5 Termodynamika wnętrz gwiazdowych

W tym rozdziale zajmiemy się wyznaczaniem zależności termodynamicznych potrzebnych do konstruowania modeli gwiazd i do badania ich stabilności. Będziemy więc znajdować funkcje $p(\rho, T, \boldsymbol{X})$ i $u(\rho, T, \boldsymbol{X})$, gdzie wektor $\boldsymbol{X}$ reprezentuje obfitości pierwiastków chemicznych, oraz ich pochodne. Składowe $\boldsymbol{X}$ będziemy traktowali jako zewnętrznie ustalone parametry. Takie podejście w zastosowaniu do modelowania budowy gwiazd jest uzasadnione z wyjątkiem krótkiej fazy ewolucji związanej z wybuchem supernowej, kiedy reakcje jądrowe należy traktować jako procesy równowagowe.

Wszystkie obliczenia wykonywać będziemy przy założeniu *lokalnej równowagi termodynamicznej*. Uzasadnieniem jest to, że droga swobodna molekuł jest znacznie krótsza od odległości, na której parametry termodynamiczne zmieniają się znacząco. Będziemy posługiwać się pojęciem ciśnieniowej skali odległości

$$H_p = -\frac{dr}{d\ln p} = \frac{pr^2}{G\rho M_r}. \tag{107}$$

Podobnie zdefiniowane są odległości H_ρ i H_T. W atmosferze Słońca $H_p \approx$ 150km, a droga swobodna atomu H jest $\sim$ 1 cm. Dysproporcja rośnie w głąb.

We wnętrzach gwiazd promieniowanie elektromagnetyczne może wnosić istotny wkład do ciśnienia i energii wewnętrznej. Fotony są lokalnie sprzężone z gazem, jeżeli droga swobodna fotonu jest znacznie krótsza od H_T. Warunek ten nie jest spełniony w atmosferze.

5.1 Tożsamości termodynamiczne

Oznaczmy

$$\chi_T \equiv \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}\right)_\rho \text{ i } \chi_\rho \equiv \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_T. \tag{108}$$

Pierwsze prawo termodynamiki zapiszemy w postaci

$$TdS = du - \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{109}$$

gdzie S oznacza entropię na jednostkę masy. Mamy stąd wyrażenie na ciepło właściwe przy stałej objętości

$$c_v \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho \tag{110}$$

Z pomocą (108-110) wyliczymy pochodne adiabatyczne (przy ustalonej wartości S), które występują w kryteriach stabilności dynamicznej

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S = \frac{1}{c_v T}\left[\frac{p}{\rho} - \left(\frac{\partial u}{\partial \ln \rho}\right)_T\right], \tag{111}$$

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_S = \chi_\rho + \chi_T(\Gamma_3 - 1) \tag{112}$$

i

$$\nabla_{\mathrm{ad}} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_S \equiv \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1}. \tag{113}$$

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu dane jest przez

$$c_p \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{\Gamma_1 c_v}{\chi_\rho}. \tag{114}$$

To wyrażenie najłatwiej otrzymać metodą jakobianów korzystając ze (108) i (110). Inne użyteczne wyrażenie na c_p dostaniemy rozważając wpierw różniczkę zupełną potencjału termodynamicznego, $\tilde{g} \equiv u - ST + p/\rho$, na którą mamy ze (109)

$$d\tilde{g} = -SdT + \frac{dp}{\rho}, \tag{115}$$

skąd wynika

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho T}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \tag{116}$$

i dalej, znów posługując się metodą jakobianów,

$$c_p = \frac{p}{\rho T \nabla_{\mathrm{ad}}}\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \tag{117}$$

5.2 Jednoatomowy gaz doskonały

Ilość cząstek znajdujących w stanie o określonej energii E_s dana jest znanym wzorem Boltzmanna

$$N_s \propto w_s \exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right), \tag{118}$$

gdzie w_s oznacza wagę statystyczną stanu.

Rozkład pędów, $\boldsymbol{p}$ dla swobodnych, jednoatomowych, nierelatywistcznych cząsteczek nosi nazwę *rozkładu Maxwella-Boltzmanna*. Znajdziemy go kładąc w (118)

$$E_s = \frac{m_j|\boldsymbol{v}|^2}{2} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m_j}$$

i $dw_s \propto d^3\boldsymbol{p}$.

Całkowita ilość cząsteczek o masie m_j w jednostce objętości dana jest przez $N = \int N_s w_s d|\boldsymbol{p}|$. Stąd, po całkowaniu, dostajemy normalizację rozkładu i ostatecznie wzór

$$dN(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{(2\pi m_j kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m_j kT}\right) d^3\boldsymbol{p}. \tag{119}$$

Ciśnienie gazu wyliczamy jako strumień pędu na jednostkę powierzchni, którą dowolnie wybieramy jako płaszczyznę yz w kartezjańskim układzie odniesienia. Dostajemy w ten sposób

$$p_g = \int p_x v_x dN(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{3m_j}\int |\boldsymbol{p}|^2 dN(\boldsymbol{p}) = NkT. \qquad (120)$$

Wzór pozostaje ważny dla gazu, który jest mieszaniną cząstek o różnych masach m_j. Jeżeli względne obfitości masowe dane są przez X_j, wtedy

$$N_j = \frac{X_j\rho}{m_j}$$

Wzory (16) i (17) w rozdziale 1 wynikają z przyjęcia

$$N_1 \approx \frac{2X\rho}{m}\ ,\ N_4 \approx \frac{3Y\rho}{4m}\ \text{i}\ \sum_{j>4} X_j \approx \frac{0.5Z\rho}{m}$$

Jeżeli w energii wewnętrznej gazu u_g liczonej na jednostkę masy uwzględniamy tylko energię kinetyczną cząsteczek, to całkując $|\boldsymbol{p}|^2/2m$ z rozkładem (119) dostajemy wzór (18).

$$u_g = \frac{1}{2\rho m_j}\int |\boldsymbol{p}|^2 dN(\boldsymbol{p}) = NkT = \frac{3p_g}{2\rho}. \qquad (121)$$

W tym najprostszym przypadku z równań (108) i (111-113) dostajemy

$$\chi_T = \chi_\rho = 1\ ,\ \nabla_{\rm ad} = 0.4\ ,\ \Gamma = 5/3.$$

5.3 Równanie Sahy

Przy wyliczaniu parametrów termodynamicznych w warstwach, gdzie zachodzi częściowa jonizacja obfitych pierwiastków, musimy uwzględniać udział energii jonizacji w u i zależność N od T i ρ. Względne ilości atomów najdujących się w kolejnych stanach jonizacji dane są, w przybliżeniu gazu doskonałego, *równaniem Sahy*. Równanie to uzyskamy ze wzoru (118).

Oznaczmy przez $N_{j,i}$ ilośc atomów piewiastka j w stanie i-tej jonizacji, przez $\lambda_{j,i}$ stosunek wag statystycznych stanu wyższej do niższej jonizacji. Wynosi on 1/2 dla H i drugiej jonizacji He, i 2 dla pierwszej jonizacji He. Wielkość w_e oznaczać będzie wagę statystyczną stanów swobodnego elektronu, a $\Xi_{j,i}$ – energię jonizacji. Dla H, HeI i HeII wynosi ona, kolejno, 13.6, 24.6 i 54.4 eV. Mamy wtedy ze (118)

$$\frac{N_{j,i}}{N_{j,i-1}} = \lambda_{j,i}\exp\left(-\frac{\Xi_{j,i}}{kT}\right)\int \frac{dw_e}{d|\boldsymbol{p}_e|}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}_e|^2}{2m_e kT}\right)d|\boldsymbol{p}_e|.$$

Z zakazu Pauliego wynika następujący związek

$$dw_e = \frac{8\pi |\boldsymbol{p}_e|^2}{N_e h^3} d|\boldsymbol{p}_e|,$$

gdzie N_e jest ilością elektronów w jednostce objętości. Po scałkowaniu dostajemy

$$\frac{N_{j,i}}{N_{j,i-1}} = 2\lambda_{j,i} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{N_e h^3} \exp\left(-\frac{\Xi_{j,i}}{kT}\right). \tag{122}$$

W obszarach częściowej jonizacji helu i wodoru wartości Γ_1 i $\nabla_{\rm ad}$ są znacząco obniżone, co sprzyja wystąpieniu niestabilności dynamicznej dla zaburzeń, odpowiednio, radialnych i nieradialnych.

Dla ilustracji rozpatrzymy przypadek czystego gazu wodorowego. Oznaczymy przez s stopień jonizacji. Liczba elektronów w 1 cm^3 dana jest przez

$$N_e = \frac{\rho s}{m}$$

Równanie Sahy, po podstawieniu odpowiednich stałych, redukuje się do

$$\frac{s^2}{1-s} = 4.01 \times 10^{-9} \frac{T^{1.5}}{\rho} {\rm e}^{-\theta}, \tag{123}$$

gdzie

$$\theta \equiv \frac{\Xi_{1,1}}{kT} = \frac{1.578 \times 10^5}{T}.$$

Mamy

$$p_g = \frac{kT\rho}{m}(1+s).$$

Ze (108) i (123) dostajemy

$$\chi_\rho = \frac{2}{(2-s)(1+s)} \quad \text{i} \quad \chi_T = \frac{(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5+\theta)}{(2-s)(1+s)}.$$

Energia wewnętrzna dana jest wzorem

$$u_g = \frac{3}{2}\frac{kT}{m}(1+s) + s\frac{\Xi_{1,1}}{m} = \frac{kT}{m}(1.5 + 1.5s + s\theta).$$

Różniczkując, znajdujemy

$$c_v T = \frac{kT}{m}\left(1.5 + 1.5s + \frac{s(1-s)}{2-s}(1.5+\theta)^2\right)$$

i

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{kT}{m}\frac{s(1-s)(1.5+\theta)}{2-s}.$$

Używając dwóch ostatnich wzorów w (111), dostajemy

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5+\theta)}{1.5(1+s)(2-s) + s(1-s)(1.5+\theta)^2} \tag{124}$$

Zadanie Proszę wyprowadzić podobne wyrażenia na $\nabla_{\rm ad}$ i Γ_1.

Na rysunku 2 wykreślone są wartości $\log T$ i pochodnych adiabatycznych w funkcji $\log \rho$ w miejscach gdzie $s = 1/2$.

5.4 Promieniowanie doskonale czarne

We wnętrzach gwiazd poniżej fotosfery promieniowanie może być traktowane, w bardzo dobrym przybliżeniu, jako relatywistuczny gaz bozonów pozostający w lokalnej równowadze termodynamicznej z pozostałymi składnikami materii. Do ciśnienia i gęstości energii wewnętrznej gazu dodajemy więc wkład od promieniowania. Piszemy

$$p = p_{\rm g} + p_{\rm rad} \quad \text{i} \quad u = u_{\rm g} + u_{\rm rad}, \tag{125}$$

W rozdziale poświęconym transportowi energii przez promieniowanie wyprowadzimy następujące wyrażenia na ciśnienie i energię wewnętrzną gazu fotonowego.

$$p_{\rm rad} = \frac{aT^4}{3} \text{ i } u_{\rm rad} = \frac{aT^4}{\rho} \tag{126}$$

Dla materii złożonej z całkowicie zjonizowanego gazu i promieniowania, wszystkie potrzebne pochodne termodynamiczne można wyrazić przez

$$\beta = \frac{p_{\rm g}}{p} = \left(1 + \frac{am\mu T^3}{3k\rho}\right)^{-1}. \tag{127}$$

Używając wzorów(125-127) w (108), dostajemy

$$\chi_T = 4 - 3\beta \quad \text{i} \quad \chi_\rho = \beta, \tag{128}$$

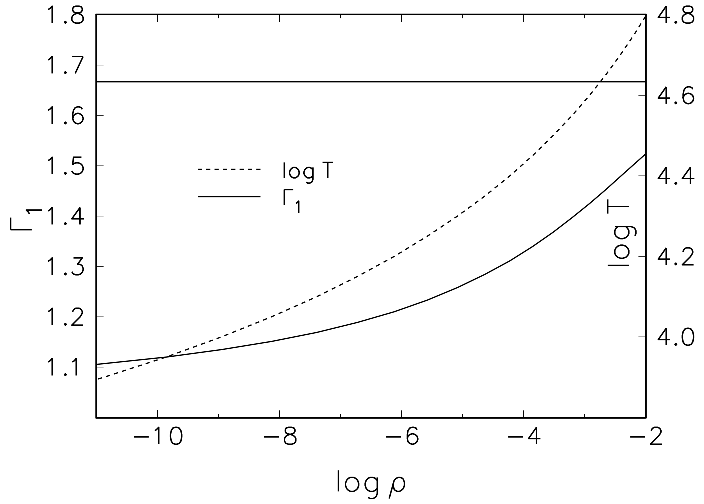
a następnie z równań (111-113)

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{2}{3}\frac{4-3\beta}{8-7\beta}, \tag{129}$$

$$\nabla_{\rm ad} = \frac{8-6\beta}{32-24\beta-3\beta^2}, \tag{130}$$

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{2}{3}\frac{(4-3\beta)^2}{8-7\beta}. \tag{131}$$

Łatwo sprawdzić, że dla β malejącego od 1 do 0, $\nabla_{\rm ad}$ maleje monotonicznie od 0.4 do 0.25, a Γ_1 od 5/3 do 4/3. Promieniowanie wpływa destabilizująco na równowagę dynamiczną gwiazd. W mechanice newtonowskiej, efekt ten nie może samodzielnie spowodować niestabilności względem zaburzeń radialnych. Jednak przy uwzględnieniu efektów relatywistycznych, niestabilność występuje już dla Γ_1 nieco większych niż 4/3 (rów. 81).



Parametry wzdłuż lini $s = \frac{1}{2}$. Linia pozioma pokazuje wartość $\Gamma = \frac{5}{3}$ dla gazu doskonałego.

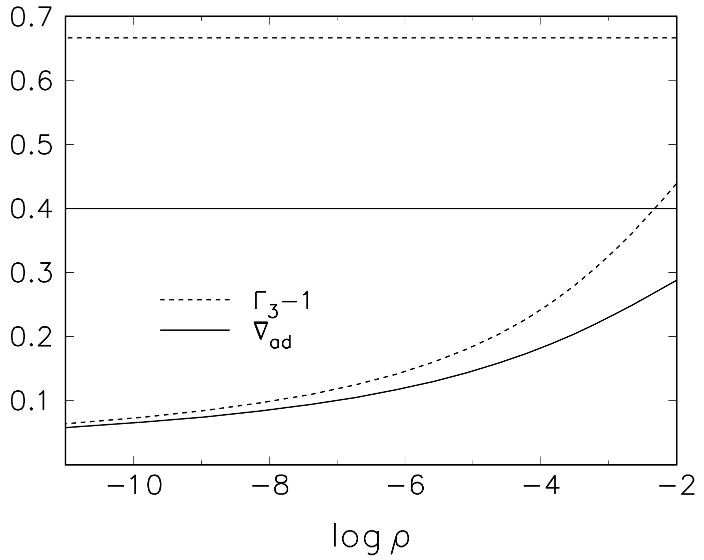


Figure 2: Wartości $\Gamma_3 - 1$ i $\nabla_{\rm ad}$ wzdłuż linii $s = \frac{1}{2}$. Linie poziome pokazują wartości $\Gamma_3 - 1 = \frac{2}{3}$ i $\nabla_{\rm ad} = \frac{2}{5}$ dla niezjonizowanego gazu doskonałego.

5.5 Elektronowy gaz zdegenerowany

Zapiszemy zakaz Pauliego dla elektronów w postaci

$$dN_e(|\boldsymbol{p}|) \leq \frac{2}{h^3} 4\pi |\boldsymbol{p}|^2 d|\boldsymbol{p}|. \tag{132}$$

Dla gazu niezdegenerowanego mamy silną nierówność, znak = odpowiada pełnej degeneracji. Rozważymy wpierw ten przypadek. Oznaczymy przez p_F maksymalną wartość modułu pędu (*pęd Fermiego*) i po scałkowaniu dostajemy

$$N_e = \frac{2}{h^3}\frac{4\pi}{3} p_F^3.$$

Z drugiej strony

$$N_e = \frac{\rho}{m\mu_e} \approx \frac{\rho(1+X)}{2m}.$$

Stąd

$$p_F = h\left[\frac{3(1+X)\rho}{16\pi m}\right]^{1/3}. \tag{133}$$

Teraz, postępując tak jak w przypadku – doskonałego, wyliczymy ciśnienie gazu elektronowego, p_e, jako całkę

$$p_e = \int_0^{p_F} p_x v_x dN(|\boldsymbol{p}|).$$

W przypadku nierelatywistycznych elektronów mamy $\boldsymbol{p} = m_e\boldsymbol{v}$. Po scałkowaniu dostajemy

$$p_e = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5.$$

Podstawiając wyrażenie na p_F, mamy ostatecznie

$$p_e = K\rho^{5/3} \text{ z } K = \frac{8\pi h^2}{15 m_e}\left[\frac{3(1+X)}{16\pi m}\right]^{5/3}. \tag{134}$$

Liczbowo, $K = 3.16 \times 10^{12}$ dla $X = 0$.

W przypadku pełnej degeneracji elektronów wkład niezdegenerowanego gazu jąder atomowych, p_j, do całkowitego ciśnienia jest mały. Mamy

$$\frac{p_j}{p_e} = \frac{k}{m\mu_j K}\frac{T}{\rho^{4/3}} = \frac{2.6\times 10^{-4}}{\mu_j}\frac{T_9}{\rho_6^{4/3}}, \tag{135}$$

gdzie $\mu_j \approx 1/(X+0.25Y)$, $T_9 = T/10^9$K i $\rho_6 = \rho/10^6$gcm^{-3}. W białych karłach, poza cienką warstwą zewnętrzną, zachodzi $p_j/p_e \ll 1$. Jeśli więc efekty relatywistyczne są do zaniedbania, to strukturę wewnętrzną białego karła opisuje w przybliżeniu politropa $n = 1.5$. Z równań (56) i (134) dostajemy, po podstawieniu stałych,

$$\frac{R}{R_\odot} = 3.15 \times 10^{-3} \frac{M}{M_\odot}^{-1/3}. \tag{136}$$

W granicy ultrarelatywistycznej ($v \to c$) mamy

$$p_x v_x = \frac{c|\boldsymbol{p}|}{3}.$$

Teraz po całkowaniu mamy

$$p_e = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4$$

i eliminując p_F dostajemy

$$p_e = K\rho^{4/3} \quad \text{z} \quad K = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left(\frac{1+X}{2m}\right)^{4/3}. \tag{137}$$

Dla $X = 0$ mamy teraz $K = 4.89 \times 10^{14}$. W tym przypadku mamy strukturę politropową z $n = 3$. Masa takiego obiektu (*masa Chandrasekhra*) wynosi $M_{Ch} = 1.459$ (por. zadanie na końcu rozdz. 2) i wyznacza nieosiągalne maksimum masy gwiazdy zbudowanej z gazu zdegenerowanych elektronów i niezdegenerowanych jąder atomowych.

Dla obliczeń realistycznych modeli gwiazd potrzebne są nam zależności termodynamiczne dla gazu elektronowego, który jest tylko częściowo zdegenerowany i umiarkowanie relatywistyczny. To drugie oznacza, że na pęd elektronu powinniśmy używać wyrażenia

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_e \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - (|\boldsymbol{v}|/c)^2}}, \tag{138}$$

a na energię kinetyczną

$$E_e = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{m_e^2 c^2}} - 1\right). \tag{139}$$

Rozkład pędów częściowo zdegenerowanego gazu elektronowego opisuje *statystyka Fermiego-Diraca*

$$dN_e(|\boldsymbol{p}|) = \frac{8\pi}{h^3} |\boldsymbol{p}|^2 \frac{1}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)} d|\boldsymbol{p}|, \tag{140}$$

gdzie ψ jest *parametrem degeneracji*, do wyznaczenia w funkcji T i ρ. Mamy teraz

$$\frac{\rho(1+X)}{2m} = N_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{p}|^2 d|\boldsymbol{p}|}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)}. \tag{141}$$

$$p_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{p}|^3 v d|\boldsymbol{p}|}{1 + \exp(E_e/kT - \psi)}. \tag{142}$$

Energia wewnętrzna gazu elektronowego na gram dana jest wyrażeniem

$$u_e = \frac{8\pi}{h^3\rho}\int_0^\infty \frac{E_e|\boldsymbol{p}|^2 d|\boldsymbol{p}|}{1+\exp(E_e/kT-\psi)}. \tag{143}$$

Równania (138-143) dają wystarczającą podstawę do wyliczenia – z uwzględnieniem efektów relatywistycznych i kwantowych – wszystkich potrzebnych wielkości termodynamicznych dla doskonałego gazu elektronowego. Sposób jest jednak dość zawikłany. Rozpatrzymy przypadki graniczne, zaczynając od pełnej degeneracji.

Przypadek pełnej degeneracji odpowiada granicy

$$\psi \to \infty \text{ i } T \to 0.$$

Mamy wtedy

$$\frac{1}{1+\exp(E_e/kT-\psi)} \to \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{jeżeli } E_e < \psi kT \\ 0 & \text{jeżeli } E_e > \psi kT \end{array} \right. . \tag{144}$$

Wyliczymy p_e dla tego przypadku. Wprowadzamy oznaczenia

$$x \equiv \frac{|\boldsymbol{p}|}{m_e c} \quad \text{i} \quad x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c}$$

i korzystamy z równości

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{cx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Wynik prostego całkowania (141) można teraz zapisać jako

$$\rho = \frac{16\pi m_e^3 m c^3}{3h^3(1+X)} x_F^3. \tag{145}$$

Ze (142) z wykorzystaniem (144) dostajemy na ciśnienie

$$p_e = \frac{\pi c^5 m_e^4}{3h^3}\mathcal{I}_1, \tag{146}$$

gdzie

$$\mathcal{I}_1 = 8\int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x_F(2x_F^2-3)\sqrt{1+x_F^2} + 3\ln(x_F + \sqrt{1+x_F^2}),$$

a ze (143) następujące jawne wyrażenie na energię wewnętrzną

$$u_e = \frac{\pi c^5 m_e^4}{3h^3\rho}\mathcal{I}_2, \tag{147}$$

gdzie

$$\mathcal{I}_2 = 24\int_0^{x_F}(\sqrt{1+x^2}-1)x^2dx = 8x_F^3(\sqrt{1+x_F^2}-1)-\mathcal{I}_1.$$

W granicy nierelatywistycznej mamy

$$x_F \to 0\ ,\ \mathcal{I}_1 \to \frac{8}{5}x_F^5\ ,\ \mathcal{I}_2 \to \frac{12}{5}x_F^5,$$

a w granicy ultrarelatywistycznej mamy

$$x_F \to \infty\ ,\ \mathcal{I}_1 \to 2x_F^4\ ,\ \mathcal{I}_2 \to 6x_F^4.$$

Skąd wynikają, otrzymane już wcześniej, zależności politropowe między p_e i ρ. O wielkości poprawek relatywistycznych decyduje parametr x_F. Gdy $X = 0$, mamy

$$x_F = 7.87 \times 10^{-3}\rho^{1/3} \tag{148}$$

zadanie: Proszę, wyznaczyć górną granicę masy zimnego białego karła, którego strukturę można przybliżać politropą $n = 1.5$. Jako kryterium przyjąć względny błąd ciśnienia $\Delta p/p \leq 0.05$ w całym wnętrzu. Zakładamy $X = 0$, całkowitą jonizację i zaniedbujemy ciśnienie gazu jąder atomowych.

Przypadek częściowej degeneracji rozważymy w nierelatywistycznej granicy. W równaniach (141-143) kładziemy więc

$$E_e = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m_e}\ \text{i}\ |\boldsymbol{v}| = \frac{|\boldsymbol{p}|}{m_e}.$$

Definiujemy *całki Fermiego-Diraca* wzorem

$$F_n(\psi) \equiv \int_0^\infty \frac{y^n}{1+\exp(y-\psi)}dy \tag{149}$$

i dostajemy

$$\rho = \frac{8\pi m(2m_ekT)^{3/2}}{h^3(1+X)}F_{1/2}(\psi) \tag{150}$$

i

$$p_e = \frac{4\pi(2m_ekT)^{5/2}}{h^3m_e}F_{3/2}(\psi). \tag{151}$$

Energię mamy, podobnie jak dla gazu niezdegenerowanego,

$$u_e = \frac{3}{2}\frac{p_e}{\rho} \tag{152}$$

Zauważmy, że parametr degeneracji zależy od parametrów termodynamicznych tylko poprzez $\rho(1+X)/T^{3/2}$. Granica gazu niezdegenerowanego odpowiada $\psi \to -\infty$. Wtedy jedynkę w mianowniku wzoru (140) można zaniedbać. Rozkład

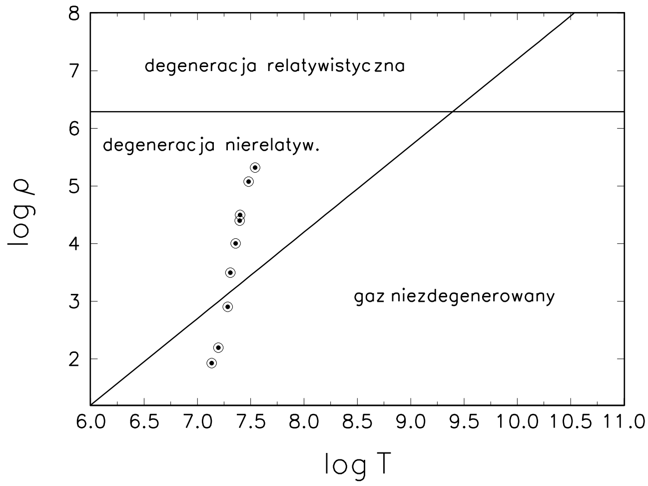


Figure 3: Obszary degeneracji na diagramie $\rho - T$ dla gazu bezwodorowgo X. Linia diagonalna odpowiada $C_{\rm deg} = 1$ w równaniu (153). Linia horyzontalna odpowiada $x_F = 1$ w równaniu (148). Symbole $\odot$ odpowiadają parametrom centralnym modeli gwiazdy populacji I z $M = 1M_\odot$ w ciągu pierwszych 12 miliardów jej ewolucji. Pierwsze trzy modele znajdują się w fazie ciągu głównego.

Fermiego-Diraca przechodzi w rozkład Maxwella-Boltzmana. Z porównania ze wzorem (119) wynika, że w tej granicy mamy

$$\mathrm{e}^{\psi} \to \frac{h^3(1+X)\rho}{4m(2\pi m_e kT)^{3/2}}.$$

Stąd wniosek, że efekty degeneracji są zaniedbywalne, jeśli

$$\frac{\rho(1+X)}{T^{3/2}} \ll C_{\rm deg} \equiv \frac{4m(2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ c.g.s.K..} \qquad (153)$$

Wyrażenia termodynamiczne dla gazu złożonego z częściowo zdegenerowanych elektronów i niezdegenerowanych nukleonów otrzymujemy z

$$p_g = p_j + p_e \text{ i } u_g = u_j + u_e,$$

gdzie

$$p_j = \frac{kT\rho}{m}(X + 0.25Y) \text{ i } u_j = \frac{p_j}{3\rho}.$$

Zadanie: Proszę wyprowadzić wyrażenia na Γ_1 i $\nabla_{\rm ad}$ dla gazu złożonego z całkowicie zdgenerowanych elektronów i niezdegenerowanych jąder. Uprościć wzory dla granicy nie- i ultra- relatywistycznej.

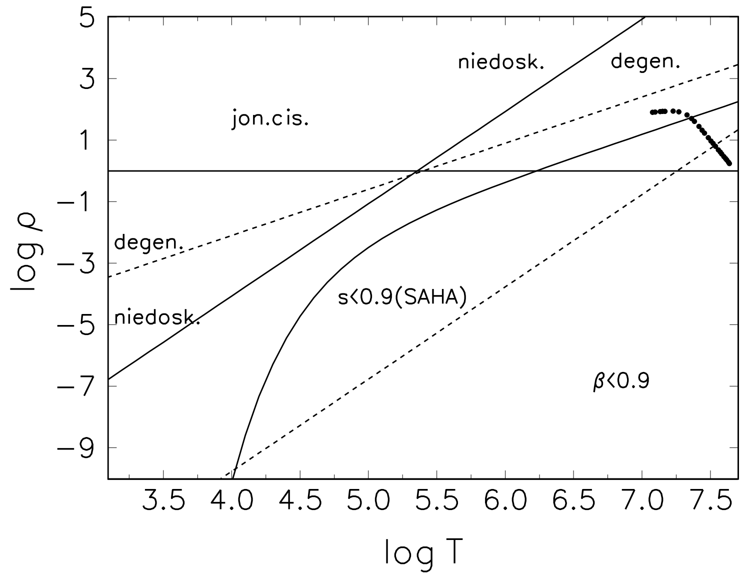


Figure 4: Obszary stosowalności różnych uproszczeń a diagramie $\rho - T$ dla wodoru. Na lewo od linii $\beta = p_g/p = 0.9$ wkład ciśnienia promieniowania jest zaniedbywalny. Na prawo od linii s (stopień jonizacji)=0.9 i powyżej $\log\rho = 0$ wodór jest zjonizowany. Powyżej ciągłej linii diagonalnej istotne są efekty oddziaływań elektrostatycznych. Powyżej przerywanej linii diagonalnej istotna jest degenaracja wolnych elektronów. Kropki odpowiadają centralnym parametrom modeli gwiazd populacji I wieku zero, o masach od 0.85 do $100M_\odot$.

5.6 Gaz niedoskonały

Przybliżenie gazu doskonałego polega na zaniedbaniu oddziaływań miedzy cząsteczkami w energii wewnętrznej. Oddziaływania elektrostatyczne wnoszą istotny wkład do energii, gdy typowa odległość miedzy jonami D jest na tyle mała, że

$$\Gamma_c \equiv \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{DkT} \sim 1,$$

gdzie $\mathcal{Z}e$ jest reprezentatywnym ładunkiem elektrostatycznym jąder. Ocenę odległośći D daje promień *sfery Wignera-Seitza*, $r_{\rm WS}$, wyznaczony równaniem

$$\frac{4\pi r_{\rm WS}^3}{3} = \frac{1}{N_j} = \frac{m\mu_j}{\rho}.$$

N_j oznacza ilość jonów w jednostce objętości. Jeżeli gaz składa się wyłącznie z wodoru, to linię ograniczającą obszar stosowalności przybliżenia gazu doskonałego na diagramie $\rho - T$ wyznacza równanie

$$\rho = 8.5 \times 10^{-17} \Gamma_c^3 T^3. \tag{154}$$

W warunkach niskich temperatur i wysokich gęstości następuje *krystalizacja materii*. Efekt ten jest istotny dla zimnych białych karłów. Oszacowanie daje wartość $\Gamma_c \approx 170$, przy której następuje krystalizacja.

Równanie Sahy (122) dobrze opisuje stan jonizacji tylko dla odpowiednio niskich gęstości. Jeżeli odległości między atomami stają się porównywalne z ich rozmiarami, to dochodzi do jonizacji niezależnie od temperatury (atomy w metalach są zjonizowane w temperaturach pokojowych). Efekt ten nosi nazwę *jonizacji ciśnieniowej*. Dla gazu wodorowego ocenę gęstości, przy której ona zachodzi daje równość

$$r_{\rm WS} = \text{ promień Bohra } = 5 \times 10^{-9} \text{ cm},$$

co odpowiada

$$\rho \approx 1 \text{g cm}^{-3}.$$

Uwzględnienie efektów oddziaływań między cząsteczkami gazu w równaniu stanu wymaga skomplikowanych obliczeń numerycznych. W modelowaniu gwiazd korzysta się obecnie najczęściej z tablic OPAL, w których wszystkie potrzebne wielkości termodynamiczne są stablicowane w funkcji parametrów T i ρ/T^3 dla różnych składów chemicznych. Tablice te są wynikiem obliczeń opartych na *modelu fizycznym*, w którym elementami są elektrony (związane lub wolne) i nukleony. Dostępne są również tablice MHD, wynik obliczeń opartych na *modelu chemicznym*, w którym elementami gazu są elektrony i jony.

5.7 Neutronizacja

We wnętrzach gwiazd neutronowych gęstość materii przekracza gęstość materii jądrowej wynoszącą ok. 2×10^{14} g cm^{-3}. W tych warunkach jądra atomowe rozpadają się na swobodne nukleony. Znaczące ilości swobodnych neutronów mogą występować już przy przekroczeniu gęstości 1.2×10^7g cm^{-3}, co odpowiada energii Fermiego $E_F = p_F^2/2m_e = c^2(m_n - m_p - m_e)$. Przy takich gęstościach swobodny neutron nie rozpada się (charakterystyczny czas rozpadu neutronu w normalnych warunkach wynosi 11 min), bo poziomy energetyczne z $E_e < E_F$ są zajęte.

Względne obfitości neutronów wyznacza równowaga rozpadów β

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

i procesów odwrotnych

$$p + e^- \rightarrow n + \nu.$$

Przy gęstościach $\sim 10^{14}$ g cm^{-3} protony i neutrony są już zdegenrowane. Ze wzrostem gęstości rośnie względna obfitość neutronów.

Pierwsze modele gwiazd neutronowch (Oppenheimer i Volkoff, 1939) były konstruowane przy założeniu równania stanu dla nierelatywistycznych fermionów, $p \propto \rho^{5/3}$, z wykorzystaniem relatywistycznego warunku równowagi hydrostatycznej (20). Rozwiązania istniały tylko dla mas w zakresie $M = 0.2 - 0.76 M_{\odot}$. Wyznaczone promienie gwiazd znalazły się w zakresie, odpowiednio $R = 26 - 9$ km. Dla porównania promień białego karła o masie $0.76 M_{\odot}$ jest równy $0.0115 R_{\odot} = 8000$ km. Ta ogromna różnica wynika przede wszystkim ze stosunku mas neutronu i elektronu. Stosując wzór (134) do gwiazd neutronowych należy zastąpić m_e przez m_n.

Oppenheimer i Volkoff pominęli nieznane wtedy efekty oddziaływań jądrowych, tworzenie hiperonów i pionów. Dotąd nie mamy dobrej teorii budowy materii o gęstościach przekraczjących 2×10^{14} g cm^{-3}. Rozmaite współczesne równania stanu prowadzą do górnego ograniczenia na masę gwiazdy neutronowej w przedziale $1.5 - 2.5 M_{\odot}$. Dobrze wyznaczone obserwacyjnie masy mieszczą się w granicach $1.32 - 1.44 M_{\odot}$. Są więc niższe od wszystkich współczesnych górnych ograniczeń, ale wyraźnie wyższe od historycznej wartości masy maksymalnej. Różne równania stanu prowadzą do zbliżonych promienii i centralnych gęstości gwiazd neutronowych $R = (11 \pm 1)$ km i $\rho_c \approx 10^{15}$ g cm^{-3}.