3 Pulsacje radialne i niestabilność dynamiczna gwiazd

3.1 Równanie na małe radialne zaburzenia równowagi gwiazdy

Rozważamy małe sferycznie-symetryczne zaburzenie równowagi gwiazdy. Niech

$$\delta r = r(t, M_r) - r_0(M_r), \tag{58}$$

gdzie r_0 oznacza położenie elementu gazu w modelu równowagowym. Zaburzony model nie znajduje się w równowadze hydrostatycznej, zatem (4) zastępujemy równaniem ruchu

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dr} - \frac{GM_r\rho}{r^2},$$

któremu, korzystając z (8), nadajemy postać.

$$\frac{dv}{dt} + 4\pi r^2\frac{dp}{dM_r} + \frac{GM_r}{r^2} = 0. \tag{59}$$

Przyjmiemy teraz że δr i odpowiednie zaburzenie gęstości, $\delta\rho$, i ciśnienia, δp, są dostatecznie małe i zlinearyzujemy równania wokół modelu równowagowego. Zaburzenia wyliczamy dla ustalonego M_r, czyli dla ustalonego elementem gazu. Takie zaburzenia nazywamy *lagranżowskimi.*

Istnieje prosty związek pomiędzy tymi zaburzeniami i wprowadzonymi wcześniej zaburzeniami eulerowskimi. Dla większej ogólności zapisujemy go dla wektorowych przemieszczeń elementów $\boldsymbol{\delta x}$ (δr jest radialną składową $\boldsymbol{\delta x}$) i niekoniecznie sferycznych gwiazd. Ten związek ma postać

$$\delta f = f' + \boldsymbol{\delta x}\cdot\boldsymbol{\nabla} f. \tag{60}$$

Prawami komutowania dla zaburzeń lagranżowskich są

$$\delta\frac{df}{dt} = \frac{d\delta f}{dt} \text{ i } \delta\frac{df}{dM_r} = \frac{d\delta f}{dM_r} \tag{61}$$

Będziemy rozważali szybkie zaburzenia, dla których pominąć możemy zmiany entropii. Dlatego przyjmujemy adiabatyczną zależność między zaburzeniami ciśnienia i gęstości.

$$\frac{\delta p}{p} = \Gamma_1\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{62}$$

Współczynnik Γ_1 nazywa się wykładnikiem adiabaty. Dla jednoatomowego gazu doskonałego $\Gamma_1 = \gamma = 5/3$.

Z równań (8) i (59) dostajemy kolejno

$$\frac{d\delta r}{dM_r} = -\frac{dr}{dM_r}\left(2\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho}\right) \tag{63}$$

i

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\delta p}{dr} - 4g\frac{\delta r}{r} = 0. \tag{64}$$

Promień r oznacza tu położenie warstwy w modelu niezaburzonym. Nie ma już potrzeby używania wskaźnika "0".

Dla wielkości zaburzonych zakładamy eksponencjalną zależność od czasu. W szczególności przyjmiemy

$$\delta r = ry(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{65}$$

Teraz równania (62-64) sprowadzamy do jednego równania na amplitudę y i częstotliwość ω.

$$\frac{d}{dr}\left(p\Gamma_1 r^4 \frac{dy}{dr}\right) + \left[\omega^2 - \frac{g}{r}(3\Gamma_1 - 4) + \frac{3p}{r\rho}\frac{d\Gamma_1}{dr}\right]\rho r^4 y = 0, \tag{66}$$

Warunki brzegowe dla $y(r)$ wynikają z żądania by δr i $\delta p/p$ pozostawały skończone dla $r \to 0$ i dla $r \to R$. W okolicy reqularnego punktu osobliwego $r = 0$ poszukujemy rozwiązania w postaci szergu

$$y = r^s \sum_{k=0} a_k r^k$$

i z przyrównania do zera wyrazów przy najniższej potędze r dostajemy $s(s+3) = 0$. Rozwiąząnie skończone odpowiada wyborowi $s = 0$. Łatwo sprawdzamy, że szereg nie zawiera nieparzystych potęg r. Mamy więc

$$\frac{dy}{dr} = 0 \quad \text{dla} \quad r \to 0$$

Jeżeli $p/\rho \to 0$ dla $r \to R$ to $r = R$ jest też regularnym punktem osobliwym. Dla konfiguracji politropowych mamy $p/\rho \propto \theta \propto R - r$. Przyjmujemy tę zależność i szukamy rozwiązania (66) dla małych $(R-r)/R$ w postaci szeregu potęgowego. Z porównania wyrazów przy najniższych potęgach znów znajdujemy, że dla rozwiązania skończonego mamy $s = 0$. Uwzględniając wyraz liniowy w $R - r$, dostajemy związek

$$r\frac{dy}{dr} = \frac{y}{\Gamma_1}\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 4 - 3\Gamma_1\right) \quad \text{dla} \quad r \to R, \tag{67}$$

który stanowi zewnętrzny warunek brzegowy. W ten sposób nasze zadanie sprowadzone zostało do *problemu Sturma-Liouvilla*. Z tego faktu wynika kilka ważnych wniosków. Problem ma nieskończenie wiele rozwiązań: $y_n(r), \omega_n^2$, gdzie n oznacza kolejne liczby naturalne. Funkcje własne, y_n, są wyznaczone z dokładnością do stałego zespolonego czynnika i mają dokładnie $n - 1$ miejsc zerowych w przedziale $[0, R]$. Wartości własne ω_n^2 są rzeczywiste. Funkcje własne odpowiadające różnym n są ortogonalne z wagą ρr^4.

3.2 Mody pulsacji radialnych

Rozwiązania opisują kolejne *mody pulsacji radialnych*. Zbiór rozwiązań tego problemu, $\omega_n, y_n(r)$ z n=1,2,...., opisuje kolejne mody pulacji radialnych. Liczby naturalne, n, nazywamy *radialnym rzędem modu*. Mod $n = 1$ (czasami oznaczany $n = 0$ i nazywany fundamentalnym) nie ma miejsc zerowych (*węzłów*) w przedziale $(0, R]$. Dla kolejnych modów nazywanych *owertonami* zachodzi

$$\omega_n > \omega_{n-1}.$$

Zajmiemy się właściwościami widma częstości pulsacji radialnych. Dla realistycznych modeli gwiazd wartości ω_n wyznacza się liczbowo. Rozpatrzymy wpierw bardzo uproszczone modele, dla których można znaleźć rozwiązania analityczne.

Zaniedbując zmienność Γ_1 (nienajgorsze przybliżenie), można łatwo sprowadzić równanie (66) do postaci

$$r^2 \frac{d^2y}{dr^2} + (4 - V)r\frac{dy}{dr} + \left[\omega^2 - \frac{GM_r}{r^3}(3\Gamma_1 - 4)\right]\left(\frac{r}{v_a}\right)^2 y = 0, \tag{68}$$

gdzie a $v_a = \sqrt{p\Gamma_1/\rho}$ jest prędkością dźwięku, a

$$V = -\frac{d\ln p}{d\ln r} = \frac{gr\rho}{p}.$$

Następne przybliżenie jest już zupełnie nierealistyczne. Zakładamy mianowicie, że niezaburzona gęstość w modelu nie zależy od r. Mamy więc

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \equiv \bar{\rho}.$$

Z równań (8) i (9) dostajemy wtedy

$$M_r = Mx^3 \quad \text{i} \quad p = \frac{GM\rho}{2R}(1 - x^2),$$

gdzie $x = r/R$. Skąd mamy

$$V = \frac{2x^2}{1 - x^2}, \qquad v_a^2 = \frac{GM\Gamma_1}{2R}(1 - x^2)$$

i

$$(1 - x^2)x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (4 - 6x^2)x\frac{dy}{dx} + bx^2y = 0, \tag{69}$$

gdzie

$$b = \frac{6}{\Gamma_1}\left(\frac{\omega^2}{4\pi\bar{\rho}} + \frac{4}{3} - \Gamma_1\right). \tag{70}$$

Szukamy rozwiązania w formie szeregu

$$y = x^s \sum_{k=0} a_k x^k.$$

Po podstawieniu do (69) i rozważeniu granicy $x \to 0$, znajdujemy dwie możliwe wartości k, 0 i–1. Tylko wartość $k = 0$ daje skończone rozwiązania. Z przyrównania do zera współczynników przy x^k wynika wzór rekurencyjny

$$a_{k+2} = a_k \frac{k(k+5) - b}{(k+2)(k+5)}.$$

Rozwiązaniem jest szereg x^2. Tylko dla $b = k(k+5)$ szereg ten jest skończony. W pozostałych przypadkach szereg jest nieskończony i rozbieżny w $x = 1$, bo $a_{k+2}/a_k \to 1$ dla $k \to \infty$. Wynika stąd, że tylko dla $b = k(k+5)$ możemy spełnić zewnętrzmy warunek brzegowy. Po skorzystaniu z (70), dostajemy

$$\omega_n = \sqrt{4\pi G\rho \left[\Gamma_1 - \frac{4}{3} + \frac{\Gamma_1}{3}(n-1)(2n+3)\right]}, \tag{71}$$

gdzie położyliśmy $k = 2n - 2$, tak by n oznaczało radialny rząd modu.

zadanie: Proszę pokazać, że dla modelu z

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{3x^2}$$

mamy

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8\pi G\bar{\rho}\Gamma_1}{3}(2n - 2 + s)(2n + 1 + s)}, \tag{72}$$

gdzie

$$s = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\left(3 - \frac{4}{\Gamma_1}\right)} - 1\right].$$

uwaga: Osobliwość ρ i p w centrum nie stanowi problemu. Przyjęta wartość s odpowiada rozwiązaniu, dla którego przy $r \to 0$ mamy $\rho y^2 r^2 \to 0$, co oznacza znikomy wkład do energii oscylacji z okolic osobliwości.

Dla dowolnych modeli gwiazd definiujemy bezwymiarowe częstotliwości modów σ_n związkiem

$$\omega_n \equiv \sigma_n \sqrt{4\pi G\bar{\rho}}. \tag{73}$$

Przyjmując $\Gamma_1 = 5/3$, dostajemy korzystając z (70) $\sigma_1 = 0.58$, a z (72) $\sigma_1 = 1.42$. Typowe wartości dla realistycznych modeli gwiazd pulsujących mieszczą się w zakresie 1.4–2. W obrębie jednego typu wartości σ różnią się nieznacznie. Dla przybliżonych ocen można je traktować jako stałe. Częściej używanymi wielkościami są *stałe pulsacyjne*, Q_n, które definiuje następujący wzór na okresy pulsacji.

$$\Pi_n \equiv \frac{2\pi}{\omega_n} = Q_n \sqrt{\frac{\bar{\rho}_\odot}{\bar{\rho}}}. \tag{74}$$

Z tych defnicji wynika, że

$$Q_n = \frac{1}{\sigma_n}\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}_\odot}} = \frac{0.067}{\sigma_n} \quad \mathrm{d}.$$

Teoretyczną *zależność okres-jasność-temperatura* otrzymuje się z równania (74) po dodaniu zależności masa-jasność i $L/L_\odot = (T_{\rm eff}/T_{\rm eff,\odot})^4 (R/R_\odot)^2$.

Dla $n \gg 1$ mamy ze wzoru (71) $\sigma_n \approx n\sqrt{\Gamma_1 2/3}$, a z (72) – wartość dwukrotnie większą. Proporcjonalność $\omega_n \sim n$ w granicy $n \gg 1$ wynika wprost z (66), którego przybliżonym (JWKB) rozwiązaniem, gdy $\sigma_n \gg 1$, jest

$$y_n \propto \sqrt{\frac{v_a}{p\Gamma_1 r^4}} \sin\Phi_n, \quad \Phi_n = \omega_n \int_0^r \frac{d\tilde{r}}{v_a}.$$

Warunek brzegowy nałożony przy $r \approx R$, prowadzi do zależności

$$\pi(n+\alpha) = \omega_n \int_0^R \frac{d\tilde{r}}{v_a}, \tag{75}$$

w której faza α, opisuje odbicie fali w warstwach zewnętrznych. Faza ta jest rzędu słabo zależy od ω. W tej granicy pulsacje radialne są sferycznymi, stojącymi falami dźwiękowymi.

3.3 Kryterium stabiności dynamicznej

Zauważmy, że zarówno ze wzoru (71) jaki (72) wynika $\omega_1 = 0$ jeśli $4\Gamma_1 = 3$. Przekonamy się, że tak jest zawsze jeśli tylko Γ_1 można traktować jako stałą.

Po pomnożeniu(66) przez y (bez straty ogólności możemy traktować y jako wielkość rzeczywistą) i scałkowaniu przez części po r, dostajemy

$$\omega^2 = \frac{J}{I} \tag{76}$$

gdzie

$$J = \int_0^R \left\{ v_a^2 \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left[\frac{g}{r}(3\Gamma_1 - 4) - 3\frac{v_a^2}{r}\frac{d\ln\Gamma_1}{dr}\right] y^2 \right\} \rho r^4 dr \tag{77}$$

i

$$I = \int_0^R \rho r^4 y^2 dr. \tag{78}$$

Znak ω^2 jest taki jak znak J. Z (76) wynika od razu, że jeżeli wykładnik adiabaty, Γ_1, można traktować jako stały to warunkiem wystarczającym dla stabilności dynamicznej gwiazd względem zaburzeń radialnych jest

$$\Gamma_1 > \frac{4}{3} \tag{79}$$

Można też sprawdzić, że dla $\Gamma_1 = \frac{4}{3}$ rozwiązaniem równania (66) jest $\omega_1 = 0$ i y_1=const, co dowodzi że (79) jest także warunkiem koniecznym. W przypadku politropowego równania stanu $\Gamma_1 = 4/3$ odpowiada $n = 3$, a zatem gwiazda z takim równaniem stanu jest neutralnie stabilna. W rozdziale 2 zauważyliśmy, że dla politropy $n = 3$ mamy $dM/d\rho_c = 0$ i że odpowiada to przejściu od konfiguracji stabilnych do niestabilnych.

Jeżeli Γ_1 nie jest stała, to dla wystąpienie niestabilności, musimy mieć $\Gamma_1 < \frac{4}{3}$ w dostatecznie dużym obszarze. W przypadku, gdy Γ_1 zmienia się niewiele we wnętrzu gwiazdy, to kryterium stabilności można zapisać następującej postaci.

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\int_0^R \Gamma_1 p r^2 dr}{\int_0^R p r^2 dr} > \frac{4}{3}. \tag{80}$$

Dla dowodu korzystamy z *zasady wariacyjnej.* Rozważmy funkcję $y(r) = y_k(r) + \Delta y$, spełniającą warunki brzegowe (41), i częstotliwości $\omega = \omega_k + \Delta\omega$. Z (76), zachowując tylko wyrazy liniowe w Δch i korzystając z (66), dostajemy

$$\Delta\omega = \frac{\Delta J - \omega^2 \Delta I}{2\omega I} = 0.$$

Skąd wynika, że można uzyskać dobre przybliżenie na wartość ω^2 w oparciu o wyrażenie (76), jeśli mamy nawet nienajlepsze przybliżenie dla funkcji $y(r)$. Kładąc teraz w (77) $y = \text{const}$, co na pewno jest dobrym przybliżeniem dla y_1 w pobliżu $\Gamma_1 = 4/3$, łatwo uzyskuje się warunek (80).

Relatywistyczny warunek stabilności dynamicznej, w granicy słabego pola, ma postać

$$\bar{\Gamma}_1 > \frac{4}{3} + q\frac{GM}{Rc^2}. \tag{81}$$

Współczynnik q jest rzędu 1. Dokładna wartość zależy od struktury gwiazd.

Ciśnienie stabilizuje równowagę gwiazdy. Im wyższe Γ_1 tym większa sprężystość gazu i rola ciśnienia. Efekty realtywistyczne wzmacniając rolę grawitacji działają destabilizująco. Wybuch *supernowej* inicjuje niestabilność dynamiczna rdzenia żelaznego. W tym przypadku, obniżenie Γ_1 spowodowane jest fotodysocjacją jąder atomowych i odwrotnymi rozpadami β.