# 8 Reakcje jądrowe

Dane z fizyki jądrowej potrzebne nam do wyliczenia $\epsilon(\rho, T, \boldsymbol{X})$ oraz pochodnych czasowych względnych obfitości, $X_i$, to liczba reakcji zachodzących w jednostce objętości w przeliczeniu na jeden atom reagujących cząstek i wartość wydzielonej energii pomniejszonej (ewentualnie) o energię neutrina.

Będziemy oznaczać przez $r_{j,k}$ liczbę reakcji cząstek rodzajów "j" i "k" w 1 cm$^3$ na sekundę, a symbolem $\lambda_{i,j}$ – liczbę reakcji na jedną cząstkę. Mamy zatem

$$r_{j,k} = \lambda_{j,k} N_j N_k. \tag{234}$$

Związek $\lambda_{i,j}$ z przekrojem czynnym $\sigma_{i,j}$ wyjaśniony zostanie później. Tu zauważmy, że jednostką $\lambda$ jest cm$^3$/s. Liczba jąder izotopu $j$ w 1 cm$^3$ dana jest przez

$$N_j = \frac{\rho X_j}{A_j m},$$

gdzie $A_j$ jest liczbą masową.

Energię wydzieloną w pojedynczej reakcji syntezy można wyliczyć odejmując nadwyżkę masy pierwiastków wyjściowych od nadwyżki masy powstającego pierwiastka. Nadwyżkę masy definiujemy jako

$$\Delta m_j = (m_j - A_j m)c^2 = 931.5(m_j/m - A_j) \text{ MeV} \tag{235}$$

Table 2. Wybrane nadwyżki masy

| izotop | $A$ | $\Delta m$ [MeV] |
|---|---|---|
| n | 1 | 8.071 |
| H | 1 | 7.289 |
| H | 2 | 13.136 |
| H | 3 | 14.950 |
| He | 3 | 14.931 |
| He | 4 | 2.425 |
| Be | 8 | 4.944 |
| C | 12 | 0 |
| O | 16 | -4.737 |

Przemiany jądrowe zachodzą w cyklach składających się z ciągów syntez i następujących po nich rozpadów promieniotwórczych. Jądro powstałe w wyniku syntezy jest zwykle niestabilne. Podlega rozpadom w wyniku których powstaje(ą) stabilne jądro(a), emitowany jest foton $\gamma$ lub pozytron+neutrino, lub neutron. Czas życia niestabilnego jądra mierzony jest w minutach, sekundach i ułamkach sekund.

Zwykle o szybkości cyklu reakcji decyduje jedna, najwolniejsza, reakcja syntezy, powiedzmy cząstek "j" i "k". Wtedy

$$\epsilon = \frac{\lambda_{j,k}}{\rho} N_j N_k Q_{\text{eff}} = \frac{\lambda_{j,k} \rho X_j X_k}{A_j A_k m^2} Q_{\text{eff}}, \tag{236}$$

gdzie $Q_{\text{eff}}$ oznacza energię wydzieloną w pojedynczym cyklu pomniejszoną o energię unoszoną przez neutrina $Q_\nu$. Mamy wiec

$$Q_{\text{eff}} = \sum_{j,\text{pocz}} \Delta m_j - \sum_{k,\text{kon}} \Delta m_k - Q_\nu. \tag{237}$$

Dla określonej syntezy nie jest to wielkość dokładnie ustalona, ponieważ straty neutrinowe zależą od tego w jakim cyklu synteza zachodzi. Jeżeli $Q_{\rm eff}$ jest wyrażone w MeV, to żeby mieć $\epsilon$ w jednostkach c.g.s. należy pomnożyć prawą stronę przez $1.602 \times 10^{-6}$.

Zmiana obfitości pierwiastka $j$ dana jest przez

$$\frac{dN_j}{dt} = -\left(\tilde{\lambda}_j + \sum_k \lambda_{j,k} N_k\right) N_j + \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} N_k N_i, \qquad (238)$$

gdzie $\tilde{\lambda}_j$ jest stałą rozpadu dla niestabilnych jąder. Jeżeli zmiany zachodzą w tempie znacznie szybszym niż cały cykl, to można wyliczyć $N_j$ z (238) jako obfitość równowagową przyjmując $dN_j/dt = 0$.

## 8.1 Bariera potencjału

Reakcje syntezy jąder wymagają zbliżenia się na odległość $d_N$ odpowiadającą zasięgowi sił jądrowych, która jest porównywalna z rozmiarem jądra. Odległości jądrowe mierzy się w fermich (1 fm = $10^{-13}$cm). Promień protonu ma $\approx 0.8$ fm. Dobrą ocenę zasięgu sił jądrowych daje wzór

$$d_N \approx 1.4(A_j^{1/3} + A_k^{1/3}) \text{ fm} .$$

Bariera potencjału sił elektrostatycznego odpychania, którą trzeba pokonać, wynosi

$$E_C = \frac{e^2 \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k}{d_N} = 1.44 \frac{\mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k}{d_N[\text{fm}]} \text{ MeV}. \qquad (239)$$

Dla reakcji p+p mamy więc $E_C \approx 0.5$ MeV. Średnia energia kinetyczna jąder dana jest przez

$$E = kT = 0.086 T_9 \text{ MeV},$$

gdzie $T_9 = T/10^9$K. W centrum Słońca mamy $T_9 = 0.015$. Z całkowania rozkładu Maxwella-Boltzmana wynika, że przy takiej temperaturze tylko dla dwóch protonów na $10^{164}$ zachodzi $E \geq E_C$. W całym Słońcu jest mniej niż $10^{57}$ protonów. Gdyby nie *efekt tunelowy* to reakcje jądrowe nie mogłyby więc zachodzić.

Chmury elektronowe otaczające jądra redukują barierę potencjału, co prowadzi do efektywnego zwiększenia prawdopodobieństwa reakcji o *czynnik ekranowania* $S_f$. W gęstej plazmie jest to efekt znaczący. W skrajnych warunkach, synteza może zachodzić w zerowej temperaturze (*zimna fuzja*). W zastosowaniach astrofizycznych zwykle wystarcza przybliżenie słabego ekranowania. Wtedy, korzysta się z teorii Debye'a-Hückela, w której potencjał elektrostatyczny ekranowanego jądra opisuje wzór

$$\phi(r) = \frac{\mathcal{Z} e}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right),$$

gdzie

$$r_D = \left[\frac{4\pi e^2(\mathcal{Z}_j^2 N_j + N_e)}{kT}\right]^{-1/2} \tag{240}$$

jest promieniem Debye'a. Energia bariery Coulombowskiej dla $r/r_D \ll 1$ jest obniżona przez chmurę elektronów do

$$E_C = \frac{Z_j Z_k e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) \approx \frac{Z_j Z_k e^2}{r} - \frac{Z_j Z_k e^2}{r_D}. \tag{241}$$

## 8.2 Przekrój czynny na reakcje syntezy jąder

Laboratoryjny przekrój na reakcję przy bombardowaniu strumieniem cząstek "j" uderzających z prędkością $v$ w tarczę z jądrami "k", oznaczamy przez $\sigma_{j,k}(v)$ i rozumiemy jako liczbę reakcji liczonych na jedno jądro "k" w jednostce czasu przy danym strumieniu czątek "j" na cm$^2$ w jednostce czasu. Ilość reakcji w jednym cm$^3$ tarczy (jeśli cząstki nie są hamowane, a reakcja jest mało prawdopodobna)

$$r_{j,k} = \sigma_{j,k}(v) v N_j N_k$$

Ta definicja pozostaje ważna dla gazu zawierającego cząstki "j" i "k", trzeba jedynie wziąć pod uwagę rozkład względnych prędkości $\psi(v)$. Mamy więc

$$r_{j,k} = N_j N_k \int_0^\infty \sigma_{j,k}(v)\psi(v) v dv = N_j N_k < \sigma_{j,k} v >= N_j N_k \lambda_{j,k}. \tag{242}$$

Można pokazać (*zadanie na ćwiczenia*), że rozkład prędkości względnych $\psi(v)$ jest rozkładem Maxwella-Boltzmana dla cząstek o masie zredukowanej

$$m_{\rm red} = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}.$$

Ze wzoru (119) znajdujemy wtedy

$$\psi(v) v dv = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi m_{\rm red}}\right)^{1/2} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE. \tag{243}$$

Dla identycznych cząstek, $N_j N_k$ należy we wzorze (242) zastąpić przez $\frac{1}{2} N_j^2$. Można napisać ogólnie

$$r_{j,k} = \frac{N_j N_k \lambda_{j,k}}{(1 + \delta_{j,k})}. \tag{244}$$

Czas życia jądra "k" ze względu na reakję z cząstką "j" dany jest przez

$$\tau_{j,k} = \frac{N_j}{r_{j,k}}.$$

Jeśli trzeba wziąć pod uwagę wiele reakcji, to czas życia jądra "k" dany jest przez

$$\tau_k = \left( \sum_j \frac{1}{\tau_{j,k}} \right)^{-1} .$$

Przekrój czynny $\sigma_{j,k}$ zawiera czynnik penetracji, który w przybliżeniu JWKB – stosowalnym gdy $E \ll E_C$ – i przy zaniebaniu ekranowania, dany jest przez

$$P_C = \exp\left( -\frac{b}{\sqrt{E}} \right) , \tag{245}$$

gdzie

$$b = 0.98 \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k \sqrt{\frac{m_{\rm red}}{m}} \quad {\rm MeV}^{1/2}.$$

Postępowanie przy wyliczaniu przekroju czynnego zależy od tego, czy w jądrze powstającym w wyniku fuzji istnieją rezonanse w zakresie niskich energii. Jeśli energie cząstek są odległe od rezonansowych, to można przyjąć

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} P_C \tag{246}$$

gdzie $S$ jest wolno zmienną funkcją energii. Funkcję tę wyznacza się eksperymentalnie. Najczęściej mierzy się $\sigma$ dla $E$ znacznie większych niż spotykane w gwiazdach i ekstrapoluje $S$. Dla wszystkich ważnych w astrofizyce reakcji jądrowych, wartości $S_0 = S(E_0)$ i pochodnych w rozwinięciu na szereg Taylora wokół wybranego $E = E_0$ są stablicowane. W uproszczonych formułach można dalsze wyrazy tego szeregu pominąć.

Korzystając w (242) ze wzorów (243) i (245-246) znajdziemy

$$\lambda_{j,k} = \left( \frac{2}{kT} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{\pi m_{\rm red}} \right)^{1/2} S_0 \int_0^\infty {\rm e}^{F(E)} dE \tag{247}$$

gdzie

$$F = -\left( \frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} \right) .$$

Funkcja $F(E)$ osiąga maksimum dla energii

$$E = E_G \equiv (0.5kTb)^{2/3} \tag{248}$$

nazywanej *szczytem Gamowa.* Całkę wylicza się kładąc, w przybliżeniu,

$$F = F_G + \frac{1}{2} F_G''(E - E_G)^2.$$

W ten sposób znajduje się

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^F dE \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-F_G^{"}}}\mathrm{e}^{F_G} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}(0.5b)^{1/3}(kT)^{5/6}\exp\left[-\frac{3}{2}b^{2/3}(kT)^{-1/3}\right]. \tag{249}$$

Mamy teraz z (247)

$$\lambda_{j,k} \propto T^{-2/3}\exp\left(-\frac{f}{T_9^{1/3}}\right), \tag{250}$$

gdzie

$$f = \frac{3}{2}b^{2/3}\left(\frac{k}{2}10^9\mathrm{K}\right)^{-1/3} = 4.25(\mathcal{Z}_j\mathcal{Z}_k)^{2/3}\left(\frac{m_{\mathrm{red}}}{m}\right)^{1/3}.$$

Ta forma zależności od tempertury jest charakterystyczna dla reakcji nierezonansowych. Jeżeli reakcja "j"+"k" jest tą wolną reakcją, która determinuje szybkość cyklu, to wykładnik temperaturowy w prawie generacji energii dany jest przez

$$\epsilon_T = \frac{\partial\ln\epsilon}{\partial\ln T} \approx \frac{\partial\ln\lambda_{j,k}}{\partial\ln T} \approx \frac{f}{3T_9^{1/3}} - \frac{2}{3}. \tag{251}$$

W przypadku rezonansu wyrażenie na przekrój czynny zawiera czynnik

$$F_{\mathrm{r}} = [(E-E_{\mathrm{r}})^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1},$$

gdzie $\Gamma \ll E_{\mathrm{r}}$. Wtedy w wyrażeniu na $\lambda$ cały wkład do całki pochodzi z okolicy $E = E_{\mathrm{r}}$ i we wszystkich pozostałych funkcjach $E$ można tę równość założyć. Całka $F_r$ jest elementarna i wynosi $4\pi\Gamma$. Z (247) wynika teraz

$$\lambda_{j,k} \propto T_9^{-3/2}\exp\left(\frac{-11.61E_{\mathrm{r}}}{T_9}\right). \tag{252}$$

Współczynnik liczbowe dla wszystkich rezonansowych reakcji istotnych dla wnętrz gwiazdowych są stablicowane.

Jeżeli reakcja rezonansowa wyznacza tempo cyklu to wykładnik temperaturowy dany jest przez

$$\epsilon_T \approx \frac{11.61E_r}{T_9} - \frac{3}{2}. \tag{253}$$

Uwzględnienie słabego ekranowania wprowadza czynnik

$$S_f = \exp\left(\frac{\mathcal{Z}_j\mathcal{Z}_k}{kTr_D}\right)$$

we wzorze (247). We wzorach (251) i (253) należy odjąć

$$1.5\frac{\mathcal{Z}^2e^2}{r_DkT},$$

a więc wielkość zwykle małą.