4 Oscylacje nieradialne i niestabilność konwektywna

4.1 Równanie na małe zaburzenia nieradialne

Rozważamy małe nieradialne zaburzenie sferycznej, nierotującej gwiazdy. Równanie opisujące zmiany zaburzenia w czasie otrzymamy linearyzując *równanie Eulera*

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi. \tag{82}$$

W tym przypadku, podobnie jak w rozdziale 1, wygodniej jest używać zaburzeń eulerowskich. W przybliżeniu liniowym, przyspieszenie ma tę samą postać,

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta x}}{\partial t^2} = -\omega^2 \boldsymbol{\delta x}, \tag{83}$$

dla obydwu typów zaburzeń. Ostateczne równanie na oscylacje nieradialne zapisujemy w postaci operatorowej

$$\omega^2 \rho \boldsymbol{\delta x} = \boldsymbol{L} \boldsymbol{\delta x}, \tag{84}$$

gdzie

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\nabla} p' + \rho' g \boldsymbol{e}_r + \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi'. \tag{85}$$

Jawną formę ρ' w funkcji $\boldsymbol{\delta x}$ uzyskuje się z linearyzacji równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{86}$$

Biorąc pod uwagę prawa komutowania opisane w rozdziale 1 i zauważając, że również pochodna cząstkowa po czasie komutuje z zaburzeniem eulerowskim, dostajemy

$$\rho' = -\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{\delta x}). \tag{87}$$

Z użyciem tego wzoru, równania (60) i (62) prowadzą do następującego wyrażenia na p'.

$$p' = -\delta r \frac{dp}{dr} - p \Gamma_1 \mathrm{div} \boldsymbol{\delta x}. \tag{88}$$

Wyrażenie na Φ', wynikające z liniowego związku pomiędzy ρ i Φ (rów. 27) i z (87), ma następującą postać

$$\Phi'(\boldsymbol{x}) = G \int d^3 \tilde{\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{x})}{|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}|}. \tag{89}$$

Korzystając z (87-89) można pokazać, że $\boldsymbol{L}$ jest *operatorem hermitowskim.* Jest on rzeczywisty wystarczy więc dowieść symetrii,

$$\int d^3 \boldsymbol{x} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{L} \mathbf{b} = \int d^3 \boldsymbol{x} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{L} \mathbf{a}. \tag{90}$$

W dowodzie wykorzystuje się *twierdzenie Gaussa* do eliminacji operatorów $\boldsymbol{\nabla}$, zaniedbuje całkę po powierzchni gwiazdy i korzysta z symetrii jądra całki we wzorze (89). Z tej własności operatora wynika, że

(i) jego wartości własne, ω^2, są rzeczywiste

(ii) jego wektory własne $\boldsymbol{\delta x}$ odpowiadające różnym ω^2 są ortogonalne z wagą ρ.

Wynika też, podobnie jak w przypadku pulsacji radialnych, że ocenę wartości własnych można uzyskać z wyrażenia całkowego

$$\omega^2 = \frac{1}{I}\int d^3\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta x}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{\delta x}, \tag{91}$$

gdzie

$$I = \int d^3\boldsymbol{x}\rho|\boldsymbol{\delta x}|^2.$$

Zadanie: Wyprowadzić równanie (66) wychodząc z równań (84-88) i korzystając z (5).

4.2 Mody akustyczne i grawitacyjne

Posłużymy się uproszczonym opisem matematycznym oscylacji nieradialnych, wykorzystującym przybliżenia asymptotyczne ważne dla oscylacji krótkofalowych. Dla wielkości zaburzonych przyjmiemy zależność od współrzędnych taką, jak dla fal płaskich. Kładziemy więc

$$p' = A_p \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)]. \tag{92}$$

O składowych radialnych $\boldsymbol{k}$ zakładamy, że są dostatecznie duże w sensie

$$|k_r| \gg \mathrm{Max}\left(-\frac{d\ln p}{dr}, \frac{d\ln M_r}{dr}\right) \tag{93}$$

To założnie pozwala na zaniedbywanie zależności od r współczynników w operatorze $\boldsymbol{L}$, a także podobnej zależności amplitud A_p. Zależność od składowych horyzontalnych w formie trygonometrycznej jest dobrym przybliżeniem jeśli $r|\boldsymbol{k}_H| \gg 1$. Można pokazać, że wkład wyrazu zawierającego $\boldsymbol{\nabla}\Phi'$ do $\boldsymbol{L}$ jest w tej sytuacji zaniedbywalny .

Korzystając z przyjętych przybliżeń dostajemy kolejno,
(i) ze składowej radialnej (84)

$$-\omega^2\rho\delta r + \mathrm{i}k_r p' + \rho' g = 0 \tag{94}$$

(ii) z zastosowania operatora div_H do (84)

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}_H \cdot \boldsymbol{\delta x} = -\frac{|\boldsymbol{k}_H|^2 p'}{\omega^2\rho} \tag{95}$$

(iii) z (88) i (95)

$$\frac{p'}{p} = -\frac{\mathrm{i}\omega^2 k_r}{\omega^2 - |\boldsymbol{k}_H|^2 v_a^2}\delta r \tag{96}$$

(iv) z (60) i (62)

$$\frac{\rho'}{\rho} = A\frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{p'}{p}, \tag{97}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$A \equiv \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{d\ln r} - \frac{d\ln \rho}{d\ln r}. \tag{98}$$

Teraz podstawiając wyrażenia (96) do (97), przy zaniedbaniu na mocy (93) drugiego członu w (97), dostajemy

$$\left(\mathcal{N}^2 - \omega^2 + \frac{\omega^2\mathcal{L}^2}{\omega^2 - \mathcal{L}^2}\frac{k_r^2}{|\boldsymbol{k}_H|^2}\right)\delta r = 0,$$

gdzie

$$\mathcal{N} \equiv \sqrt{\frac{Ag}{r}},$$

nosi nazwę częstotliwości Brunta - Väisäli, a

$$\mathcal{L} = |\boldsymbol{k}_H| v_a$$

nosi nazwę częstotliwości Lamba. Warunek istnienia niezerowych rozwiązań prowadzi do relacji dyspersyjnej dla fal grawito-akustycznych,

$$(\omega^2 - \mathcal{N}^2)(\omega^2 - \mathcal{L}^2) = \omega^2\mathcal{L}^2\frac{k_r^2}{|\boldsymbol{k}_H|^2}. \tag{99}$$

Wobec symetrii sferycznej niezaburzonej gwiazdy właściwymi funkcjami do opisu zaburzeń są *harmoniki sferyczne.* Wzór (99) pozostanie ważny dla takiej reprezentacji po zastąpieniu

$$\boldsymbol{k}_H^2 \to \frac{\ell(\ell+1)}{r^2},$$

gdzie ℓ jest stopniem sferycznego harmonika, czyli ilością płaszczyzn węzłowych na sferze. Należy podkreślić, że wtedy wzór (99) stosuje się dla dowolnych ℓ, o ile tylko spełnione są nierówności (93).

Równanie opisuje propagacje fal w kierunku radialnym jeśli $k_r^2 > 0$. Zachodzi to gdy

$$\omega^2 > \mathcal{N}^2 \quad \text{i} \quad \omega^2 > \mathcal{L}^2, \tag{100}$$

mówimy wtedy o *propagacji akustycznej*, albo gdy

$$\omega^2 < \mathcal{N}^2 \quad \text{i} \quad \omega^2 < \mathcal{L}^2, \tag{101}$$

i wtedy mówimy o *propagacji grawitacyjnej*. W pozostałych wypadkach propagacja jest lokalnie niemożliwa. Miejsca równości są powierzchniami odbicia fali.

Dla danej wartości ℓ i dyskretnego zbioru wartości $\omega_{\ell,n}$, powstają fale stojące, czyli mody oscylacji. Zauważmy, że $k_r \to \infty$ przy $\omega \to \infty$ oraz, jeżeli $\mathcal{N}^2 > 0$ i $\ell > 0$, przy $\omega \to 0$. Dla politropowych modeli widmo częstotliwości modów istotnie rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$. Dla realistycznych modeli gwiazd warunek odbicia w atmosferze ogranicza widmo od dołu i od góry.

Mody o niskich częstotliwościach ($\omega_{\ell,n} < \omega_{0,1}$) nazywa się modami grawitacyjnymi (g). Jeżeli druga z nierówności w (101) jest silna, to (99) staje się relacją dyspersyjną dla *fal grawitacyjnych wewnętrznych*. Mamy wtedy w przybliżeniu

$$\pi(n + \alpha_g) \approx \sqrt{\ell(\ell+1)} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{\mathcal{N}}{\omega_{n,\ell}}\right)^2 - 1}\frac{dr}{r}, \tag{102}$$

gdzie fazę α_g wyznaczają warunki brzegowe na granicach obszaru propagacji, po którym wykonuje się całkę w powyższym wzorze, a n jest radialnym rzędem modu. Widzimy, że mody g istnieją tylko dla $\ell > 0$ i tylko w takich gwiazdach w których istnieje obszar z $\mathcal{N}^2 > 0$, a więc nie ma ich w politropach o indeksach $n_p \leq 1.5$. Zauważmy, że przy Γ_1 i $n_p = 1.5$, mamy $\mathcal{N} = A \equiv 0$.

Zakres wysokich częstotliwości pokrywają mody p (ciśnieniowe, akustyczne) lub w przypadku gwiazd o kontraście gęstości, $\rho_c/\bar{\rho}$, mody o charakterze mieszanym: akustycznym w otoczce i grawitacyjnym w głębokim wnętrzu. Jeżeli pierwsza z nierówności w (100) jest silna, to (99) staje się relacją dyspersyjną dla fal dźwiękowych. Dla modów p o dostatecznie wysokich częstotliwościach mamy w przybliżeniu

$$\pi(n + \alpha_p) \approx \int_{r_1}^{R} \sqrt{\left(\frac{\omega_{n,\ell}}{v_a}\right)^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}dr. \tag{103}$$

W tym przypadku r_1 wyznacza warunek $\omega_{\ell,n} = \mathcal{L}(r_1)$. Natomiast górny punkt odbicia leży blisko powierzchni. Wzór (103) stanowi uogólnienie (75) na przypadek oscylacji nieradialnych.

Wzbudzenie modów p i g stwierdza się w zmienności wielu gwiazd leżących leżących w różnych częściach diagramu H-R. Oscylacje, nawet w przypadku znacznych amplitud, nie mają istotnego wpływu na strukturę wnętrz i ewolucję gwiazd. Pomiary częstotliwości odgrywają rolę w wyznaczaniu parametrów gwiazd. W przypadku Słońca, dla którego wyznacza się częstotliwości ponad 2000 indywidualnych modów w zakresie $\nu = \omega/2\pi$ od 1 do 5 mHz i $\ell = 0$ do 300, możliwe jest szczegółowe sondowanie wnętrza. Obserwowane oscylacje są głównie modami p. Wykrywa się też mody f odpowiadające $\ell > 90$, które spełniają w przybliżeniu taką relację dyspersyjną jak fale na głębokiej wodzie,

$$\omega_\ell \approx \sqrt{g(R)|\boldsymbol{k}_H|} \approx \sqrt{\frac{\ell}{3}4\pi G\bar{\rho}}. \tag{104}$$

Dla tych modów nie mamy propagacji w kierunku radialnym i dlatego nie znalazły się wcześniej w naszej klasyfikacji.

Zadanie: Zakładając silną nierówność (93), uzasadnić zaniedbanie ostatniego wyrazu w (85).

4.3 Niestabilność konwektywna

W obszarach gdzie A (a zatem i $\mathcal{N}^2$), jest niedodatanie fale grawitacyjne nie propagują się. Wzór (103) jednak zachowuje ważność z tym, że ω jest wtedy wielkością urojoną. Gałąź rozwiązania odpowiadająca $\Im(\omega) > 0$ opisuje eksponencjalny wzrost zaburzenia. Dla dowolnie cienkiej warstwy z $A < 0$ można dobrać odpowiednio małą urojoną wartość tak by spełnić warunki stosowalności przybliżenia danego tym wzorem (103). Nierówność $A > 0$ w całym wnętrzu gwiazdy jest warunkiem koniecznym dla jej stabilności. W odróżnieniu od przypadku zaburzeń radialnych, kiedy dla wystąpienia niestabilności potrzebne było $\Gamma_1 < 4/3$ *w dostatecznie dużym obszarze* teraz wystarcza $A < 0$ w *dowolnie cienkiej warstwie.*

Warunek $A > 0$ w całym wnętrzu gwiazdy jest wystarczający dla jej stabilności względem zaburzeń nieradialnych. Przypadek $A = 0$ odpowiada neutralnej stabilności. Z (96) wynika, że $p' \to 0$ dla $\omega \to 0$, a z (97),że przy $A = 0$, również $\rho' \to 0$. Istnieją więc przemieszczenia niezaburzające równowagi hydrostatycznej.

Korzystając z (98) i z równwnia stanu, $p = p(\rho, T, \mu)$, możemy warunek niestabilności względem zaburzeń nieradialnych, inaczej *niestabilności konwektywnej*, zapisać w postaci

$$\frac{d\ln\rho}{d\ln p} - \frac{1}{\Gamma_1} = \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)_{p,\mu}\left(\frac{d\ln T}{d\ln p} - \nabla_{\rm ad}\right) + \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\mu}\right)_{p,T}\frac{d\ln\mu}{d\ln p} < 0, \quad (105)$$

gdzie

$$\nabla_{\rm ad} = \left(\frac{\partial\ln T}{\partial\ln p}\right)_{S,\mu}$$

nazywana jest *gradientem adiabatycznym.* Pochodne zwykłe wyliczane są dla niezaburzonego modelu gwiazdy. Konwekcja występuje wtedy, gdy gęstość nie wzrasta dostatecznie stromo wgłąb gwiazdy.

Dla gazu doskonałego mamy

$$\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right)_{p,\mu} = -1, \quad \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\mu}\right)_{p,T} = 1, \quad \nabla_{\rm ad} = 0.4$$

W tym przypadku niestabilność pojawia się jeśli lokalny indeks politropy wynosi mniej niż 1.5.

Warunek niestabilności zapisany w postaci (105) nosi nazwę *kryterium Ledoux.* Dla warstw jednorodnych pochodna μ znika i wtedy warunek niestabilności można zapisać w postaci znanej jako *kryterium Schwarzshilda*,

$$\frac{d \ln T}{d \ln p} \equiv \nabla > \nabla_{\mathrm{ad}} \tag{106}$$

Zmiany średniego ciężaru molekularnego, powstające w wyniku nukleosyntezy i barodyfuzji działają zawsze stabilizująco. Jednak, przy uwzględnieniu strat promienistych, pojawia się niestabilność w formie oscylacji o rosnącej amplitudzie już przy spełnieniu nierówności (106).

Niestabilność konwektywną spotyka się w niemal wszystkich typach gwiazd. Jej skutkiem jest wystąpienie makroskopowego ruchu materi wewnątrz gwiazd. Ruch ten jest istotny dla transportu energii i mieszania materii. Ma też inne skutki, takie jak wzmacnianie pól magnetycznych i wzbudzanie oscylacji. Prędkości konwektywne są zwykle znacznie mniejsze od prędkości dźwięku i zwykle nie uwzględnia się ich w warunku równowagi sił.