6 Transport energii przez promieniowanie i przewodnictwo

6.1 Przybliżenie dyfuzyjne dla promieniowania

Podstawową wielkością dla opisu transportu energii przez promieniowanie (*transferu promieniowania*) jest monochromatyczne natężenie $I_\nu(r,\theta)$ oznaczające ilość energii emitowanej w zakresie częstotliwości fali $\nu, \nu + d\nu$, z powierzchni $d\Sigma$, w czasie dt, w kąt bryłowy $d\varpi$ wokół osi tworzącej kąt θ z lokalną normalną do sfery r.

Z tej definicji wynika następujący wzór na gęstość energii fotonów z przedziału $\nu, \nu + d\nu$.

$$E_\nu = \frac{1}{c} \int d\varpi I_\nu(r,\theta), \tag{155}$$

którym czynnik $1/c$ pojawił się z powodu zamiany czasu, dt, na wysokość elementu objętości, oraz wzór na gęstość energii promieniowania

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu. \tag{156}$$

Wyrażenie na monochromatyczny strumień energii dostaniemy całkując przyczynki z różnych kątów. Stąd, uwzględniając czynnikiem $\mu \equiv \cos\theta$ nachylenie elementu powierzchni, mamy

$$\mathcal{F}_\nu = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(r,\theta)\mu d\mu. \tag{157}$$

Całkowity strumień energii emitowanej przez sferę o promieniu r dany jest zatem przez

$$L_{\mathrm{rad},r} = 4\pi r^2 \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu. \tag{158}$$

Ciśnienia promieniowania wyliczymy całkując składowe normalne (stąd dodatkowy czynnik μ) pędów fotonów

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{1} \int_0^\infty I_\nu(r,\theta) d\nu \mu^2 d\mu. \tag{159}$$

Tu czynnik $1/c$ wynika z zamiany energii na pęd.

Dla wnętrz gwiazdowych , w dobrym przybliżeniu, można założyć, że promieniowanie jest w lokalnej równowadze termodynamicznej z gazem. W tym przybliżeniu rozkład natężenia jest izotropowy, a zależność od ν dana jest *funkcją Plancka.*

$$I_\nu = \mathcal{B}_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{160}$$

Wzór ten uzyskać można z *rozkładu Bosego* dla cząstek o zerowym potencjale chemicznym. Z tym wyrażeniem dostajemy, kolejno ze (155-156) i (159),

$$E_\nu = \frac{4\pi}{c}\mathcal{B}_\nu, \tag{161}$$

$$E = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \mathcal{B}_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c}B(T) = aT^4 = u_{\rm rad}\rho. \tag{162}$$

Wielkość

$$a \equiv \frac{4\pi\sigma}{c} = \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp(x)-1}$$

nazywa *stałą promieniowania* a σ *stałą Stefana-Boltzmana*, i

$$p_{\rm rad} = \frac{aT^4}{3}. \tag{163}$$

Oczywiście nie można tego przybliżenia używać do wyliczania strumienia, który wynika z anizotropii pola promieniowania. W tym przypadku skorzystamy z tego, że we wnętrzach gwiazdowych droga swobodna fotonu jest krótka w porównaniu z temperaturową skalą odległości, H_T, a zatem, że transfer promieniowania można traktować jako dyfuzję fotonów. Ogólne równanie dyfuzji (*prawo Ficka*), zapiszemy w postaci.

$$\boldsymbol{f}_C = -\mathcal{D}\boldsymbol{\nabla} C. \tag{164}$$

$\boldsymbol{f}_C$ oznacza tu strumień czegoś, C gęstość tego samego, a $\mathcal{D}$ współczynnik dyfuzji, który wyraża się wzorem

$$\mathcal{D} = \frac{v_p\ell_p}{3}, \tag{165}$$

w którym v_p jest średnią prędkością cząstek przenoszących, a ℓ_p ich drogą swobodną. Dla energii fotonów z przedziału $\nu, \nu + d\nu$ mamy

$$f_{C,r} = \mathcal{F}_\nu \ , \ v_p = c \ , \ \ell_p = \frac{1}{\kappa_\nu\rho} \ , \ C = E_\nu, \tag{166}$$

gdzie κ_ν oznacza monochromatyczny współczynnikiem nieprzezroczystości obejmujący łącznie absorbcję i rozpraszanie. Wyliczaniu tego współczynnika poświęcony jest podrozdział 6.4. W naszym zatosowaniu mamy więc

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{3\kappa_\nu\rho}\frac{dE_\nu}{dr} = \frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho}\frac{d\mathcal{B}_\nu}{dT}\frac{dT}{dr}. \tag{167}$$

Inną drogę do tego równania poznamy w podrozdziale 6.3.

Po podstawieniu do (157) wyrażenia (167) na $\mathcal{F}_\nu$, dostaniemy

$$L_{{\rm rad},r} = -\frac{16\pi acr^2T^3}{3\kappa_R\rho}\frac{dT}{dr}. \tag{168}$$

Wprowadziliśmy tu *średni współczynnik nieprzezroczystości Rosselanda*, κ_R, zdefiniowany wzorem

$$\frac{1}{\kappa_R} = \left(\frac{dB}{dT}\right)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dT} d\nu, \tag{169}$$

gdzie

$$B \equiv \int_0^\infty \mathcal{B}_\nu d\nu = \frac{acT^4}{4\pi}. \tag{170}$$

6.2 Molekularny strumień ciepła

W zastosowaniu do przewodnictwa ciepła, prawo Ficka prowadzi do

$$\frac{L_{\mathrm{mol},r}}{4\pi r^2} = -\mathcal{D}_e c_v \frac{dT}{dr}, \tag{171}$$

z $\mathcal{D}_e = v_e \ell_e/3$. Przewodnictwo jest zwykle mniej wydajną formą transportu energii niż transfer promieniowania ($v_e \ll c$, $\ell_e \ll 1/\kappa_R \rho$). Jest ono istotne jedynie w obszarach degeneracji elektronów.

Równania (168) i (171) można połączyć w następujące równanie.

$$L_r = -\frac{16\pi acr^2T^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr}, \tag{172}$$

gdzie

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_R} + \frac{3\mathcal{D}_e c_v \rho}{4acT^3}.$$

6.3 Transport promieniowania atmosferach gwiazdowych

W atmosferach gwiazdowych pole promieniowania jest silnie anizotropowe. Na prawdę, warunek jaki możemy nałożyć na strumień na zewnętrznym brzegu gwiazdy wynika z

$$I_\nu(\theta, R) = 0 \quad \text{dla} \quad \theta \in [\pi/2, \pi] \tag{173}$$

jest skrajnie nieizotropowy. Ponadto, droga swobodna fotonu w atmosferze jest porównywalna lub dłuższa od temperaturowej skali odległości, a więc wydaje się, że nie można nawet w grubym przybliżeniu korzystać z równania (172).

Do opisu zmian intensywności, I_ν, w atmosferach gwiazdowych stosuje się *równanie transferu*,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = (-\kappa_\nu I_\nu + j_\nu)\rho \tag{174}$$

w którym j_ν jest monochromatycznym współczynnikiem emisji, a $ds = dr/\mu$. Równanie to wynika wprost z bilansu strat i zysków na drodze ds. W lokalnej równowadze termodynamicznej współczynniki j_ν i κ_ν wiąże *prawo Kirchoffa*, $j_\nu = \kappa_\nu \mathcal{B}_\nu$. Mamy więc proste równanie na I_ν,

$$\mu\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - I_\nu = -\mathcal{B}_\nu(T), \tag{175}$$

gdzie

$$\tau_\nu = \int_r^R \kappa_\nu \rho d\tilde{r}$$

nazywa się *monochromatyczną głębokością optyczną*. Po scałkowaniu dostajemy

$$I_\nu = I_0 \exp\left(\frac{\tau_\nu - \tau_{\nu,0}}{\mu}\right) - \exp\left(\frac{\tau_\nu}{\mu}\right) \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} \exp\left(-\frac{\tilde{\tau}_\nu}{\mu}\right) \mathcal{B}(\tilde{\tau})\frac{d\tilde{\tau}}{\mu}.$$

Jeżeli $\mathcal{B}$ jest wolnozmienną funkcją τ_ν, to w tym wyrażeniu można położyć

$$\mathcal{B}(\tilde{\tau}_\nu) = \mathcal{B}(\tau_\nu) + \frac{d\mathcal{B}}{d\tau_\nu}(\tilde{\tau}_\nu - \tau_\nu).$$

Wybierając $\tau_0 = \infty$ dla $\mu > 0$ i $\tau_0 = 0$ (tu korzystamy z warunku 173) dla $\mu < 0$, otrzymamy zależmość

$$I_\nu = \mathcal{B}(\tau_\nu) + \frac{d\mathcal{B}}{d\tau_\nu}\mu, \tag{176}$$

wiążącą gradient temperatury z anizotropią intensywności promieniowania. Po podstawieniu tego wyrażenia do (157) dostaniemy wyrażenie (167) na strumień promieniowania.

W klasycznym modelu Eddingtona anizotropię sprowadza się do rozróżnienia strumienia skierowanego na zewnątrz ("z") i do wewnątrz ("w"). Mamy więc

$$I_\nu(\mu) \equiv \begin{cases} I_z & \text{dla } \mu > 0 \\ I_w & \text{dla } \mu < 0 \end{cases} \tag{177}$$

Dalej, zaniedbuje się zależność κ i j od ν (*model atmosfery szarej*), co sprowadza równanie(175) do postaci

$$\mu\frac{dI}{d\tau} - I = -B(T). \tag{178}$$

Oznaczamy przez I_z i I_w odpowiednie intensywności scałkowane po częstotliwości (odtąd wskaźnik ν nie będzie już potrzebny). Ponadto zakładamy, podobnie jak to się przeważnie robi także w przypadku zaawansowanych modeli atmosfer, równowagę cieplną i zaniedbuje krzywiznę, kładąc $4\pi r^2\mathcal{F} = L_r = L$, gdzie L oznacza strumień promieniowania gwiazdy, oraz przyjmując $r \approx R$.

Używając (177) w wyrażeniach (156-159), dostajemy, kolejno,

$$E = \frac{4\pi B}{c} = \frac{2\pi}{c}(I_z + I_w). \tag{179}$$

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi r^2} = \pi(I_z - I_w). \tag{180}$$

$$p_{\rm rad} = \frac{2\pi}{3c}(I_z + I_w) = \frac{E}{3}. \tag{181}$$

Teraz mnożymy (178) przez $2\pi\mu/c$ i całkujemy od -1 do 1, skąd dostajemy

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{3}{c}\mathcal{F}. \tag{182}$$

Nietrudno sprawdzić, że to równanie jest równoważne (168), chociaż dla jego wyprowadzenia nie korzysta się z założenia $\tau \gg 1$. Tak więc w tym przybliżeniu, dla modelowania atmosfery można używać tych samych równań, co dla reszty gwiazdy. Całkowanie (171) z wykorzystaniem warunku brzegowego $I_w(0) = 0$, prowadzi do

$$E = \frac{3}{c}\mathcal{F}\left(\tau + \frac{2}{3}\right). \tag{183}$$

Korzystając ze (158) ostatecznie dostajemy

$$T^4 = \frac{3}{ac}\frac{L}{4\pi R^2}\left(\tau + \frac{2}{3}\right) = T_{\rm eff}^4\left(\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2}\right). \tag{184}$$

Równanie to daje nam zewnętrzny warunek brzegowy dla $\tau = 0$. Model Eddingtona uzupełnia warunek równowagi hydrostatycznej , który korzystając z definicji głębokości optycznej (τ, rów. 175), można zapisać w postaci

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}, \tag{185}$$

gdzie $g = GM/r^2$ można traktować jako wielkość stałą w atmosferze. Całkowanie tego równania można zacząć od miejsca gdzie gęstość jest dostatecznie mała n.p. $\rho = 10^{-12}{\rm g\ cm}^{-3}$, ponieważ wkład do τ pochodzący od warstw leżących powyżej jest zaniedbywalny.

Eddingtonowskie prawo pociemnienia brzegowego ($I = I_0(1 + 1.5\mu)$ dla $\tau = 0$) dostaniemy po podstawieniu (182) i (183) do (176).

Oczywiście lepiej zamiast modelu Eddingtona używać zaawansowanych modeli atmosfer, uwzględniających zależność $\kappa(\nu)$, opartych na ścisłych rozwiązaniach równania (174), oraz ewentualnie uwzględniających krzywiznę i odstępstwa od lokalnej równowagi termodynamicznej. Zastosowanie dokładnych modeli rzadko jednak ma istotne konsekwencje dla opisu struktury wnętrza.

Na powierzchni gwiazdy istotny jest warunek

$$\frac{dp_g}{dr} < 0 \text{ dla } r = R,$$

który prowadzi do górnego ograniczenia na jasność gwiazdy, nazywanego *jasnością Eddingtona*, $L_{\rm Edd}$. Korzystając za (181) i (182) można tej nierówności nadać postać

$$\frac{dp_g}{dr} = \rho\left(\kappa\frac{dp_{\rm rad}}{d\tau} - \frac{GM}{r^2}\right) = \rho\left(\frac{\mathcal{F}\kappa}{c} - \frac{GM}{r^2}\right) \le 0.$$

Zatem

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa(R)}. \tag{186}$$

Dla obiektów gorących, dla których dominującym źródłem nieprzezroczystości w atmosferach jest rozpraszanie na wolnych elektronach. Wtedy $\kappa(R) \approx 0.2(1+X)$ (patrz wzór (189))i dla $X = 0.7$ dostajemy liczbowo

$$\frac{L_{\rm Edd}}{L_\odot} \approx 3.5 \times 10^4 \frac{M}{M_\odot}. \tag{187}$$

Dla gwiazdy wieku zero o masie $100M_\odot$ mamy $L = 0.37L_{\rm Edd}$.

6.4 Współczynnik nieprzezroczystości

Zapominamy tu o przewodnictwie molekularnym i pod κ będziemy rozumieć średni współczynnik nieprzezroczystości Rosselanda, który jest związany ze współczynnikiem monochromatycznym, κ_ν, wzorem (169). Jeżeli przez $\sigma_{\nu,j}$ oznaczymy przekrój czynny na cząsteczkę dla określonego procesu (j) absorbcji lub rozpraszania fotonów o energii $h\nu$, to możemy napisać

$$\kappa_\nu = \frac{1}{\rho}\sum_j N_j \sigma_{\nu,j}, \tag{188}$$

gdzie N_j oznacza ilość cząsteczek odpowiedzialnych za proces j w jednostce objętości.

6.4.1 Efekt Comptona

Przekrój czynny na rozpraszanie fotonów na elektronach opisany jest wzorem *Kleina–Nishiny.* Jeżeli prędkości elektronów można traktować jako nierelatywistyczne ($kT \ll m_e c^2$, czyli $T \ll 6 \times 10^9$K), to wzór redukuje się do postaci *Thompsona*

$$\sigma_e = \frac{8r_e^2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 6.65 \times 10^{-24}\ {\rm cm}^2,$$

w której nie ma zależności od ν. Stąd, po skorzystaniu ze (188) i z $N_e = (1 + X)\rho/2m$, dostajemy następujący prosty wzór na współczynnik nieprzezroczystości wynikający z rozpraszania na nierelatywistycznych elektronach

$$\kappa_e = 0.2(1+X)\ {\rm cm}^2{\rm g}^{-1}. \tag{189}$$

Ponieważ rozpraszanie jest tylko jednym z procesów ograniczających drogę swobodną, ℓ_p fotonów, to wynika stąd ważna nierówność

$$\ell_p < \frac{5{\rm gcm}^{-3}}{\rho(1+X)}\ {\rm cm}. \tag{190}$$

Zadanie: Źródłem nieprzezroczystość materii jest rozpraszanie na wolnych elektronach $\kappa_s = 0.2(1+X)$ i absorbcja $\kappa_{a,\nu}(\rho, T, \mathbf{X})$. Proszę napisać wzór na średnią Rosselanda i podać jego wersję dla przypadków $\kappa_s \gg \kappa_{a,\nu}$ i $\kappa_s \ll \kappa_{a,\nu}$

6.4.2 Przejścia swobodno-swobodne

Niezwiązany elektron znajdujący się w polu elektrostatycznym jonu może pochłaniać i emitować fotony (*bremsstrahlung, promieniowanie hamowania*). W przypadku lokalnej równowagi termodynamicznej współczynniki przekrój czynny liczony na jeden jon i jeden elektron dany jest, w przybliżeniu, przez

$$\sigma_{f-f,j} = \frac{C_{f-f}\mathcal{Z}_j^2}{v_e \nu^3}, \tag{191}$$

gdzie C_{f-f} jest liczbą, $\mathcal{Z}_j$ ładunkiem jonu, a v_e prędkością elektronu. Wyrażenie na średni współczynnik nieprzezroczystości dla przejść swobodno-swobodnych otrzymamy po zsumowaniu wkładów pochodzących od różnych jonów i elektronów, z v_e danym rozkładem Maxwella-Boltzmana (119). Po uśrednieniu po ν według wzoru (169), dostaje się

$$\kappa_{f-f} \approx 4 \times 10^{22}(1+X)\left(X + Y + \sum_{i>4} \frac{X_i \mathcal{Z}_i^2}{\mathcal{A}_i}\right)\rho T^{-3.5}\ \mathrm{cm^2 g^{-1}}, \tag{192}$$

nazywany *prawem Kramersa dla przejść swobodno-swobodnych.*

6.4.3 Przejścia swobodno-związane

Przekrój czynny na fotojonizacje liczony na jeden atom i jeden związany elektron (o głównej liczbie kwantowej n) dany jest, w przybliżeniu, wyrażeniem

$$\sigma_{b-f,j,n} = \begin{cases} \frac{C_{b-f}\mathcal{Z}_j^4}{n^5 \nu^3} & \text{jeżeli } h\nu \geq \Xi_{j,n} \\ 0 & \text{jeżeli } h\nu < \Xi_{j,n} \end{cases}, \tag{193}$$

gdzie $\Xi_{j,n}$ jest potencjałem jonizacji. Fotojonizacja wodoru i helu jest najważniejszym źródłem nieprzezroczystości w zewnętrznych warstwach gwiazd.

W zakresie temperatury od 4000 K - 6000 K, na przykład w atmosferze Słońca, dominującym źródłem nieprzezroczystości jest fotojonizacja ujemnego jonu wodorowego (H^-). Potencjał jonizacji wynosi 0.75 eV (potencjał jonizacji H wynosi 13.6 eV). Wolne elektrony pochodzą z obfitych pierwiastków o niskim potencjale pierwszej jonizacji: Na, K, Ca i Al.

Przy wyższych temperaturach, w κ dominują kolejno efekty jonizacji H, HeI i HeII. Nie znamy prostego wzoru na średni współczynnik nieprzezroczystości dla warstw, w których wodór hel nie są całkowicie zjonizowane. Wykładnik w zależności $\kappa(T)$ może tam osiągać duże dodatnie wartości, co wynika z szybkiego wzrostu z temperaturą liczby fotonów zdolnych do fotojonizacji i liczby elektronów, które neutralny wodór może przyłączyć.

Dla warstw głębszych, gdzie wodór i hel można uznać za całkowicie zjonizowane istnieje przybliżenie znane jako *prawo Kramersa dla przejść swobodno-związanych*

$$\kappa_{b-f} \approx 4 \times 10^{25} Z(1+X)\rho T^{-3.5} \ \mathrm{cm^2 g^{-1}}. \tag{194}$$

Podobnie jak we wzorze (181) cała zależność od parametrów termodynamicznych dana jest przez czynnik $\rho/T^{3.5}$.

6.4.4 Przejścia związano-związane

Do wczesnych lat sześćdziesiątych wartości κ były wyliczane z użyciem wzorów (188), (191) i (193), zaniedbując efekty przejść związano-związanych, czyli absorbcji w liniach widmowych . Wyliczenie tych efektów jest najtrudniejsze. Nie istnieje tu żadne proste oszacownie. Skomplikowane obliczenia numeryczne pokazaly, że zaniedbanie absorbcji w liniach metali prowadzi do znacznego zaniżenia nieprzeroczystości materii we wnętrzach gwiazd.

6.4.5 Nieprzezroczystości w niskich temperaturach

Poniżej $T = 4000K$ najważniejszy wkład do κ wnosi dysocjacja molekuł, przede wszystkim H_2. W atmosferech czerwonych olbrzymów istotna jest też absorbcja i rozpraszanie promieniowania przez pył.

6.4.6 Tablice nieprzezroczystości

Numeryczne obliczenia współczynnika κ do zastosowań astrofizycznych z uwzględnieniem wszystkich efektów atomowych oraz przewodnictwa molekularnego prowadzone są przez wyspecjalizowane zespoły. Wyniki tych obliczeń dostępne są w formie tablic. Obecnie mamy do dyspozycji wyniki z dwóch niezależnych programów znanych jako OP i OPAL. Tylko w programie OPAL bierze się pod uwagę wpływ oddziaływań między atomami. Efekt ten jest ważny dla modeli Słońca i innych gwiazd o małych masach. Dla modeli gwiazd z $M\tilde{>}8M_\odot$, wyniki uzyskane z OP i OPAL są zgodne.

Wcześniejsze obliczenia, w których uwzględniano absorpcję w liniach rezonansowych zaniżały wartość κ, w pewnym obszarze na diagramie $\rho-T$ o czynnik ≈ 3

Dane OPAL i OP nie uwzględniają wpływu molekuł i pyłu. Dlatego dla liczenia modeli gwiazd o niskich $T_{\rm eff}$ potrzebne są dodatkowe tablice κ.

Na rysunku 5 pokazany jest przebieg nieprzezroczystości i jej pochodnych logarytmicznych względem gęstośi i temperatury w otoczkach trzech wybranych gwiazd ciągu głównego.

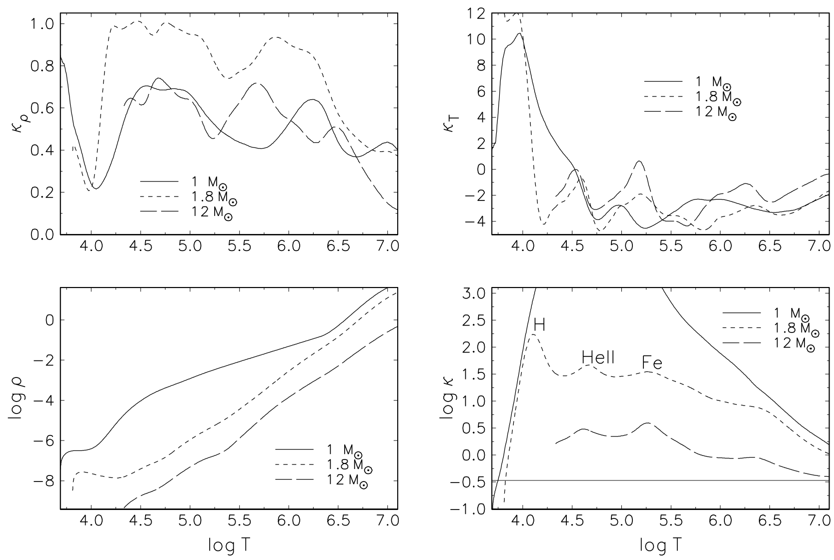

Figure 5: W funkcji temperatury ($\log T$) wykreślone są wartości κ_ρ, κ_T, $\log\rho$ i $\log\kappa$ w otoczkach modeli gwiazd ciągu głównego. Model o masie $1M_\odot$ opisuje w przybliżeniu Słońce. Model o masie $1.8M_\odot$ gwiazdę typu δ Scuti, a model o masie $12M_\odot$ gwiazdę typu β Cephei. Trzy maksima κ_T odpowiedzialne są za wzbudzanie pulsacji w różnych typach gwiazd fizycznie zmiennych. Pierwsze związane z jonizacją H^- i H, następne z jonizacją HeII. Obydwa grają rolę w pulsacjach gwiazd w pasie Cefeid. Maksimum przy $\log T = 5.3$, efekt przejść związano-związanych głównie w atomach żelaza , było nieznane aż do końca lat osiemdziesiątych. Jest ono odpowiedzialne za pulsacje gwiazd typu β Cephei i innych gwiazd typu B. W żadnym z modeli nie widać obszaru nawet przybliżonej stososowalności praw Kramersa ($\kappa_\rho = 1$, $\kappa_T = -3.5$). Wzrastającą rolę rozpraszania na elektronach dobrze widać w przypadku $M = 12M_\odot$: $\kappa \to \log 0.34$ (linia horyzontalna), κ_ρ i $\kappa_T \to 0$