1 Warunki równowagi hydrostatycznej

1.1 Równowaga sił w mechanice newtonowskiej

W standardowych modelach gwiazd bierze się pod uwagę gradienty ciśnienia, p i potencjału samograwitacji, Φ. W ciśnieniu uwzględnia się standardowo gaz i promieniowanie, a czasami też efekty turbulencji. Czasami też w warunku równowagi uwzględnia się siłę Lorentza, siłę odśrodkową i siłę przypływową ewentualnego towarzysza. Te dodatkowe siły liczone na jednostkę masy traktujemy jako dane wektorowe funkcje współrzędnych przestrzennych, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Zatem warunek równowagi sił na jednostkę objętości gwiazdy zapisujemy w postaci.

$$\boldsymbol{\nabla} p = \rho(-\boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{f}), \tag{1}$$

w którym ρ oznacza gęstość. Równanie Poissona,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2}$$

wiąże potencjał samograwitacji z gęstością. Wspomniane dodatkowe siły mają następujące postacie,

$$\boldsymbol{f} = \begin{cases} \frac{(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{4\pi\rho} & \text{siła Lorentza} \\ \Omega^2 s\boldsymbol{e}_s & \text{siła odśrodkowa} \\ -\boldsymbol{\nabla}\Phi_p & \text{siła przypływowa} \end{cases}, \tag{3}$$

gdzie $\boldsymbol{B}$ jest natężeniem pola magnetycznego, Ω jest prędkością kątową, s odległością od osi rotacji, $\boldsymbol{e}_s$ odpowiednim wektorem jednostkowym. Wzór na potencjał przypływowy, Φ_p podany będzie w rozdziale (1.5). Ciśnienie i potencjał spełniają następujące warunki brzegowe:

(i) Na powierzchni (S) $p = 0$.

(ii) Na zewnątrz S, Φ jest rozwiązaniem równania Laplace'a zmierzającym do zera przy oddalaniu od S do nieskończoności.

Jeśli mamy dane barotropowe równanie stanu, $p = p(\rho)$. Rozwiązania równań (1) i (2) dają pełny opis struktury gwiazdy.

1.2 Gwiazdy sferyczne

Jeżeli $\boldsymbol{f}$ znika lub ma tylko niezerową składową radialną, to gwiazda posiada symetrię sferyczną. Prosty dowód tego twierdzenia dla przypadku małej deformacji będzie podany w rozdziale (1.5). Przy zaniedbaniu $\boldsymbol{f}$ równanie (1) upraszcza się więc do

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \tag{4}$$

gdzie

$$g = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM_r}{r^2} \tag{5}$$

oznacza lokalne przyspieszenie grawitacyjne, a

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho \tilde{r}^2 d\tilde{r} \tag{6}$$

jest masą wewnątrz sfery o promieniu r. $M_R = M$, R jest promieniem gwiazdy, M jest masą. Całkowanie (2) prowadzi do

$$\Phi(r) = -\frac{GM_r}{r} - \begin{cases} \int_r^R 4\pi G\rho r dr & \text{dla} \quad r \le R \\ 0 \quad \text{dla} \quad r \ge R \end{cases}$$

Skąd łatwo dostajemy następujące wyrażenie na energię grawitacyjną gwiazdy, $\mathcal{W}$.

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int_0^M \Phi(r) dM_r = -G\int_0^M \frac{M_r}{r} dM_r \tag{7}$$

Przy konstruowaniu sferycznych modeli gwiazd najczęściej używa się masy M_r jako zmiennej niezależnej i dwa z *równań wewnętrznej budowy* zapisuje się w postaci

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \tag{8}$$

i

$$\frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}, \tag{9}$$

dla których warunkami brzegowymi są

$$r(0) = 0 \quad \text{i} \quad p(M) = 0. \tag{10}$$

Dla konstrukcji modelu potrzebne są dodatkowe warunki. W najprostszym przypadku będzie to zależność $p(\rho)$. Na ogół jednak, potrzebne są dodatkowe równania różniczkowe opisujące zachowanie energii. Jednak pewne wnioski dotyczące budowy gwiazd można otrzymać już z samych równań (9) i (10) , z ewentualnym użyciem równania stanu gazu doskonałego.

Twierdzenia do udowodnienia na ćwiczeniach

Twierdzenie 1.

Funkcja

$$\mathcal{F}(r) = p + \frac{GM_r^2}{8\pi r^4}$$

jest monotonicznie malejąca w całym przedziale $[0, R]$.

Twierdzenie 2 Jeżeli średnia gęstość wewnątrz sfery o promieniu r, $\bar{\rho}_r(r)$, jest funkcją nierosnącą, to zachodzi

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \bar{\rho}_r^{4/3} M_r^{2/3} \le p_c - p \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M_r^{2/3} \tag{11}$$

Twierdzenie 3: Dla każego $s < 4$ zachodzi

$$\mathcal{I}_s = G\int_0^M \frac{M_r dM_r}{r^s} = 4\pi(4-s)\int_0^R pr^{3-s}dr \tag{12}$$

.

Twierdzenia 1 i 2 można wykorzystać do oceny ciśnienia w centrum gwiazdy. *Proszę wykonać ocenę dla Słońca i porównać wynik z dokładną wartością modelową posługując się danymi liczbowymi podanymi w DODATKU.*
Z Twierdzenia 3 dla $s = 1$ dostajemy

$$\mathcal{I}_1 = -\mathcal{W} = 12\pi\int_0^R pr^2 dr \tag{13}$$

Związek ten zachodzi dla dowolnego równania stanu.

Dla gazu doskonałego, którego energia wewnętrzna jest w całości równa energii kinetycznej cząsteczek, mamy

$$u = \frac{3}{2}\frac{p}{\rho},$$

gdzie u jest energią wewnętrzną jednostki masy. Oznaczając przez $\mathcal{E}$ całkowitą energię gwiazdy, a $\mathcal{U}$ – jej całkowitą energię wewnętrzną, dostajemy z (13)

$$\mathcal{E} = \mathcal{W} + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\mathcal{W} \tag{14}$$

To równanie można wprost otrzymać z *Twierdzenia o wiriale.* Równanie (14) pozwala, na niezłą ocenę całkowitej energii gwiazdy, przy założeniu że $\rho(r)$ jest funkcją nierosnącą. Z tego założenia wynika

$$r(M_r) \leq R\left(\frac{M_r}{M}\right)^{1/3},$$

a następnie z równania (3) dostajemy

$$-2\mathcal{E} = -\mathcal{W} = G\int_0^M \frac{M_r dM_r}{r} \geq \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R} \tag{15}$$

Teraz skorzystamy z równania stanu dla całkowicie zjonizowanego gazu doskonałego dla oszacowania średniej temperatury gwiazdy. Równanie to zapisujemy w postaci

$$p = \frac{kT\rho}{\mu m}, \tag{16}$$

gdzie

$$\mu \approx \frac{1}{2X + 0.75Y + 0.5Z} \tag{17}$$

jest średnim ciężarem molekularnym gazu, X, Y i Z są (odpowiednio) względnymi masowymi obfitościami wodoru, helu i pierwiastków cięższych, a m jest jednostką masy atomowej.
Mamy też

$$u = \frac{3}{2}\frac{p}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu m} \tag{18}$$

Teraz korzystając z równań (13 – 18), łatwo znajdziemy

$$\bar{T} = \frac{\int T dM_r}{M} = -\frac{1}{3}\frac{\mu m \mathcal{W}}{kM} \geq \frac{1}{5}\frac{\mu GmM}{kR} \approx 3\frac{M}{M_\odot}\frac{R_\odot}{R}10^6\mathrm{K} \tag{19}$$

Dla wyliczenia czynnika liczbowego przyjęto $X = 0.7$, $Z = 0.02$.

1.3 Relatywistyczny warunek równowagi

Podaję wzór bez wyprowadzenia, które można znaleźć n.p. w książce M. Demiańskiego *Astrofizyka Relatywistyczna.*

$$\frac{dp}{dr}\left(1 - 2\frac{GM_r}{c^2 r}\right) = -\frac{GM_r\rho}{r^2}(1+q)(1+Uq) \tag{20}$$

gdzie q jest kwadratem stosunku izotermicznej prędkości dźwięku do prędkości światła, a

$$U = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r} = 3\frac{\rho}{\bar{\rho}_r}$$

.
W przybliżeniu liniowym w c^{-2} (postnewtonowskim) mamy

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}\left[1 + 2\frac{GM_r}{c^2 r} + q(U+1)\right]. \tag{21}$$

Pierwsza poprawka relatywistyczna (efekty OTW) jest równa $2\times$ *grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni.* Na powierzchni Słońca wynosi ona 4.2×10^{-6}, a największa wartość osiąga dla $r \approx R/3$, gdzie jest mniej więcej dwukrotnie wyższa. Druga poprawka (efekty STW), jest największa w centrum gdzie wynosi 7×10^{-6}. Dla białych karłów (przy $M = M_\odot$ mamy $R \approx 8 \times 10^{-3} R_\odot$) pierwsza poprawka jest rzędu 10^{-3}, a dla gwiazd neutronomych ($R \approx 2 \times 10^{-5} R_\odot$)jest rzędu 10^{-1}, i przybliżenie postnewtonowskie jest niewystarczające.

1.4 Warunek równowagi dla rotujących gwiazd

W warunku równowagi (równanie 1) uwzględnić należy siłę odśrodkową. We współrzędnych cylidrycznych (s, ϕ, z) z osią rotacji równoległą do osią z, mamy

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{cen}} = \Omega^2 s\mathbf{e}_s, \tag{22}$$

a we współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ)

$$\boldsymbol{f}_{\rm cen} = \Omega^2 r \sin\theta(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta). \tag{23}$$

Po zastosowaniu operatora rot we współrzędnych cylindrycznych dostajemy

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}_{\rm cen} = -\frac{\partial\Omega^2}{\partial z} s\mathbf{e}_\phi.$$

Stąd wynika, że siła odśrodkowa jest potencjalna wtedy (i tylko wtedy) gdy Ω nie zależy od z. Mówimy wtedy o *rotacji cylindrycznej.* W szczególnym przypadku, gdy Ω jest stała we wnętrzu gwiazdy to mówimy o *rotacji jednorodnej.*

Potencjał siły odśrodkowej dany jest wzorem

$$\Phi_{\rm cen} = -\int ds \Omega^2 s. \tag{24}$$

W przypadku rotacji cylindrycznej warunek równowagi hydrostatycznej można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\nabla} p = -\rho \boldsymbol{\nabla} \Phi_T, \tag{25}$$

gdzie

$$\Phi_T = \Phi + \Phi_{\rm cen} \tag{26}$$

jest całkowitym potencjałem mechanicznym.

Zadanie : Proszę dowieść, że rotacja gwiazd z barotropowym równaniem stanu musi być cylindryczna.

Potencjał grawitacyjny, Φ, spełnia równanie Poissona (rów. 2). Formalnym rozwiązaniem równania Poissona jest

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int d^3\mathbf{x}\prime \frac{\rho}{|\mathbf{x}\prime - \mathbf{x}|}. \tag{27}$$

Z równania (25) wynika, że jeżeli wszystkie siły działające na gwiazdę są potencjalne, to zarówno ciśnienie jak i gęstość są stałe na powierzchniach stałego potencjału całkowitego. Dowód dla ciśnienia jest oczywisty ($\boldsymbol{\nabla} p$ jest równoległy do $\boldsymbol{\nabla}\Phi_T$). Jeżeli zastosujemy operator rot do równania (25), to dostaniemy

$$\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}\Phi_T = 0,$$

skąd wynika, że gradient gęstości jest równoległy do pozostałych.

Po skorzystaniu z równania stanu mamy dalej idący wniosek, że w obszarach jednorodnych chemicznie wszystkie wielkości skalarne są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych. Pozwala to na sprowadzenie równań wewnętrznej budowy do problemu jednowymiarowego. Dwuwymiarową geometrię wyznaczają równania (24) i (27).

W przypadku rotacji jednorodnej niezłe przybliżenie dla Φ_T w warstwach zewnętrznych daje *model Roche'a*, w którym zaniedbuje się odkształcenie rozkładu materii od symetrii i wkład masy leżącej powyżej sfery o promieniu r. Mamy wtedy

$$\Phi_T = -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta. \quad (28)$$

Wynika stąd następujące wyrażenie na stosunek promienia równikowego, R_e, do biegunowego, R_p.

$$\frac{R_e}{R_p} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_{\max}}\right)^2. \quad (29)$$

Maksymalną prędkość rotacji, $\Omega_{\max}$ wyznacza warunek znikania przyspieszenia na równiku

$$\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R_e^3}} \quad (30)$$

Zadanie: Proszę pokazać, że średni promień gwiazdy rotującej z a $\Omega = \Omega_{\max}$ wynosi około

$$\bar{R} \approx 0.8\left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{1/3}.$$

Przyjmujemy, że średni promień gwiazdy jest taki sam co dla gwiazdy nie nierotującej o tej samej masie (na prawdę jest on o blisko 10% większy).

Okres rotacji na równiku Słońca wynosi ok. 25 dni, a na dużych szerokościach heliograficznych ponad 30 dni. Rotacyjne spłaszczenie wynosi

$$\left(\frac{R_e - R_p}{R_p}\right) \approx 3.5 \times 10^{-5}. \quad (31)$$

Dla najszybciej rotujących gwiazd ciągu głównego (gwiazdy typu Be) $\Omega/\Omega_{\max} \approx 0.5$.

Przeważnie wielkość

$$\epsilon_{\rm rot} = (\frac{\Omega}{\Omega_{\max}})^2 \quad (32)$$

można traktować jako mały parametr i strukturę rotującej gwiazdy opisywać jako liniowe zaburzenie modelu sferycznie-symetrycznego.

1.5 Małe odchylenia od symetrii sferycznej

Niech wielkości primowane oznaczją małe odchylenia wartości parametrów fizycznych od wartości jakie miały przy zaniedbaniu $\boldsymbol{f}$ w danym miejscu przestrzeni. Takie zaburzenia nazywamy *eulerowskimi.* Takie zaburzenia komutują z operatorami różniczkowania. Mamy wię w szczególności,

$$(\boldsymbol{\nabla}\rho)' = \boldsymbol{\nabla}\rho' \qquad (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f})' = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f}'.$$

Do wyliczania liniowych zaburzeń złożonych wyrażeń stosuje się *regułę Leibnitza.* Mamy więc $(ab)' = a'b + ab'$.

Wykonując liniowe zaburzenie równania (1) wokół rozwiązania tego równania z $\boldsymbol{f} \equiv 0$ dostajemy

$$\boldsymbol{\nabla} p' + \rho' g \mathbf{e}_r + \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi' = \rho \mathbf{f}_{\rm cen}, \tag{33}$$

Do opisu małych osiowo-symetrycznych odchyleń od symetrii sferycznej używa się wielomianów Legendre'a, $P_j(\cos\theta)$, które dane są wzorami

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = \mu, \qquad P_2 = \frac{3\mu^2 - 1}{2},$$

$$P_{\ell+1} = \frac{1}{\ell+1}[(2\ell+1)\mu P_\ell - \ell P_{\ell-1}],$$

gdzie $\mu = \cos\theta$.

Wszystkie zaburzone funkcje skalarne przedstawiamy w formie szeregów tych funkcji. Na przykład zaburzenie ciśnienia dane jest przez

$$p'(r,\theta) = \sum_{j=0} \tilde{p}_j(r) P_j(\cos\theta). \tag{34}$$

Zależność kątową siły odśrodkowej zawsze można wyrazić przy pomocy P_j. Tu skoncentrujemy uwagę na przypadku rotacji jednorodnej, ale istota wywodu pozostaje ważna dla dowolnego prawa rotacji $\Omega = \Omega(r,\theta)$, a także dla innych sił powodujących odkształcenie gwiazdy.

Siłę odśrodkową w przypadku jednorodnej rotacji przedstawiamy w postaci

$$\mathbf{f}_{\rm cen} = \frac{\Omega^2}{3}\{(2r\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\nabla}[r^2 P_2(\cos\theta)]\}. \tag{35}$$

Podstawiając do równania (33) to wyrażenie, szereg (34) na p' i podobne dla ρ' i Φ', a następnie przyrównując do zera współczynniki przy kolejnych wielomianach P_j dostajemy.

$$\frac{d\tilde{p}_0}{dr} + \tilde{\rho}_0 \frac{d\Phi}{dr} + \rho \frac{d\tilde{\Phi}_0}{dr} = \frac{2r\rho\Omega^2}{3} \qquad \text{dla } j = 0, \tag{36}$$

oraz

$$\frac{d\tilde{p}_j}{dr} + \tilde{\rho}_j \frac{d\Phi}{dr} + \rho \frac{d\tilde{\Phi}_j}{dr} = -\delta_{j,2} \frac{2r\rho\Omega^2}{3} \tag{37}$$

i

$$\tilde{p}_j = -\rho\left(\tilde{\Phi}_j + \delta_{j,2}\frac{\Omega^2 r^2}{3}\right) \qquad \text{dla } j > 0 \tag{38}$$

Po podstawieniu szeregów (34) do równania Poissona (2), które jest liniowe, dostajemy

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\tilde{\Phi}_j}{dr}\right) - j(j+1)\tilde{\Phi}_j - 4\pi G r^2 \tilde{\rho}_j = 0. \tag{39}$$

Skorzystaliśmy tu z równania

$$\boldsymbol{\nabla}^2 P_j = -\frac{j(j+1)}{r^2} P_j.$$

Dla $j=0$ mamy o jedno równanie mniej niż dla $j>0$ przy tej samej liczbie niewiadomych. Dla zbadania wpływu siły odśrodkowej na strukturę radialną należy wziąć pod uwagę pozostałe równania wewnętrznej budowy gwiazd. Najprostsze postępowanie polega na dodaniu uśrednionej siły odśrodkowej w równaniu równowagi hydrostatycznej (9), które teraz przyjmuje postać

$$\frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} + \frac{2}{3}\frac{\Omega^2}{4\pi r}, \tag{40}$$

która jest też ważna gdy Ω jest dowolną funkcją r.

Mamy więc tylko niewielką modyfikację równań wewnętrznej budowy. Dla obliczeń modeli gwiazd trzeba dodać jeszcze przepis na ewolucję Ω. W najprostszym przypadku rotacji jednorodnej wystarcza prawo zachowania całkowitego momentu pędu

$$\mathcal{K} \equiv \int dM_r \Omega r^2.$$

Przy $j>0$ z równań (37) i (38) wynika związek

$$\tilde{\rho}_j = \frac{1}{g}\frac{d\rho}{dr}\left(\tilde{\Phi}_j + \delta_{j,2}\frac{\Omega^2 r^2}{3}\right). \tag{41}$$

Używjc ac go w (39) dostajemy

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\Phi}_j}{dr}\right) - \left[j(j+1) - U\frac{d\ln\rho}{d\ln r}\right]\tilde{\Phi}_j = -\delta_{j,2}U\frac{d\ln\rho}{d\ln r}\frac{\Omega^2 r^2}{3}. \tag{42}$$

Warunkami brzegowymi wynikającymi z $\tilde{\Phi}_j < \infty$ są

$$\tilde{\Phi}_j \propto \left\{ \begin{array}{ll} r^j & \text{dla } r \to 0 \\ r^{-(j+1)} & \text{dla } r \geq R \end{array} \right. . \tag{43}$$

Równanie jednorodne nie ma nietrywialnychych rozwiązań. Mamy na to prosty dowód, przy niezasadniczym założeniu $\frac{d\ln\rho}{d\ln r} \leq 0$. Mnożymy mianowicie (42) przez $\tilde{\Phi}_j$ i całkujemy po r od 0 do ∞. Dostajemy

$$\int_0^\infty \left[\left(r\frac{d\tilde{\Phi}_j}{dr}\right)^2 + j(j+1)\tilde{\Phi}_j^2\right]dr = \int_0^R U\frac{d\ln\rho}{d\ln r}\tilde{\Phi}_j^2 dr. \tag{44}$$

Widać, że jeśli nie zachodzi $\tilde{\Phi}_j \equiv 0$, to lewa strona jest dodatnio, a prawa ujemnie określona. Wnioski: (1) odkształcenia od symetrii sferycznej wymaga nieradialnej siły, (2) rozwiązanie równania niejednorodnego istnieje zawsze.

Wielkość

$$J_2 = \frac{R\tilde{\Phi}_2}{GM}$$

nosi nazwę momentu kwadrupolowego pola grawitacyjnego gwiazdy (planety). ($J_{2,\odot} \approx 2\times10^{-7}$.) Po wyznaczeniu $\tilde{\Phi}_2$, z pomocą równań (38) i (41) znajdujemy $\tilde{p}_2$ i $\tilde{\rho}_2$. Dla wyznaczenia zaburzeń nieradialnych nie potrzebujemy żadnych dodatkowych warunków.

W bardzo podobny sposób można wyliczyć odkształcenie przypływowe. Potencjał grawitacyjny gwiazdy towarzyszącej, Φ_*, w układzie o orbicie kołowej opisujemy w przybliżeniu masy Roche'a. Mamy więc

$$\Phi_* = -\frac{GM_*}{\sqrt{A^2 + r^2 - 2rA\cos\Theta}} = -\frac{GM_*}{A}\sum_{j=0}\left(\frac{r}{A}\right)^j P_j(\cos\Theta), \qquad (45)$$

gdzie M_* jest masą gwiazdy towarzyszącej, A odległością środków mas składników, a Θ kątem biegunowym liczonym od osi łączącej składniki. Wyrażenie na potencjał przypływowy, Φ_p w równaniu (3) dane jest przez szereg (45) poczynając od $j = 2$. Wyraz przy $j = 0$ jest stały (więc nieistotny), a wyraz przy $j = 1$ odpowiada za ruch orbitalny gwiazdy. Dalsze postępowanie jest podobne do przypadku rotacji jednorodnej, nie mamy jednak wyrazu stałego, a za to mamy wyrazy z $j > 2$. Zwykle szereg obcina się na $j = 4$.

W przypadku rotacji synchronicznej z prawa Keplera wynika

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M + M_*)}{A^3}}. \qquad (46)$$

W przypadku rotacji synchronicznej dominujące odkształcenie przypływowe ($\propto P_2$) wynosi $3M_*/(M + M_*)\times$ odkształcenie rotacyjne.