamy $4M$ równań i tyle samo niewiadomych $\delta y_m, m = 1, \cdots, M$.

W uproszczonej notacji równania te można zapisać postaci

$$
\begin{array}{ll}
0 = c_0(y_1) & 2 \text{ równania} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
0 = c_m(y_m, y_{m+1}) & 4 \times (M-1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
0 = c_M(y_M) & 2
\end{array}
\tag{4.86}
$$

gdzie c-s są znanymi funkcjami y-s.

Aby rozpocząć obliczenia, wcześniej dla każdej warstwy trzeba określić początkowe wartości rozwiązań funkcji $y(m)$. W ogólności początkowe wartości rozwiązań niezbyt dobrze nadają się do równań Henyeya (równania (4.86)). Jeśli tak, to dla y R.H.S. równań (4.86) nie znika. Zatem, podobnie jak w metodzie Schwarzschilda, równania rozwija się w szereg Taylora wokół punktu y i obcina wyrazy wyższych rzędów. Niech $y + \delta y$ oznacza poszukiwane rozwiązania równań Henyeya. Rozwinięcie równań daje liniowe równania algebraiczne na wartości poprawnych funkcji δy:

$$
\begin{array}{llll}
0 = c_0(y_1) & & & + C_0 \delta y_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
0 = c_m(y_m, y_{m+1}) & & + C_{-m}\delta y_m & + C_{+m}\delta y_{m+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
0 = c_M(y_M) & & & + C_M \delta y_M
\end{array}
\tag{4.87}
$$

gdzie c_m i $C_{\pm m} = \partial c_m / \partial y_{m+1/2 \pm 1/2}$ są wektorami R.H.S. równań (4.86) i macierzami ich pochodnych wyliczonych z początkowych wartości rozwiązań. Jest to liniowy układ dla $4M$ nieznanych poprawek δy_m, tj. 4 wartości y dla każdej warstwy.

4.10.4 Three - diagonal elimination

4.10.5 Stabilność modeli gwiazd

Rozdział 5

Funkcje stanu

5.1 Równania stanu

Druga zasada dynamiki Newtona może być zapisana w postaci $d(mv)/dt = F$. Stąd ciśnienie może być wyrażone w postaci

$$P \sim \frac{\text{siła}}{\text{powierzchnia}} \sim \frac{\text{strumień pędu}}{\text{czas} \cdot \text{powierzchnia}} \tag{5.1}$$

Ten rodzaj relacji stanowi podstawę wyprowadzenia równań stanu.

5.1.1 Promieniowanie

We wnętrzu gwiazdy średnia droga swobodna fotonów jest tak krótka jak $\Lambda = 1/\kappa \sim 1cm$ (dla Słońca), promieniowanie ma zatem małe szanse na ucieczkę, a jego właściwości są podobne do promieniowania ciała doskonale czarnego w równowadze termodynamicznej. Ciśnienie i gęstość energii promieniowania ciała doskonale czarnego opisane są równaniami (2.12) i (2.13). Pozostałe funkcje stanu uzyskuje się poprzez proste różniczkowanie:

$$\underline{U = \frac{4\sigma T^4}{c}} \qquad \underline{P_r = \frac{4\sigma T^4}{3c}} = \frac{1}{3}U$$

$$\frac{d\ln T}{d\ln P} = \underline{\nabla_{ad} = \frac{1}{4}} \qquad \underline{\gamma \equiv \frac{1}{1-\nabla_{ad}} = \frac{4}{3}}$$

$$C_V = \frac{d\ln U}{d\ln T} = \frac{16\sigma T^3}{c} \qquad C_P = \gamma C_V = \frac{64\sigma T^3}{3c}$$

W powyższych wzorach wielkie litery oznaczają wartości na jednostkę objętości.

5.1.2 Gaz doskonały

W przypadku gazu doskonałego energia kinetyczna cząstek definiuje temperaturę $\mu v^2 \sim kT$. v^2 jest średnim kwadratem prędkości ruchów termicznych. Rozważmy sześcian o długości boku l z liczbową gęstością zamkniętych cząstek n. Tylko $n/6$ cząstek zmierza by uderzyć określoną w ścianę sześcianu. Wśród nich tylko cząstki w odległości $< 1 \cdot v$ uderzą w ścianę w okresie jednostki czasu. Cząstki te pochodzą z objętości vl^2, zatem strumień cząstek na jednostkę powierzchni wynosi $vn/6$. W przypadku odbić sprężystych moment pędu cząstek zmienia się średnio od $+\mu v$ do $-\mu v$, tj. o $2\mu v$. Wstawiając to do równania (5.1) i zaniedbując czynniki rzędu jedności otrzymujemy ciśnienie

$$\underline{P} \sim \mu v v n \sim nkT \sim \frac{\rho}{\underline{\mu kT}} \sim \frac{m}{V}\frac{\mu_H}{\mu}\frac{k}{\mu_H}T \sim \mathcal{M}\mathcal{R}\frac{T}{V} \tag{5.2}$$

gdzie $\mathcal{M} = m/(\mu/\mu_H)$ jest liczbą moli gazu, a $\mathcal{R} = k/\mu_H$ jest stałą gazową.

We wnętrzu gwiazdy do całkowitego ciśnienia przyczyniają się atomy kilku rodzajów zatem

$$n = \sum_i n_i = \rho \sum_i \frac{X_i}{\mu_i} \tag{5.3}$$

gdzie X_i jest ułamkową zawartością i-tych atomów podzieloną przez masę. Średnia masa cząsteczek wynosi ρ/n zatem

$$\underline{\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{X_i}{\mu_i}} \equiv \frac{1+E}{E\mu_e} \equiv 1 + E\mu_a \tag{5.4}$$

gdzie $E = n_e/n_a$ jest ułamkiem liczby wolnych elektronów na atom, a μ_e i μ_a średnimi masami gazu na elektron i atom, odpowiednio. Dla wodoru, helu i CNO średnie masy wynoszą

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} &= \Big(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z\Big)\frac{1}{\mu_H} \\
\frac{1}{\mu} &= \Big(X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z\Big)\frac{1}{\mu_H} \\
\frac{1}{\mu} &= \Big(X + \frac{1}{4}Y + 0\Big)\frac{1}{\mu_H}
\end{aligned}$$

Gęstość energii i ciepło właściwe na jednostkę masy wynoszą

$$\underline{u = \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu}} \qquad c_V = \frac{u}{T} = \frac{3}{2}\frac{k}{\mu} \qquad c_P = \frac{u + pV}{T} = \frac{5}{2}\frac{k}{\mu}$$

$$\gamma \equiv \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3} \qquad \underline{\nabla_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{2}{5}}$$

5.1.3 Jonizacja

Rozkłady Sachy i Boltzmanna

Zgodnie z prawem Boltzmanna cząstki danego typu w równowadze termodynamicznej obsadzają stany energetyczne w taki sposób, że stosunek populacji cząstek w stanach n_1 i n_2 o energiach E_1 i E_2 wynosi

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2}^{-\frac{E_1 - E_2}{kT}} \tag{5.5}$$

g_1 i g_2 są wagami statystycznymi odpowiadającymi stanowi 1 i 2. Wagi określają całkowitą liczbę danych stanów. Podobną postać ma wzór na stosunek populacji cząstek w jednym stanie n_1 do liczby wszystkich danych cząstek

$$\frac{n_1}{n} = \frac{g_1}{u} e^{-\frac{E_1}{kT}} \tag{5.6}$$

Podobieństwo jest tylko formalne, ponieważ u, zwana funkcją stanów, jest sumą wag statystycznych wszystkich poziomów energetycznych (powiedzmy, że wszystkich stanów atomu), wyważoną przez prawdopodobieństwo ich populacji. W atomie jest nieskończenie wiele poziomów energetycznych, zatem suma prosta ich wag statystycznych jest zawsze nieskończona. Jednakże orbita elektronowa dla bardzo wysokich stanów energetycznych jest tak odległa, że znajduje się w miejscu występowania innych atomów. Stany te nigdy przez elektrony nie są zajmowane a sumowanie jest skrócone w zależności od stanu gazu, tak więc $u = u(\rho, T)$ jest funkcją stanu.

Jonizację atomu A, $A_i \leftrightarrow A_{i+1}^+ + e^-$ można rozpatrywać jako przejście elektronu ze stanu związanego o energii $-\chi_i$ do jednego z wolnych stanów w kontinuum z energią $p_e^2/2m_e$ gdzie χ_i jest energią jonizacji a p_e i m_e to pęd i masa elektronu. Stosując prawo Boltzmanna dostajemy

$$\frac{dn_{i+1}}{n_i} = \frac{u_{i+1}}{u_i} dg_e e^{-\frac{p_e^2/2m_e + \chi_i}{kT}} \tag{5.7}$$

Zauważmy, że waga statystyczna wyższego stanu jest iloczynem wag jonu g_{i+1} i jego elektronu dg_e dla pędu dp_e. Elektrony są fermionami, tzn. że jeden stan może być zajmowany tylko przez nie więcej niż jeden elektron. Ze względu na zasadę nieoznaczoności, stan elektronu zajmuje objętość nie mniejszą niż $\Delta x^3 \Delta p^3 > h^3$ w przestrzeni fazowej pędów i objętości. Jeśli zatem liczba dozwolonych stanów wynosi $dg_e \sim d^3xd^3p/h^3 \sim p_e^2dp_e/n_eh^3$ gdzie $1/n_e$ jest objętością na elektron a $p_e^2dp_e$ jest d^3p dla symetrii sferycznej. Podstawiając do równania (5.7) i zamieniając zmienne $y^2 = p_e^2/m_ekT$ otrzymujemy

$$\frac{dn_{i+1}}{dn_i} \sim \frac{u_{i+1}}{u_i}e^{-\frac{\chi_i}{kT}}\frac{(m_ekT)^{3/2}}{n_eh^3}e^{-y^2}y^2dy \tag{5.8}$$

Scałkowanie tego równania daje w rezultacie równanie Sachy

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = 2\frac{u_{i+1}}{u_i}\frac{(2\pi m_ekT)^{3/2}}{n_eh^3}e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \tag{5.9}$$

gdzie czynnik 2 wynika z dwóch możliwych orientacji spinu elektronu.
Bilans jonizacji
Zapisując R.H.S. równania Sachy dla atomu typu j jako $f_{ji}(n_e, T)$ uzyskujemy następujący układ równań dla populacji stanów jonizacyjnych

równanie	liczba	niewiadoma
$n_{ji+1} = n_{ji}f_{ji}(n_e, T)$	$J(J-1)$	n_{ji}
$\sum_i n_{ji} = \rho\frac{X_j}{\mu_j}$	J	n_{j1}
$\sum_{ji} in_{ji} = n_e$	1	n_e

W praktyce układ ten służy do najlepszego wybrania jednostki n_{ji} najpowszechniejszych stanów, a dopiero później znajduje się wartość jednostki z $\sum_i n_{ji}$. Stan ten można łatwo znaleźć przez zmianę znaku w sekwencji $\ln f_{ji}$ dla $j = 1, \cdots, J-1$. Równanie stanu gazu doskonałego po uwzględnieniu jonizacji przybiera postać

$$P = (n_e + \sigma_{ji}n_{ji})kT \tag{5.10}$$

Należy zauważyć, że w pobliżu równowagi termodynamicznej, średnia energia cząstek wszystkich typów wynosi kT. Fakt ten nosi nazwę ekwipartycji energii.
Gradient adiabatyczny
W zakresie temperatur, w którym jonizacja jest tylko częściowa, zmiana liczby cząstek w zależności od stopnia jonizacji i zależności $P(T, V)$ jest złożona. Natomiast dla niskich i wysokich temperatur jonizacja jest albo zaniedbywana, albo całkowita, a odpowiednie wykresy $\ln P$ od $\ln T$ dla adiabatycznych procesów asymptotycznych są prostymi, równoległymi liniami nachylenia $1/\nabla_{ad} = 5/2$. Dla wysokich temperatur linie (odpowiadające całkowitej jonizacji) leżą wyżej niż większość cząstek (równanie (5.10)). Dla wzrostu temperatury, w pośrednim reżimie relacja $P - T$ przeskakuje do

wyższej linii, tj. jej nachylenie jest większe niż 5/2. Zamiana osi wykresu ukazuje, że w reżimie częściowej jonizacji gradient adiabatyczny musi być mniejszy niż wartość kanoniczna 2/5, mianowicie $0 < \nabla_{ad} < 2/5$.

Ciśnienie jonizacji

Ze średniej objętości na jeden atom można wyprowadzić średnią odległość między atomami $d \sim (\mu/\rho)^{1/3}$. Elektrony w odległości d przestają być związane. Faktycznie potencjał jonizacyjny staje się niższy o $\Delta\chi \sim Ze^2/d$. To może wytwarzać *ciśnienie jonizacji* jak tylko $\Delta\chi$ stanie się porównywalne z potencjałem jonizacyjnym. Rozwiązując te dwie równości otrzymujemy gęstość krytyczną dla ciśnienia jonizacji

$$\rho \sim \mu\Big(\frac{\chi}{Ze^2}\Big) \sim 10^3 g/cm^3 \tag{5.11}$$

Gęstość w gwiazdach typu Słońca jest trochę za mała. W praktyce na skutek połączonych efektów wysokich P i T wnętrze Słońca jest całkowicie zjonizowane.

5.1.4 Degeneracja

Ciśnienie degeneracji

Elektrony jako cząsteczki o spinie 1/2 są fermionami. Jeśli tak, to podlegają zasadzie Pauli'ego: jeden stan kwantowy może okupować nie więcej niż jeden elektron. Zasada nieoznaczoności Heisenberga określa minimalną objętość przestrzeni fazowej zajmowaną przez pojedynczy stan:

$$\Delta x^3 \Delta p^3 \geq h^3 \tag{5.12}$$

Średnia objętość na elektron wynosi μ_e/ρ gdzie μ_e jest średnią masą cząsteczek gazu na elektron. Makroskopową konsekwencją zasad Pauli'ego i Heisenberga dla gazu elektronów jest niemożność jednoczesnego zredukowania objętości i pędu poniżej wartości $(\mu_e/\rho)p_F^3 = h^3$. Minimalna konfiguracja odpowiadająca wszystkim niskim pędom stanów $|p_x| < p_F$ zostaje wypełniona i nie pozostaje żaden elektron z dodatkowym pędem. Maksymalna wartość pędu i odpowiadająca mu energia elektronu nazywane są pędem i energią Fermiego, p_F i E_F. Zarówno p_F jak i E_F zależą od gęstości upakowania elektronów, tj. od ρ. W normalnych warunkach laboratoryjnych i we wnętrzu Słońca elektrony są luźno rozłożone po różnych stanach, z wyraźną koncentracją w niskich stanach. Jednakże istnieją gwiazdy o budowie znacznie odmiennej od budowy Słońca i inne gwiazdy ciągu głównego, w których ze względu na ekstremalnie wysoką gęstość elektrony są zmuszane do okupowania prawie wszystkich stanów poniżej E_F. Mówimy, że w takiej sytuacji elektrony są zdegenerowane. Degeneracja wpływa na rozkład pędów elektronów, zatem powinno się uwzględnić ich przyczynek do ciśnienia.

W ?? co-moving układzie współrzędnych, wycentrowanym na najbardziej prawdopodobną pozycję elektronów, $0 =< x >=< p_x >$, zatem Δx i Δp_x są bliskie średnim wartościom absolutnym odległości pomiędzy elektronami d a ich pędami p_x. Dla gęstości upakowania elektronów $\mu_e/\rho \sim d^3 \sim \Delta x \searrow$ ich pędy muszą wzrastać

$$p_x - \sim \Delta p_x \sim h\Big(\frac{\rho}{\mu_e}\Big) \nearrow \tag{5.13}$$

W obliczeniach ciśnienia jako strumienia pędów należy rozróżniać przypadek klasyczny i relatywistyczny:

$$P \sim \frac{\rho}{\mu_e} P_x v_x \sim \frac{\rho}{\mu_e} p_x \begin{cases} \frac{p_x}{m_e} & \text{klasyczny} \\ c & \text{relatywistyczny} \end{cases} \tag{5.14}$$

Nie należy tu mylić masy na elektron μ_e i masy samego elektronu m_e. Wstawiając równanie (5.13) otrzymujemy

$$P \sim \begin{cases} \frac{h^2}{m_e}\Big(\frac{\rho}{\mu}\Big)^{5/3} & x \ll 1 \\ hc\Big(\frac{\rho}{\mu}\Big)^{4/3} & x \gg 1 \end{cases} \tag{5.15}$$

gdzie $x \equiv p_x/m_e c \sim (h/m_e c)(\rho/\mu)^{1/3} \sim \lambda_C/d$ a $\lambda_C = h/m_e c$ jest Comptonowską długością fali elektronu. Podstawiając równanie (5.13) otrzymujemy gęstość krytyczną dla przypadku klasycznego i relatywistycznego $\rho_{rel} \sim \mu/\lambda^3 \sim \mu(m_e c/h)^3 \sim 10^6 g/cm^3$. Ciśnienie degeneracji obliczone w taki sposób nie zależy od temperatury. Zależy ono od gęstości i odpowiedniego pędu, które na mocy zasady Pauli'ego i Heisenberga nigdy nie mogą być obniżone poniżej wartości Fermiego.

Zauważmy, że neutrony podobnie jak elektrony mają połówkowy spin, są zatem fermionami i podlegają degeneracji w podobny sposób co elektrony. Różnicą jest to, że dla neutronu μ_e i m_e przechodzą w masę μ_H neutronu. Inną różnicą jest rola odgrywana przez dodatkowe reakcje jądrowe, które w przypadku neutronów nadają przybliżony charakter naszym wzorom.

Częściowa degeneracja

Termiczna energia Fermiego cząstek może być rozpatrywana jako obowiązkowa i luksusowa(?) forma energii. Cząstki wymieniają energię kT z otoczeniem w takich procesach jak chłodzenie i grzanie. Dla dostatecznie wysokich gęstości energia ta staje się mała w porównaniu z energią Fermiego $kT < E_F = p_F^2 m_e$, a odpowiadające wpływy ruchów termicznych do ciśnienia także stają się podobnie małe. Odpowiadająca gęstość degeneracji może być może być obliczona z warunku

$$1 > \frac{kTm_e}{p_x^2} \sim \frac{kTm_e}{h^2}\left(\frac{\mu_e}{\rho}\right)^{2/3} \sim \frac{1}{500} \tag{5.16}$$

$$\rho_{deg} \sim \left(\frac{kTm_e}{h^2}\right)^{3/2} \mu_e \sim 10^2 g/cm^3 \tag{5.17}$$

Dla porównywalnych energii termicznych i Fermiego degeneracja staje się częściowa.

5.1.5 Inne efekty wysokiej gęstości

Krystalizacja
Ładunki elektryczne jonów CNO we wnętrzu gwiazdy są duże i mają tendencje do energicznego odpychania się. Jak tylko ich potencjał elektrostatyczny przekroczy energię termiczną

$$\frac{Z^2 e^2}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/3}} \sim 100kT \tag{5.18}$$

siły elektrostatyczne wpływają na rozkład jonów. W tych warunkach regularne ułożenie jonów maksymalnie zwiększa ich odległość minimalizując energię. W efekcie jony formują siatkę krystaliczną. Gęstość krytyczna dla tego procesu wynosi

$$\rho \sim \frac{100kT}{Z^2 e^2}\mu \geq 10^7 g/cm^3 \tag{5.19}$$

Gęstość taka nie występuje w żadnych gwiazdach ciągu głównego, natomiast jest osiągana w białych karłach i gwiazdach neutronowych.
Neutronizacja
Najprostsze reakcje jądrowe zamieniające bariony dotyczą protonów i neutronów

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{5.20}$$
$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \tag{5.21}$$
$$?? \rightarrow ?? \tag{5.22}$$

Z powodu zachowania ładunku i liczby leptonowej reakcje te angażują elektrony i neutrina. Pierwsza reakcja, rozpad β neutronu, występuje spontanicznie z uwalnianiem energii i połowicznym czasem rozpadu 18 minut. Zamiana protonu na neutron w procesie zwanym wychwytem elektronu pochłania energię i dlatego w normalnych warunkach nie występuje spontanicznie.

Sytuacja ta może zostać naruszona w warunkach skrajnej degeneracji zmuszając elektrony do kompletnego wypełnienia wszystkich stanów aż do stanu odpowiadającemu energii Fermiego E_F, że $E_F + m_e c^2 > 1.3MeV$, gdzie $m_e c^2 = 0.5MeV$ jest energią spoczynkową elektronu. Ponieważ połączona energia ??p i E_F elektronu przekracza energię neutronu, zatem zamiana protonów w neutrony może zachodzić spontanicznie. Wolne neutrony mogą przyłączać się do jąder ponieważ nie są odpychane elektrycznie $(Z, A) + n \rightarrow (Z, A+1)$. Ponadto atomy w jądrach atomowych chwytają elektrony. W efekcie większość materii zamieniana jest na supermasywne jądra o znacznym nadmiarze neutronów lub pojawia się neutronizacja. Wymagana krytyczna energia Fermiego przekracza energię spoczynkową, zatem ruchy elektronów są relatywistyczne. Odpowiadający tej energii pęd wynosi $p_F \sim 2m_e c$. Zasada nieoznaczoności Heisenberga określa minimalną objętość zajmowaną przez elektron w przestrzeni fazowej: $(\mu/\rho)(2m_e c)^3 > h^3$. Rozwiązując otrzymamy krytyczną gęstość wystąpienia neutronizacji

$$\rho \sim 10^7 g/cm^3 \tag{5.23}$$

Opowiadające jej odległości elektronów wynoszą $d \sim (\mu/\rho)^{1/3} \sim \lambda_C/2$ gdzie $\lambda_C = h/m_e c$ jest Comptonowską długością fali. Dla jeszcze wyższych gęstości $\rho \sim 10^{11} g/cm^3$ nadmiar neutronów staje się tak drastyczny, że jądra rozpadają się na ciecz neutronową. Wtedy neutronizacja jest kompletna.

5.2 Nieprzeźroczystość

W równaniach budowy gwiazdy równanie transportu promienistego jest impregnowane przybliżeniem dyfuzyjnym. W przybliżeniu tym wiele wzajemnych oddziaływań materii i promieniowania jest łączonych w jedną funkcję stanu nazywaną średnią nieprzezroczystością Rosselanda $\overline{\kappa}_R$, taką że

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{\kappa}_R}\frac{dB}{dT} &\equiv \int \frac{d\nu}{\kappa_\nu}\frac{dB_\nu}{dT} \qquad \text{gdzie} \\ \kappa_\nu &= \frac{1}{\rho}\sum_i \sigma_\nu^{(i)} n_i \end{aligned} \tag{5.24}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich atomach i jonach, a σ_ν jest atomowym przekrojem czynnym na rozpraszanie lub absorpcję. Rozkład Plancka i jego całka są oznaczone przez B_ν i B odpowiednio. Przyczynki procesów są z grubsza dzielone na rozpraszanie i absorpcję. W rozpraszaniu liczba atomów i ich energie są zachowane, zmieniają się jedynie kierunki. ?? In pure absorption photons are destroyed only to be emitted much later and in a possibly unrelated form. W przeciwieństwie do atmosfery gwiazdy, w jej wnętrzu wkłady rozpraszania i czystej absorpcji prostą się dodają. Czysta absorpcja (zwana także fotoabsorpcją) powoduje zmianę energii elektronów kosztem pochłoniętych fotonów. Elektrony albo są związane w atomie, albo poruszają się swobodnie. W zależności od typu początkowych i końcowych stanów elektronów, fotoabsorpcja jest swobodno-swobodna, związano-swobodna lub związano-związana (s-s,z-s lub z-s). Zasada zachowania energii odpowiadająca tym trzem procesom ma postać

$$
\begin{aligned}
s-s \qquad h\nu &= \frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2} && (5.25)\\
z-s \qquad h\nu &= \chi_\infty + \frac{m_e v_2^2}{2} && (5.26)\\
z-z \qquad h\nu &= \chi_2 - \chi_1 && (5.27)\\
&?? && (5.28)
\end{aligned}
$$

gdzie $h\nu$ jest energią fotonu, v_1 i v_2 to początkowa i końcowa prędkość elektronu, χ_∞, χ_1 i χ_2 to energia jonizacji i energie elektron w początkowym i końcowym stanie związanym.

5.2.1 Rozpraszanie

Fala elektromagnetyczna przechodząca przez elektron działa na niego oscylującą siłą elektryczną, więc indukuje jego oscylacje. Ładunek oscylacyjny staje się źródłem fali kulistej. Jest to klasyczna fala opisująca rozpraszanie fotonów przez wolne elektrony. Ponieważ pierwotna i rozproszeniowa częstotliwość do siebie pasują, to energie przylatujących i rozproszonych fotonów wynoszą $h\nu$ (??). Klasyczna i kwantowa analiza prowadzi do takiego samego przekroju czynnego na rozpraszanie (jest to tzw. Thompsonowski przekrój czynny). Odpowiadająca nieprzezroczystość wynosi

$$\kappa_\nu = \frac{8\pi}{3}\frac{r_e^2}{\mu_e} \approx 0.2(1+X) \qquad (5.29)$$

gdzie r_e klasyczny promień elektronu spełnia $e^2/r_e = m_e c^2$. Rozproszeniowy przekrój czynny jest niezależny od ν. Efekt ten utrzymuje się gdy rozpraszanie jest nierelatywistyczne, tj. do $h\nu \ll m_e c^2$ co odpowiada temperaturze $T < 10^8 K$.

5.2.2 Absorpcja swobodno - swobodna

Absorpcja swobodno - swobodna może być rozpatrywana jako niesprężyste zderzenie fotonu i elektronu. W zderzeniach tych musi być zachowana energia i pęd. Na skutek wektorowego dodawania pędów fotonów i elektronów zależnych od ich orientacji, nie istnieją żadne jednoznaczne relacje pomiędzy całkowitym początkowym pędem i energią. Natomiast końcowa energia i pęd elektronu są powiązane w jednoznaczny sposób $E = p^2/2m_e$. Pokazuje to, że tak proste zderzenia niesprężyste mogą naruszać zasady zachowania pędu i energii. Absorpcja swobodno - swobodna może pojawiać się wyłącznie w obecności naładowanego trzeciego ciała takiego jak jon. Ze względu na dużą masę jony mogą absorbować znaczne ilości pędów bez pobierania znacznych energii. Zatem ich obecność umożliwia zachowanie pędów i zaniedbanie tego w przypadku energii, tak więc następuje prosta równowaga energetyczna (równanie (5.29)). Dla danej pary elektron - foton przekrój czynny na absorpcję wynosi $\sim Z^2\nu^{-3}$. Ponadto nieprzezroczystość jest proporcjonalna do liczby par elektron - foton, tj. do ρ^2 i do czasu ich krótkich spotkań $\tau \sim 1/v \sim T^{-1/2}$, tak więc nieprzezroczystość na jednostkę objętości, po raz pierwszy wyprowadzona przez Kramera, wynosi

$$K_\nu = Z^2\rho^2 T^{-1/2}\nu^{-3} \tag{5.30}$$

Aby otrzymać średnią nieprzezroczystość Rosselanda powinniśmy zastąpić ν wartością ν_{max} z rozkładu Plancka, gdzie zgodnie z prawem Viena $h\nu_{max} \sim kT$, tak więc

$$\overline{\kappa}_{s-s} = 3.8 \cdot 10^{22}(1+X)(X+Y+B)\rho T^{-7/2}\nu^{-3} \tag{5.31}$$

gdzie $B = \sum_{i>2} X_i Z_i^2/A_i$, natomiast czynniki w nawiasach stanowią wpływ elektronu i jonu, odpowiednio. Rola ciężkich jonów z grupy CNO staje się widoczna z zależności nieprzezroczystości od ich ładunku Z^2.

5.2.3 Absorpcja związano - swobodna

Absorpcja związano - swobodna jest ograniczona w taki sposób, że pochłaniane fotonu muszą mieć energię co najmniej wystarczającą do jonizacji atomu, tj. $K_\nu = 0$ dla $h\nu < \chi$ lub $\nu < \nu_0 = \chi/h$. Dla częstości powyżej progu jonizacji ν_0 przekrój czynny jest proporcjonalny do ν^{-3}, co przypomina klasyczny rezultat dla swobodnych elektronów

$$\sigma_\nu \sim \begin{cases} 0 & \nu < \nu_0 \\ \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-3} & \nu > \nu_0 \end{cases} \tag{5.32}$$

Istnieją pewne kwantowe korekty, zwane czynnikami Gaunta, ale ich uwzględnienie nie zmienia zbytnio rezultatów klasycznych.

Ze względu na dużą zawartość ułamkową wodoru, dla fotoabsorpcji związano - swobodnej dominuje jego wpływ. W pośrednich temperaturach efektem tego jest jonizacja neutralnego wodoru. Dla temperatur tak niskich jak

$T \sim 3000 - 50000K$ wodór w gwiazdach ma postać ujemnego jonu H^- (proton z dwoma elektronami). Jego energia jonizacji jest tak niska jak $\sim 1eV$, zatem w tych warunkach dominuje absorpcja niskoenergetycznych fotonów termicznych.

W jeszcze niższych temperaturach tworzą się proste cząsteczki np. tlenki najpowszechniejszych pierwiastków. W warunkach tych obliczanie składu i nieprzezroczystości staje się wyjątkowo trudne.

5.2.4 Absorpcja związano - związana

Przejścia związano - związane odpowiadają przeskokom elektronów wewnątrz atomów, przyczyniając się do absorpcji tylko w dyskretnych wartościach odpowiadających różnicy energii między poszczególnymi stanami. W ten sposób powstają linie widmowe. Linie widmowe wodoru i helu, zdecydowanie najpowszechniejszych pierwiastków, są nieliczne i luźno rozłożone. Z tych powodów przy obliczaniu modeli gwiazd były one pomijane przez dziesiątki lat na korzyść prostych formuł typu Kramera dla absorpcji s-s i z-s. Dopiero wysiłki dwóch wielkich grup fizyków atomowych, przyczyniły się do przedstawienia w 1990 roku realistycznej tabeli nieprzezroczystości z-z. Były to ogromne przedsięwzięcia wymagające obliczeń dla dziesiątek pierwiastków, setek jonów i milionów linii widmowych.

Rezultaty obydwu grup są spójne i raczej dla astrofizyków zaskakujące. Wskazują one na fakt, że główną przyczyną nieprzezroczystości w gwiazdach są miliony linii metali, szczególnie z grupy żelazowców (Fe,Co, Ni). Obliczenia te pokazują, że wcześniejsze nieprzezroczystości różniły się od prawdziwych o czynnik większy niż 5. Mimo że obliczenia te nie obalają starszych wyników jakościowych teorii budowy i ewolucji gwiazdy, wyraźnie poprawiono zgodność wyników ilościowych z obserwacjami. W szczególności dynamiczne określenie masy gwiazdy w układach podwójnych i z ich czasu pulsacji nie różnią się już o czynnik 2. W efekcie nieprzezroczystości Kramera nie uważa się już za dobre przybliżenie. W każdym razie formuły typu $\overline{\kappa} \sim \rho^{1/2}T^{-5/2}$ są lepszymi przybliżeniami nieprzezroczystości.

5.3 Produkcja energii

5.3.1 Słoneczne źródła energii

Wiek Słońca

Datowanie jądrowe radioaktywnych izotopów wyznacza wiek Słońca $\tau_{\odot}$ na wartość w przedziale $4 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^9 lat$. Dolna granica pochodzi z zawartości litu w najstarszych złożach uranu. Pogląd ten bazuje na budzących zaufanie założeniach, że Ziemia i jej najstarsze skały nie utworzyły się wcześniej niż Słońce. Jądra uranu rozpadają się w łańcuchu reakcji,dając ostatecznie lit, tak więc starszy wiek oznacza więcej uranu zamienionego w lit. W stałych skałach ani uran ani lit nie ulegają przemieszczaniu, zatem stosunek ich zawartości umożliwia określenie wieku.

Górny limit pochodzi z ułamkowej zawartości izotopów ^{235}U i ^{238}U. Oba izotopy są radioaktywne i ulegają rozpadowi, jednakże ich czasy połowicznego rozpadu są różne. Zatem stosunek ich zawartości zmienia się w czasie. Wszystkie jądra cięższe niż Fe, włączając w to jądra uranu, zostały wyprodukowane we wnętrzu gwiazdy z lżejszych jąder przez wychwycenie swobodnych neutronów. Aby utrzymać równowagę względnej zawartości protonów i neutronów, niektóre neutrony są zamieniane na protony. W rezultacie wiatru słonecznego i wybuchów supernowych jądra te opuszczają wnętrza gwiazd i zasilają materię międzygwiazdową. Zjawisko takie musiało mieć miejsce przed kondensacją chmury materii międzygwiazdowej, z której utworzyło się Słońce i planety. W każdym razie, eksperymentalne pomiary przekrojów czynnych na pochwycenie neutronów umożliwiły przewidzenie tempa powstawania izotopów ^{235}U i ^{238}U spowodowane napromieniowywaniem przez swobodne neutrony. Porównując pierwotny stosunek z obserwowanym obecnie udało się ustalić wiek, kiedy nie było jeszcze Słońca. W czasie swego życia Słońca wyemituje $E = \tau_\odot L_\odot$ energii lub inaczej mówiąc utraci $E/M_\odot c^2 = \tau_\odot L_\odot / M_\odot c^2 \sim 0.00004$ swej masy spoczynkowej.

Alternatywne źródła energii słonecznej

Dyskusja kilku alternatywnych źródeł energii wyraźnie ujawnia trudności z „zaopatrzeniem" gwiazd w wystarczającą ilość energii. Rozważmy reakcje chemiczne. Wśród nich jedną z najefektywniejszych reakcji jest synteza wody przez utlenianie wodoru: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$. Synteza każdej cząsteczki o masie 18 μ_H dostarcza $3eV$ energii, tj. 10^{-10} energii masy spoczynkowej. Jest to dużo za mało, by wystarczyło na cały czas życia Słońca.

Na mocy teorii o wiriale, całkowita energia gwiazdy jest rzędu jej energii termicznej, a obie są rzędu GM^2/R. Energia grawitacyjna Słońca stanowi tylko ułamek $GM^2/RMc^2 \sim GM_\odot/R_\odot c^2 \sim 10^{-6}$. I po raz kolejny energia ta jest niewystarczająca. Faktycznie przyjęliśmy teraz, że energia termiczna wystarcza na zaopatrzenie Słońca w energię jedynie na okres równy termicznej skali czasu $\tau_T \sim 10^7 lat$ (równanie (2.23)).

Mimo, że dla zwykłych gwiazd energia grawitacyjna nie jest wystarczająco wydajnym źródłem energii, jest ona niezwykle wydajna w przypadku bardzo gęstych obiektów takich jak białe karły, gwiazdy neutronowe czy czarne dziury. Energia grawitacyjna w horyzoncie wynosi Mc^2, jest to zatem źródło energii o 100% wydajności.

Energia wiązań jądrowych

Nie omówiliśmy jeszcze żadnego źródła energii mogącego dostarczyć odpowiednią jej ilość na cały okres życia gwiazdy. Zmusiło to fizyków do zwrócenia się ku jądrowym źródłom energii. Energia wiązania jądrowego może być obliczona z oszacowania deficytu masy jądra w porównaniu do sumy mas składników jądra, tj. protonów i neutronów:

$$f \equiv \frac{E_B}{A} = \frac{(A-Z)\mu_n + Z\mu_p - M_{A,Z}}{A} \tag{5.33}$$

Ogólne właściwości deficytu masy są dobrze opisany przez ?? drop model nukleonu rozwinięty przez kopenhaską szkołę fizyków. Podstawowe siły wiązania jądrowego działają na krótkim dystansie, tylko między sąsiednimi nukleonami i są niezależne od ładunku nukleonów. W lekkich jądrach duża część powierzchni nukleonów znajduje się na powierzchni jądra. W rezultacie energia wiązania i deficyt masy są małe. W masywnych jądrach większość nukleonów jest ze wszystkich stron otoczona innymi nukleonami, a energia wiązania przyjmuje stałą energię?? Te ciężkie jądra zawierają dużo protonów. Ich elektrostatyczna siła odpychająca posiada duży zasięg, zatem każdy proton odpycha wszystkie pozostałe. Te dwa przeciwne efekty nakładają się na siebie dając maksymalną energię wiązania na barion w jądrach ^{56}Fe. Na ten ogólny tren nakładają się pokaźne fluktuacje energii wiązania kolejnych jąder. Ich przyczyn nie tłumaczy ??drop model.

W efekcie syntezy dwóch lekkich jąder w jedno cięższe zwiększa się energia wiązania na nukleon. Skupmy się na syntezie jądra helu He^4 z 4 protonów:

$$\frac{E_N}{Mc^2} \equiv \frac{4\mu_p - \mu_{^4He}}{\mu_{^4He}} \sim 0.007 \tag{5.34}$$

Wydajność produkcji energii tych reakcji jest większa, niż energia niezbędna Słońcu i większości innym gwiazd. Faktycznie przy obliczaniu termicznej skali czasu założyliśmy, że słoneczne źródło energii nie wyczerpie się przez $10^{10} lat$. Dalsze reakcje, w efekcie których następuje zamiana ^4He w ^{56}Fe dostarczają jedynie $20\% E_N$. Ponieważ stabilne ciężkie jądra zawierają więcej neutronów niż protonów, więc synteza musi być połączona z reakcjami zamieniającymi protony na neutrony, np. wychwycenie elektronu lub emisja β^+ pozytonu. Te późniejsze reakcje wpływają na ładunek jądra, ale nie na liczbę nukleonów.

Synteza ciężkich jąder

Dla $A > 56$ synteza nie dostarcza już energii i nie pojawia się spontanicznie. Ciężkie jądra powstają w wyniku przyłączania kolejnych swobodnych neutronów. Niewielkie ilości swobodnych neutronów są produkowane w typowych gwiazdach jako produkt uboczny bardziej egzotycznych reakcji wiążących protony w hel. Brak ładunku umożliwia tym neutronom łatwe przyłączanie się do ciężkich jąder. Z tych samych powodów co wcześniej, do zachowania stałego tempa zamiany protonów na neutrony, wychwyt neutronów musi być poprzedzony rozpadem β^-. Rozpad β^- pojawia się w czasie krótkim w porównaniu do prawdopodobnego czasu wychwytu neutronu. Zatem te tak zwane wolne procesy lub s-procesy w każdym etapie zwiększają liczbę nukleonów A o jeden. Po ustaleniu równowagi produkowana jest taka sama liczba jąder na każdy etap w jednostce czasu, ?? do końca zdania. Stałe tempo produkcji oznacza $\sigma_i n_i = const$, gdzie σ_i i n_i jest przekrojem czynnym na i-tą reakcję i gęstość pierwotnych jąder. Prawdziwość s-procesów została potwierdzona przez obserwacje: liczebność większości jąder jest odwrotnie proporcjonalna do σ_i.

Istnieją także jądra o masie A, dla których nie ma stabilnych jąder o masie $A-1$. Jądra takie nie mogą być produkowane w s-procesach. Ich pochodzenie stało się jasne dopiero wtedy, gdy uświadomiono sobie, że w czasie wybuchu supernowej w ciągu jednej sekundy powstaje duża liczba neutronów. Neutrony te mają dużą szansę na przyłączenie się do niestabilnych jąder, zanim ulegną one rozpadowi. Pochwycenie jednego lub kilku neutronów prowadzi do powstania stabilnego jądra, lecz wcześniej powstaje kilka jąder niestabilnych. Proces ten nazywany jest szybkim lub r-procesem.

5.3.2 Tempo reakcji jądrowych

Tunelowanie

Mimo że reakcje jądrowe dostarczają ogromnych ilości energii, nie występują w normalnych warunkach. Dzieje się tak, bo jądra odpychają się nawzajem na dużych odległościach dużymi siłami elektrostatycznymi. Dla ładunków $+Z_1e$ i $+Z_2e$ i typowych promieni jąder $r \sim 10^{-13}A^{1/3}cm$ odpowiadająca bariera potencjału Coulombowskiego wynosi $E_c \sim Z_1Z_2e^2/r \sim Z_1Z_2MeV$. Bariera ta musi być porównana z typowymi energiami termicznymi we wnętrzu gwiazdy $kT \sim 1keV$ dla $T \sim 10^7K$. Na mocy rozkładu Boltzmanna ułamek atomów, które mogą osiągnąć energię tak wysoką jak E_C wynosi $e^{-E_C/kT} \sim e^{-1000} \sim e^{-430}$. Szansa na to by jeden atom na całą Galaktykę osiągnął taką energię jest znikomo mała, nie mówiąc już o atomach z jednej gwiazdy. Gdyby nie zjawisko tunelowania, to we wnętrzu gwiazdy nie zachodziłyby reakcje jądrowe.

W świecie cząsteczek energia jest zachowywana tylko na wystarczająco długich interwałach czasu. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga w bardzo krótkich interwałach czasu Δt, energia cząstki może być określona z dokładnością nie większą niż $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Jest zatem całkiem prawdopodobne, że na krótki okres czasu $\Delta t \sim \hbar/E_c \sim \hbar r/e^2$ energia cząstki będzie wyższa niż bariera Coulombowska $E_c \sim e^2/r$. Jednak nawet w tak krótkich okresach energia może fluktuować w górę i w dół, więc prawdopodobieństwo $P_{\Delta t}$, że cząstka będzie miało energię większą niż E_c wynosi

$P_{\Delta t} < 1/2 = e^{-0.69}$. W rzeczywistości wynosi ono $P_{\Delta t} = e^{-2\pi}$.

Weźmy typową szerokość bariery wynoszącą r lub coś koło tego. Typowy czas przelotu cząstki przez barierę z prędkością v wynosi $\Delta T \sim r/v$. Jest to w porównaniu z Δt czas długi. Zatem pomyślny przelot przez barierę Coulombowską wymaga wielu kolejnych fluktuacji powyżej wartości bariery. Ich ilość wynosi $k \sim \Delta T/\Delta t \sim e^2/\hbar v$. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$P_{\Delta T} \sim (P_{\Delta t})^k \sim e^{\frac{-2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}} \tag{5.35}$$

Przekrój czynny na reakcję jest ponadto proporcjonalny do prawdopodobieństwa penetracji jądra po przejściu przez barierę $S(E)/E$, gdzie $E = mv^2/2$ i $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ jest tak zwaną masą zredukowaną:

$$\begin{aligned} \sigma &= S(E)E^{-1}e^{-\frac{\overline{\eta}}{E^{1/2}}} \qquad \text{gdzie} \\ \overline{\eta} &= 2\pi \frac{m^{1/2}}{2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Szczególny wybór kształtu funkcji $S(E)$ ułatwia interpolację i ekstrapolację eksperymentalnych przekrojów czynnych.

Tempo reakcji

Tempo reakcji na jednostkę czasu w jednostce objętości pomiędzy cząstkami typu i i j o gęstościach n_i i n_j jest proporcjonalne do całkowitej liczby par cząstek i objętości cylindra o przekroju czynnym σ i długości v zagarnianego przez każdą cząstkę w trakcie ruchu z prędkością v.

$$r_{ij} = \frac{1}{1+\delta_{ij}} n_i n_j < \sigma v > \tag{5.37}$$

Czynnik $1/(1+\delta_{ij})$ przyjmuje wartość 1 dla cząstek różnych typów i wartość 1/2 dla cząstek tych samych typów. Średnia zagarniana objętość jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned} < \sigma v > &= \int \sigma(E) v f(E) dE \qquad \text{gdzie} \\ f(E)dE &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE \end{aligned}$$

jest rozkładem Maxwella energii cząstek. Wstawiając przekrój czynny i rozkład Maxwella otrzymujemy

$$< \sigma v >= \frac{1}{m^{1/2}(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{E}{kT} - \frac{\overline{\eta}}{E^{1/2}}} dE \tag{5.38}$$

Całkowanie $< \sigma v >$ wymaga wolnych zmian funkcji $S(E)$ i szybkich zmian funkcji ekspotencjalnej z ostrym maksimum energii E_0. Wartości takich całek przybliża się metodą największego spadku(??). W metodzie tej ostre maksimum przybliża się eksponentem gausowskim wycentrowanym w punkcie E_0. Ostre maksimum znajduje się ze zróżniczkowania eksponentu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dE}\left(-\frac{E}{kT} - \frac{\overline{\eta}}{E^{1/2}} \right) \qquad \text{zatem} \\ E_0 &= \left(\frac{1}{2} \overline{\eta} kT \right)^{2/3} \end{aligned}$$

Do obliczenia szerokości funkcji gausowskiej wymagana jest druga pochodna eksponentu. Wyliczenie odpowiedniej całki gausowskiej daje

$$\begin{aligned} < \sigma v > &= \frac{S(E_0)}{m^{1/2}(kT)^{1/2}} \tau^{1/2} e^{-\tau} \sim \tau^2 e^{-\tau} \qquad \text{gdzie} \\ \tau &= 3 \frac{E_0}{kT} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Definiując $W \equiv Z_1^2 Z_2^2 A \equiv Z_1^2 Z_2^2 A_1 A_2 / (A_1 + A_2)$ otrzymujemy

$$\tau \approx 20 W^{1/3} T_7^{-1/3}.$$

Nasze wyprowadzenie pokazuje, że tempa reakcji są eksponencjalnymi funkcjami temperatury. Jednak w pewnych zastosowaniach tempa reakcji są przybliżane potęgową funkcją temperatury. Wykładnik funkcji potęgowej może być wyliczony w następujący sposób:

$$\begin{aligned} n &= \frac{d \ln < \sigma v >}{d \ln T} \approx -\frac{2}{3} - \frac{d\tau}{d \ln T} \approx -\frac{2}{3} - \tau \frac{d \ln \tau}{d \ln T} \qquad \text{gdzie} \\ \epsilon &\sim \epsilon \rho T^n \end{aligned} \tag{5.40}$$

Spalanie wodoru w hel następuje w dwóch alternatywnych łańcuchach reakcji. Są to tak zwany cykl p - p i cykl CNO. W związku z tym pojawiają się dwa przybliżone wyrażenia na wykładnik tempa reakcji

$$n \approx -\frac{2}{3} - \frac{\tau}{3} \approx \begin{cases} 6 & \text{dla} \quad p - p \\ 20 & \quad\quad CNO \end{cases} \tag{5.41}$$

dla $T = 10^7 K = T_7$.

5.3.3 Cykle reakcji

Zdecydowanie najważniejszymi reakcjami jądrowymi w gwiazdach jest spalanie wodoru w hel. Odbywa się to w dwóch różnych cyklach: p - p i CNO.

Cykl p - p

Cykl rozpoczyna się od jednego protonu. Następnie następuje synteza dwóch protonów, a zaraz potem rozpad β^+ i synteza z kolejnym protonem. W efekcie tego łańcucha reakcji dochodzi do utworzenia jądra ${}^3He$. Synteza dwóch jąder ${}^3He$ daje końcowy produkt czyli jądro ${}^4He$. Do zapamiętania łańcucha reakcji może być pomocna poniższa uproszczona notacja

$$p \quad p\beta p \quad 2^3He \tag{5.42}$$

Ze względu na konieczność zachowania ładunku e^+, liczby leptonów e^+ i ν i liczby nukleonów $2p$ następuje produkcja innych cząstek. W szczególności, leptony są lekkimi cząstkami, takimi jak elektrony czy neutrina. Cząstki te oddziaływują z leptonami jedynie przez słabe siły jądrowe. Natura słabych sił jądrowych jest inna niż oddziaływań silnych, elektromagnetycznych i grawitacyjnych. Te cztery siły stanowią kompletny zbiór oddziaływań występujących w fizyce. Każdy lepton posiada całkowitą liczbę leptonową $+1$. Ich antycząstki, pozytony e^+ i antyneutrina ν^-, posiadają liczbę leptonową równą -1, natomiast protony i neutrony posiadają liczbę leptonową równą 0. Aby zachodziło zachowanie leptonów, ich całkowita liczba po obu stronach równania musi być równa. Oprócz opisanego łańcucha reakcji, oznaczanego symbolem $pp1$, są jeszcze dwa inne łańcuchy $pp2$ i $pp3$. Odgrywają one mniejszą rolę w produkcji energii i stanowią nie więcej niż 31 i 0.1% wszystkich reakcji p - p. Znaczenie procesu $pp3$ wynika z faktu, że w jego efekcie powstają neutrina, które są łatwo wykrywalne i mogą służyć do badania reakcji termojądrowych zachodzących we wnętrzu Słońca.

Zauważmy, że nie istnieją stabilne jądra ${}^2He$. Zatem żeby wyprodukować stabilny twór - jądro deuteru ${}^2H$, zarówno synteza p - p jak i rozpad β^+ musi występować spontanicznie. Oznacza to, że aby nie doszło do ponownego oddzielenia, w czasie krótkich kolizji dwóch protonów muszą pojawiać się oddziaływania słabe. Prawdopodobieństwo takiego zajścia jest bardzo małe i występują one jedynie ze względu na dużą gęstość wodoru we wnętrzu gwiazdy.

Cykl CNO

W cyklu CNO jądra ${}^{12}C$ pełnią rolę „warsztatu pracy”, w którym w trakcie kilku reakcji dochodzi do powstania jąder ${}^4He$. Powyższy ciąg reakcji zapisany w uproszczony sposób ma postać

$$12^C \qquad p\beta pp\beta p \qquad 2^3He \tag{5.43}$$

W obu cyklach (p - p i CNO) pośrednie jądra doświadczają nadwyżki protonów, zatem wszystkie rozpady β są rozpadami β^+ (emisja pozytonu). Ostatnią reakcją cyklu CNO jest oddzielenie od jądra ^{12}C jądra ^4He. W przeciwieństwie do cyklu p - p wszystkie reakcje cyklu CNO wymagają jedynie obecności oddziaływań silnych.

Względna rola cyklów p - p i CNO

W wysokich temperaturach dominuje cykl CNO. Wtedy energie zderzających się cząstek są duże i bariera Coulombowska nie stanowi dużej przeszkody. Przekroje czynne na wszystkie reakcje cyklu są duże, dla wszystkich wymaga się tylko występowania między nukleonami oddziaływań silnych. W cyklu CNO leptony są produkowane tylko w rozpadzie β. W takich warunkach cykl p - p ciągle jest możliwy, ale ze względu na niskie prawdopodobieństwo pierwszej słabej reakcji występuje on dużo rzadziej od cyklu CNO. W niskich temperaturach bariera Coulombowska staje się znaczącą przeszkodą dla procesu tunelowania, ponieważ przekrój czynny spada ekspotencjalnie. W tych warunkach duże ładunki jąder biorących udział w cyklu CNO stają się dla tunelowania znaczącą przeszkodą i efektywność cyklu dramatycznie spada. Dla niskich temperatur pozostają reakcje cyklu p - p. Mimo że jest niewiele pierwszych słabych reakcji, bariera Coulombowska dla lekkich jąder stanowi mniejszy problem.

Późniejsze spalanie termojądrowe

Spalanie wodoru stanowi podstawowe źródło energii gwiazd jednorodnych, tj. pozostających na ciągu głównym. Pozostałe reakcje spalania zaczynają odgrywać jakąkolwiek rolę dopiero po wyczerpaniu się wodoru we wnętrzu gwiazdy. Hel spala się w wyższych temperaturach niż wodór w tak zwanych reakcjach 3α: $3^4He \to^{12} C$. Bezpośrednie kolizje cząstek 3α są bardzo mało prawdopodobne nawet w gęstych jądrach gwiazd, dlatego reakcja 3α przebiega w dwóch etapach. Najpierw 2 cząstki α tworzą niestabilne jądro ^8Be. Normalnie jądra ^8Be rozpadają się po chwili na 2 jądra ^4He, dlatego też dokończenie cyklu 3α wymaga dołączenia kolejnego jądra ^4He w czasie krótkiego życia jądra ^8Be:

$$\begin{aligned} {}^4He +^4 He &\leftrightarrow {}^8Be & -0.095MeV \\ {}^8Be &\to {}^{12}C + 2\gamma & +7.6MeV \end{aligned} \tag{5.44}$$

W następnych reakcjach wymagających cząstki α następuje zamiana

$$^{12}C \to ^{16} O \to ^{20} Ne \cdots \tag{5.45}$$

W jeszcze wyższy temperaturach dochodzi do spalania węgla

$$\begin{aligned} ^{12}C + ^{12} C &\to {}^{23}Na + p \\ &\to {}^{20}Ne + \alpha \end{aligned} \tag{5.46}$$

Reakcje produkujące wolne neutrony są znacznie ważniejsze dla s-procesów syntezy ciężkich jąder. Przykłady takich reakcji to

$$\begin{aligned} ^{13}C + ^{4} He &\to {}^{16}O + n \\ ^{22}Ne + ^{4} He &\to {}^{25}Mg + n \end{aligned} \tag{5.47}$$

5.3.4 Straty neutrinowe

Straty w powszechnych reakcjach

Dyskusja spalania wodoru pokazała, że oddziaływania słabe prowadzą w reakcjach jądrowych do produkcji neutrin i/lub antyneutrin. Oddziaływania neutrin z materią są tak słabe, że ogromna większość z nich opuszcza gwiazdę bez dalszego oddziaływania z materią gwiazdy. Razem z nimi ucieka część energii wytworzonej w reakcjach termojądrowych.

Procesy Urca

Istnieją pary reakcji jądrowych, które prowadzą do produkcji neutrin bez wpływu na skład chemiczny.

$$\begin{aligned} (Z, A) + e^- &\to (Z - 1, A) + \nu \\ (Z - 1, A) &\to (Z, A) + e^- + \overline{\nu} \end{aligned} \tag{5.48}$$

Jedynym efektem tych reakcji jest strata energii unoszonej przez uciekające neutrina. Takie reakcje wymagają wysokich gęstości i przynajmniej częściowej degeneracji. Nazywane są procesami Urca. Należą di nich na przykład reakcje angażujące ^{35}Cl lub ^{35}S. Procesy Urca są odpowiedzialne za chłodzenie jąder wyewoluowanych gwiazd. Analogiczne do nich reakcje angażujące neutrony i protony są odpowiedzialne za chłodzenie gwiazd neutronowych.

Rozdział 6

Budowa jednorodnych gwiazd

Gwiazdy powstają z chmur materii międzygwiazdowej. Materia międzygwiazdowa jest raczej dobrze wymieszana, więc początkowy skład chemiczny gwiazdy jest jednorodny. Na wykresie barwa - jasność diagramu HR jednorodne gwiazdy zbudowane z gazu doskonałego tworzą ciąg główny. Idealnie jednorodne gwiazdy nazywane są gwiazdami wieku zeru ciągu głównego (ZAMS). Ze względu na swój wiek Słońce i inne tego typu gwiazdy spaliły już w swoim wnętrzu kilka procent wodoru. Dopóki we wnętrzu gwiazd ciągu głównego spala się wodór, nie różnią się one zbytnio od gwiazd typu ZAMS.

6.1 Szacowanie parametrów

Zacznijmy od prostych oszacowań. W tym celu załóżmy stałą nieprzezroczystość, wykorzystajmy teorię o wiriale i zastąpmy pochodne w równaniu ciągłości i równaniu transportu promienistego stosunkami zmiennych. Tym sposobem uzyskujemy następujące równania

$$\begin{aligned} \kappa &= const \\ kT &\sim \frac{GM\mu}{R} \\ \rho &\sim \frac{M}{R^3} \\ L &\sim R^2T^3\frac{T}{R}\frac{1}{\rho\kappa} \end{aligned}$$

Podstawiając do ostatniego równania otrzymujemy

$$\underline{L} \sim R^2\frac{M^3}{R^3}\frac{M}{R^2}\frac{R^3}{M} \sim \underline{M^3} \tag{6.1}$$

Na szczęście wykładnik R ulega skróceniu i uzyskujemy rozwiązanie bez uwzględniania produkcji energii. Rozwiązanie to nie jest dość realistyczne ze względu na założenie stałości κ i przyjęciu, że w całej gwieździe występuje transport promienisty. Jednak gwałtowny wzrost mocy promieniowania wraz z masą jest z grubsza potwierdzany przez obserwacje. W rzeczywistości wykładnik jest bliższy 4.

6.1.1