7 Całkowity strumień energii

7.1 Równanie bilansu ciepła

Dla wnętrz gwiazdowych pierwsze prawo termodynamiki(109) można zapisać w następującej jawnej postaci

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \rho\frac{du}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \epsilon\rho - \mathrm{div}\mathbf{F} \tag{195}$$

gdzie $\epsilon(\rho, T, \boldsymbol{X})$ oznacza liczone na jednostkę masy tempo produkcji energii, pomniejszonej o straty neutrinowe, na jednostkę masy. Wyliczaniu tej wielkości poświęcony będzie następny rozdział. Wielkość $\boldsymbol{F}$ obejmuje strumień energii niesionej przez promieniowanie i molekuły oraz ewentualnie strumień konwektywny. Jeżeli ten ostatni jest zaniedbywalny, to całkowity strumień energii można zapisać w formie prawa Ficka (164),

$$\mathbf{F} = -\mathcal{D}\boldsymbol{\nabla}T. \tag{196}$$

Współczynnik przewodnictwa, $\mathcal{D}$, dany jest przez (por. rów. 167, 168,172)

$$\mathcal{D} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}. \tag{197}$$

W przypadku symetrii sferycznej całkowity strumień przenoszony przez promieniowanie i molekuły dany jest wzorem (172). Wyrażenia na strumień konwektywny podane zostaną w dalszych częściach tego rozdziału.

Warunek równowagi oznacza równość $\mathrm{div}\mathbf{F} = \epsilon\rho$. Dla sferycznych modeli gwiazd mamy stąd i z równania (8)

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon. \tag{198}$$

Równania na pochodną temperatury zapiszemy w tradycyjnej postaci

$$\frac{dT}{dM_r} = \nabla\frac{T}{p}\frac{dp}{dM_r} = -\nabla\frac{GM_rT}{4\pi r^4 p}. \tag{199}$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z równania (9). Jeśli strumień konwektywny jest zaniedbywalny to ze (174) wynika równość

$$\nabla = \nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r p}{16\pi GacM_rT^4}. \tag{200}$$

Jeżeli niestabilność konwektywna występuje w obszarze chemicznie jednorodnym, to zachodzą następujące nierówności

$$\nabla_{\mathrm{ad}} < \nabla < \nabla_{\mathrm{rad}}. \tag{201}$$

Pierwsza nierówność wynika z kryterium niestabilności (106), a druga z tego, że część energii przenoszona jest przez konwekcję.

Jeśli niestabilność konwektywna występuje w głębokim wnętrzu gwiazdy, to wysoka wydajność transportu konwektywnego uzasadnia przybliżenie $\nabla \approx \nabla_{\rm ad}$. To samo przybliżenie stosuje się w przypadku warstw niejednorodnych przy spełnieniu nierówności (106). Nie mamy wtedy niestabilności dynamicznej, ale, jak zobaczymy w podrozdziale 7.3, występuje inny rodzaj niestabilności, która jak się spodziewamy też prowadzi do $\nabla \approx \nabla_{\rm ad}$.

Równania (8-9) i (198-199) to *równania wewnętrznej budowy gwiazd*. Przy danej masie gwiazdy i danym rozkładzie obfitości pierwiastków, $\boldsymbol{X}(M_r)$, rozwiązania opisują model gwiazdy sferycznej znajdującej się w równowadze mechanicznej i cieplnej. Model oznacza znajomość L i R, oraz r, T, ρ, L_r w funkcji M_r. O konstrukcji modeli równowagowych będzie mowa w rozdziale 9.

7.2 Strumień konwektywny

W bilansie energii należy uwzględniać strumień energii przenoszonej makroskopowo. Dla wyliczenia tego strumienia rozważamy zmiany energii elementu objętości, $\mathcal{V}$ w stałym zewnętrznym polu grawitacyjnym o potencjale Φ.

$$\frac{\partial E_{\mathcal{V}}}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3\boldsymbol{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + u\right) + \rho\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]. \qquad (202)$$

Z równania Eulera (82) wynika

$$\frac{\rho}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} = -\rho \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi\right) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}p,$$

a ze (195) i (86)

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u + \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\right) + \epsilon\rho - \mathrm{div}\boldsymbol{F}.$$

Używając tych dwóch ostatnich wyrażeń w (202) dostajemy

$$\frac{\partial E_{\mathcal{V}}}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3\boldsymbol{x}\left\{\epsilon\rho - \mathrm{div}\left[\mathbf{F} + \rho\boldsymbol{v}\left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} + \Phi\right)\right]\right\},$$

gdzie

$$\tilde{h} = u + \frac{p}{\rho}$$

jest entalpią jednostki masy. Wynika stąd, że strumień energii przenoszony przez ruch makroskopowy dany jest przez

$$\mathbf{F}_{\rm c} = \rho\boldsymbol{v}\left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2} + \Phi\right). \qquad (203)$$

W stanie stacjonarnym o symetrii sferycznej mamy

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \rho v_r = 0, \tag{204}$$

$$L_{c,r} = r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \rho v_r \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2}\right) = 4\pi r^2 \overline{\rho v_r \left(\tilde{h} + \frac{v^2}{2}\right)}. \tag{205}$$

Wyliczenie występującej tu wartości średniej jest trudne. Prosta procedura stosowana w modelowaniu gwiazd będzie opisana w podrozdziale 7.4. Jest ona oparta na teorii zaburzeń, którą zajmiemy się w pierwszej kolejności.

7.3 Niestabilności dla zaburzeń nieadiabatycznych

Przyjmujemy tu te same przybliżenia co w rozdziale 4 poza tym, że w miejsce warunku adiabatyczności (88) korzystamy ze zlinearyzowanych równanań (195) i (196)

$$\rho T \frac{d\delta s}{dt} = \delta(\epsilon\rho - \mathrm{div}\mathbf{F}) = \epsilon'\rho + \epsilon\rho' - \mathrm{div}\mathbf{F}' \tag{206}$$

i

$$\mathbf{F}' = -\mathcal{D}'\boldsymbol{\nabla}T - \mathcal{D}\boldsymbol{\nabla}T'. \tag{207}$$

Potrzebne będzie jeszcze zlinearyzowane równanie stanu. W obszarach chemicznie niejednorodnych zakładamy $\delta X_l = 0$, gdzie X_l oznacza obfitość najlżejszego z obfitych pierwiastków. Oznacza to, że zaniedbujemy zmiany obfitości w zaburzonym elemencie gazu. Stąd mamy

$$X_l' = -\delta r \frac{dX_l}{dr}.$$

Używając tej relacji w zlinearyzowanym równaniu stanu dostajemy

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\chi_T}\left(\frac{p'}{p} - \chi_\rho \frac{\rho'}{\rho} + \chi_X \delta r \frac{d\ln X_l}{dr}\right) \tag{208}$$

Uwzględniając tylko wiodące człony w $\boldsymbol{k}$, dostajemy z (207) następujące wyrażenie na zaburzenie strumienia energii

$$\mathbf{F}' = -\mathrm{i}\boldsymbol{k}\mathcal{D}T'. \tag{209}$$

Podstawiamy to wyrażenie do (208), znów zachowujemy tylko wiodące człony w $\boldsymbol{k}$ i dostajemy

$$\rho\delta s = -\frac{k^2}{\gamma}\mathcal{D}\frac{T'}{T}, \tag{210}$$

gdzie oznaczyliśmy $\gamma \equiv -\mathrm{i}\omega$. Tak więc $\Re(\gamma) > 0$ oznacza tempo narastania niestabilności.

Teraz, tak jak w rozdziale 4 wyrazimy zaburzenia wielkości termodynamicznych przez δr i podstawimy do (94) dla uzyskania relacji dyspersyjnej. Wzór (96) pozostaje niezmieniony. Zakładamy w nim $|\omega| = |\gamma| \ll |\boldsymbol{k}_H| v_a$. Mamy więc

$$\frac{p'}{p} \approx -\frac{\mathrm{i}\gamma^2 k_r}{|\boldsymbol{k}_H|^2 v_a^2}\delta r \tag{211}$$

Zauważmy, że oznacza to

$$|\frac{p'}{p}| \ll |\frac{\delta r}{r}|. \tag{212}$$

Skorzystamy z tej silnej nierówności przy wyliczaniu zaburzeń pozostałych parametrów termodynamicznych.

Z pomocą tożsamości termodynamicznych (114) i (116-117), dostajemy

$$\rho T \delta s = \frac{p\chi}{\nabla_{\mathrm{ad}}}\left(\frac{\delta T}{T} - \nabla_{\mathrm{ad}}\frac{\delta p}{p}\right),$$

gdzie oznaczyliśmy $\chi \equiv \chi_T/\chi_\rho$, i dalej na mocy nierówności (212)

$$\rho T \delta s = \frac{p\chi}{\nabla_{\mathrm{ad}}}\left[\frac{T'}{T} + \delta r \frac{d\ln p}{dr}(\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}})\right],$$

Używając tu wyrażenia (210) na δs, dostajemy

$$\frac{T'}{T} = \frac{(\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}})}{1 + k^2 Q/\gamma}\frac{V\delta r}{r}, \tag{213}$$

gdzie

$$Q \equiv \mathcal{D}\frac{\nabla_{\mathrm{ad}} T}{\chi p} = \frac{\mathcal{D}}{c_p \rho}, \qquad V \equiv -\frac{d\ln p}{d\ln r}.$$

Zauważmy, że wielkość $k^2 Q$ ma wymiar 1/sek i wyznacza względne tempo lokalnych strat energii. Używając wyrażeń (211) i (213) w (208) po skorzystaniu z tożsamości

$$\Gamma_1 = \frac{\chi_\rho}{1 - \chi_T \nabla_{\mathrm{ad}}}$$

dostajemy

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx \frac{A + A_X k^2 Q/\gamma}{1 + k^2 Q/\gamma}\frac{\delta r}{r}, \tag{214}$$

gdzie, podobnie jak w rozdziale 4,

$$A \equiv \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{d\ln r} - \frac{d\ln \rho}{d\ln r} = \chi V(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla) + A_X, \tag{215}$$

z

$$A_X \equiv \frac{\chi_X}{\chi_\rho}\frac{d\ln X_l}{d\ln r}.$$

Po podstawieniu wyrażeń (211) i (213) do (94) dostajemy, jako warunek niezerowych rozwiązań δr, następującą relację dyspersyjną

$$W(\gamma) \equiv \gamma^3 + \gamma^2 k^2 Q + \gamma \left(\frac{k_H}{k}\right)^2 A\frac{g}{r} + k_H^2 A_X Q \frac{g}{r} = 0 \tag{216}$$

Rozpatrzymy wpierw przypadek warstwy chemicznie jednorodnej ($A_X \equiv 0$). Pierwiastek z $\Re(\gamma) > 0$ istnieje, jeśli $A < 0$, co w tym przypadku jest równoważne $\nabla > \nabla_{\mathrm{ad}}$. Widzimy więc, że straty energii nie wpływają na kryterium stabilności, a jedynie na tempo wzrostu amplitudy, które dane jest przez

$$\gamma = \gamma_{\mathrm{ad}}(\sqrt{1+q^2} - q), \tag{217}$$

gdzie

$$\gamma_{\mathrm{ad}} = \sqrt{\frac{-gA}{r}}\left|\frac{k_H}{k}\right|$$

i

$$q = \frac{k^2 Q}{2\gamma_{\mathrm{ad}}}.$$

Inaczej jest w przypadku warstwy chemicznie niejednorodnej. Równanie (216) jest sześcienne. Z *twierdzenia Liéparda Chiparda* wynika, że dla niestabilności ($\Re(\gamma) > 0$)wystarcza spełnienie jednej z nierówności

$$A_X < 0, \quad A < 0, \quad \nabla > \nabla_{\mathrm{ad}}. \tag{218}$$

Niespełnienie żadnej oznacza stabilność struktury względem małych zaburzeń nieradialnych.

Pierwsza z tych nierówności oznacza, że obfitość lżejszego pierwiastka maleje ku powierzchni. Taka sytuacja może zdarzyć się w ewolucji gwiazd jedynie w wyniku akrecji materii. Niestabilność spowoduje wymieszanie pierwiastków w czasie proporcjonalnym do Q^{-1}.

Jeżeli spełniony jest tylko ostatni z warunków (218), to mamy do czynienia z niestabilnością wibracyjną, czyli oscylacjami o narastającej amplitudzie. Przy zaniedbaniu wyrazów wyższego rzędu w Q, dostajemy z (216)

$$\gamma = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{gA}{r}}\left(\frac{k_H}{k}\right) + \frac{Qk^2}{2}\frac{V\chi(\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}})}{A}. \tag{219}$$

Mamy tu do czynienia z osobliwą sytuacją, w której straty promieniste prowadzą do generacji energii kinetycznej oscylacji.
pytanie: Jak wyjaśnić ten paradoks?

7.4 Teoria drogi mieszania

Dokładne wyliczenie konwektywnego strumienia $L_{c,r}$ według wzoru (205) wymaga opisu rozwiniętej konwekcji, a więc posłużenia się numerycznymi rozwiązaniami równań (82), (86), (195-196). W stosowanej dotąd powszechnie praktyce do opisu transportu konwektywnego w otoczkach gwiazd używa się prostego modelu fizycznego znanego jako *teoria drogi mieszania.* "Teorię" stosuję się tylko do chemicznie jednorodnych otoczek gwiazdowych. Zakłada się więc $A_X \equiv 0$.

Istnieją różne warianty teorii drogi mieszania. Ich wspólną cechą jest założenie, że energia przenoszona jest przez identyczne turbulentne elementy konwektywne, które przebiegają pewien charakterystyczny dystans, ℓ_c, zwany drogą mieszania, po czym rozpływają się. Zwyczajowo parametryzuje się ten dystans współczynnikiem α_c we wzorze

$$\ell_c = \alpha_c H_p. \tag{220}$$

Można oczekiwać, że rozmiar elementów największych, odpowiedzialnych za transport energii, jest tego rzędu co ℓ_c. Istnienie takiego związku wynika z oceny efektów nieliniowych ograniczających prędkości konwektywne. Tym ograniczeniem jest przepływ energii do elementów coraz mniejszych (*kaskada turbulentna*) i w końcu do dyssypacji w wyniku lepkości. Żeby to zobaczyć zapisujemy równanie Eulera (88) w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \gamma^2 \boldsymbol{\delta x} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}.$$

Zapis ten oznacza, że wszystkie siły działające na element wyliczane są w przybliżeniu liniowym w $\boldsymbol{\delta x}$ oprócz ostatniego członu, który odpowiada za kaskadę. W statystycznej izotropowej równowadze powinniśmy mieć więc

$$\gamma^2 \overline{|\boldsymbol{\delta x}|} = \overline{|(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}|} = \overline{|(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{v}|} \approx k v_c^2, \tag{221}$$

gdzie v_c oznacza typową prędkość największych elementów. Dla typowego elementu kładziemy $\delta x_c \equiv |\boldsymbol{\delta x}| = \ell_c/2$ i przyjmujemy liniowy związek pomiędzy v_c i δx_c,

$$v_c = \gamma \delta x_c = \gamma \frac{\ell_c}{2}. \tag{222}$$

Z (221) i (222) wynika $k = 2/\ell_c$.

Wyliczymy teraz v_c wykorzystując wzór (217) na γ, w którym parametry modelowe, takie jak q i A, są wielkościami średnimi dla danej wartości r. Zakładamy, że turbulencja jest izotropowa ($k_H^2 = 2k^2/3$) i w ten sposób dostajemy

$$v_c = \sqrt{v_A^2 \nabla_n + v_T^2} - v_T, \tag{223}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\nabla_n \equiv \nabla - \nabla_{\rm ad},$$

$$v_A^2 \equiv \frac{\chi\alpha_c^2}{6}\frac{p}{\rho}$$

i

$$v_T \equiv \frac{Q}{\ell_c} = \frac{\mathcal{D}}{c_p\rho\ell_c} = \frac{L_r}{4\pi r^2\rho c_p T\nabla_{\rm rad}\alpha_c}. \tag{224}$$

W ostatnim wyrażeniu $\nabla_{\rm rad}$ oznacza gradient temperatury, jaki istniałby w obszarze niestabilnym przy $L_{{\rm conv},r} = 0$. Wielkościami do wyznaczenia w funkcji średnich wartości parametrów lokalnych (T, ρ, $\nabla_{\rm rad}$ e.c.t.) są ∇_n (*gradient nadadiabatyczny*) i v_c (średnia wartość prędkości elementów konwektywnych). Wolny parametr α_c zwykle przyjmuje się w granicach od 1 do 2. Widzimy więc, że v_A jest od ok. 1.5 do 3 razy mniejsza od prędkości dźwięku. Wielkość ℓ_c/v_T daje ocenę czasu potrzebnego do osiągnięcia równwagi cieplnej przez sferyczną warstwę o grubości ℓ_c położoną w odległości r od centrum gwiazdy. Iloraz v_A/v_T rośnie szybko wgłąb gwiazdy. Na dnie warstwy konwektywnej Słońca wynosi $3 \times 10^{-10}\alpha_c$.

Dla wyznaczenia ∇_n i v_c potrzebny jest dodatkowy związek. Znajdziemy go rozważając całkowity strumień energii. Zaczynamy od wyliczenia strumienia energii przenoszonego przez konwekcję. Mamy na ten strumień wzór (205), który przepisujemy w postaci

$$L_{{\rm c},r} = 4\pi r^2 \overline{\left(\tilde{h} + \tilde{h}' + \frac{v^2}{2}\right)(\rho + \rho')v_r}.$$

W tym wzorze wielkości primowane traktujemy jako małe odchylenie parametrów od wartości średnich. Odchylenia i v_c zależą od czasu i od kątów. Zauważamy, że v^2 jest wielkością drugiego rzędu i że możemy przyjąć $\tilde{h}' = c_pT'$, bo wkład od odchyleń ciśnienia jest mały. Mamy też (rów. 204) $\overline{(\rho + \rho')v_r} = 0$, bo rozważamy stan stacjonarny. W najniższym rzędzie w wielkościach fluktuujących, dostajemy

$$L_{{\rm c},r} = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi r^2\rho c_p T\overline{\left(v_c\frac{T'}{T}\right)}. \tag{225}$$

Na mocy założonej izotropii położyliśmy $v_r = v_c/\sqrt{3}$. Podobnie jako średnie radialne przemieszczenie elementu należy przyjąć $\delta r = \ell_c/2\sqrt{3}$. W teorii drogi mieszania mamy symetrię pomiędzy ruchem elementów w górę i w dół. Zmienia się tylko jednocześnie znak v_r i T'. Koncentrujemy uwagę na elementach poruszających się w górę. Korzystamy ze wzoru (213) na T', w którym zastępujemy $k^2Q\gamma$ i $V\delta r/r$, odpowiednio, przez $2v_T/v_c$ i $\alpha_c/2\sqrt{3}$. Tak dostajemy

$$\frac{T'}{T} \approx \frac{\nabla_n v_c}{v_c + 2v_T}\frac{\alpha_c}{2\sqrt{3}}. \tag{226}$$

Podstawiamy to do (225) i z wykorzystaniem wyrażenia (224) na v_T, mamy

$$L_{{\rm c},r} = \frac{L_r}{6\nabla_{\rm rad}}\frac{\nabla_n v_c^2}{v_T(v_c + 2v_T)}. \tag{227}$$

Teraz korzystamy z oczywistych wzorów

$$L_r = L_{\mathrm{rad},r} + L_{\mathrm{c},r}$$

i

$$\frac{L_{\mathrm{rad},r}}{L_r} = \frac{\nabla}{\nabla_{\mathrm{rad}}} = \frac{\nabla_{\mathrm{ad}} + \nabla_n}{\nabla_{\mathrm{rad}}}, \tag{228}$$

żeby dostać poszukiwany dodatkowy związek pomiędzy v_c i ∇_n,

$$\nabla_n \left(1 + \frac{v_c^2}{6v_T(v_c + 2v_T)}\right) = \nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}}. \tag{229}$$

Układ równań (223) i (226) na można sprowadzić do równania sześciennego na v_c. *Zadanie* Proszę:

(i) wyprowadzić to równanie,

(ii) pokazać, że ma zawsze tylko jeden rzeczywisty pierwiatek i że jest on zawsze dodatni

(iii) pokazać, że dla

$$\lambda \equiv \frac{v_T}{v_A} \to 0$$

$$v_c \to v_A[6\lambda(\nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}})]^{1/3} \tag{230}$$

$$\nabla \to \nabla_{\mathrm{ad}} + [6\lambda(\nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}})]^{2/3}, \tag{231}$$

(iv) a dla $\lambda \to \infty$

$$v_c \to \frac{v_A}{2\lambda}(\nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}}) \tag{232}$$

$$\nabla \to \nabla_{\mathrm{rad}} - \frac{(\nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}})^3}{48\lambda^4} \tag{233}$$

Widzimy, że w obydwu granicach, z odmiennych powodów, prędkości konwektywne są znacząco poddźwiękowe. W gwiazdach ciągu głównego, poza cienką warstwą podpowierzchniową, mamy $\lambda \ll 1$, $v_c \ll v_A$ i $\nabla \approx \nabla_{\mathrm{ad}}$. W czerwonych olbrzymach warstwa istotnie nadadiabatyczna może być rozległa, ale zawsze struktura głębokiej części warstwy konwektywnej jest w dobrym przybliżeniu adiabatyczna.

Dla wszystkich gwiazd chłodnych wybór wartości α_c ma duży wpływ na ich modele i wartości parametrów zewnętrznych w funkcji masy. Dopasowanie modelu Słońca wymaga dobrania konkretnej wartości $\alpha_c \approx 1.7$. Nie można jednak traktować tego parametru jako stałej uniwersalnej. Przyjęcie większej wartości oznacza bardziej wydajny transport energii i większą grubość otoczki konwektywnej. Należy pamiętać, że niektóre wzory, a zwłaszcza (221) oparte są na bardzo przybliżonych oszacowaniach. Teoria drogi mieszania jest niezadawalającym narzędziem opisu konwekcji w gwiazdach. W przyszłości podstawą do opisu efektów konwekcji w gwiazdach stanie się parametryzacja wyników symulacji hydrodynamicznych.