9 Równowagowe modele gwiazd

9.1 Gwiazdowe skale czasowe

9.1.1 Kolaps grawitacyjny i dynamiczna skala czasowa

Jeżeli ciśnienie gazu nie równoważy grawitacji, to konfiguracja zapada się tak długo, aż w wyniku wzrostu gradientu ciśnienia nie zostanie osiągnięta równowaga hydrostatyczna. Zapadanie się obiektu pod działaniem samograwitacji nazywa się *kolapsem grawitacyjnym*.

Przypuśćmy, że w gwieździe zbudowanej z gazu doskonałego rozkład ciśnienia i gęstości opisany jest zależnością politropową. Widzieliśmy w rozdziale 2, że politropowe konfiguracje równowagowe istnieją tylko dla $n < 5$. Oznacza to, że dla skompensowania grawitacji konieczny jest pewien gradient temperatury, a zatem niezerowy strumień promieniowania i dostateczna nieprzezroczystość gazu.

Początkową fazę kolapsu można opisywać zaniedbując całkowicie ciśnienie gazu. Wtedy ewolucję promienia kuli o masie M_r opisuje równanie Newtona

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_r}{r^2}.$$

Zadanie: Zakładając że w chwili $t = 0$ makroskopowa prędkość wszystkich punktów wynosiła zero pokazać, że czas zapadania się od wartości promienia $r_0 = r(0)$ do $r(t)$ dany jest przez

$$t(r) = \sqrt{1.5}\tau_d(r_0)\left(\frac{h}{1+h^2} + \arctan h\right)$$

gdzie $h = \sqrt{r_0/r - 1}$, , a

$$\tau_d^{-1}(r) = \sqrt{\frac{3GM_r}{r^3}} = \sqrt{4\pi G\bar{\rho}_r}.$$

Zauważmy, że jeżeli początkowa konfiguracja była jednorodna w gęstości, to τ_d nie zależy od r_0 i konfiguracja pozostaje jednorodna w czasie kolapsu.

Wielkość

$$\tau_d \equiv \tau_d(R) \equiv (4\pi G\bar{\rho})^{-\frac{1}{2}} \approx 15\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{M_\odot}{M}}\ \mathrm{min} \qquad (254)$$

nazywamy *dynamiczną skalą czasową* gwiazdy. Wyznacza ona nie tylko charakterystyczny czas kolapsu, ale też daje niezłe oszacowanie podstawowego okresu pulsacji radialnych, Π_1 i czasu propagacji fali dźwiękowej od powierzchni do centrum, τ_a.

Wzory (73) i (74) z podrozdziału 3.2 dają

$$\Pi_1 = \frac{2\pi}{\sigma_1}\tau_d.$$

Bezywmiarowa częstotliwość modu podstawowego, σ_1, dla większości gwiazd mieści się w przedziale od 1.4 do 2.

Oszacujemy teraz τ_a dla gwiazd politropowych zbudowanych z gazu doskonałego. Prędkość dźwięku w jednoatomowym gazie doskonałym dana jest wzorem

$$v_a = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}}.$$

Czas propagacji ocenimy jako

$$\tau_a \approx \frac{R}{\sqrt{\overline{v_a^2}}},$$

gdzie

$$\overline{v_a^2} = \frac{5}{3}\frac{\int_0^M \frac{p}{\rho} dM_r}{M}.$$

Korzystając równań (13 i 57), dostajemy

$$\overline{v_a^2} = \frac{5}{(5-n)}\frac{GM}{3R},$$

a następnie

$$\tau_a \approx 3\tau_d\sqrt{1-0.2n}.$$

Dokładną wartość τ_a, dla politrop można wyliczyć ze wzoru

$$\tau_a = \int_0^R \frac{dr}{v_a} = \tau_d\sqrt{\frac{0.6(n+1)}{\lambda}}\int_0^{\xi_1}\theta^{-\frac{1}{2}}d\xi$$

Zdanie: Proszę wyprowdzić ten wzór i wyliczyć τ_a dla n=2,3,4. Wartości λ mamy w Tabeli 1 a wartości ostatniej całki wynoszą, odpowiedno, 10, 21 i 69. Następnie, proszę porównać z wynikiem przybliżonym i wyjaśnić przyczynę systematycznej różnicy.

9.1.2 Skala cieplna

Zakładamy, że gwiazda scharakteryzowana parametrami M, R i L znajduje się w równowadze hydrostatycznej. Przez L oznaczamy jasność gwiazdy, czyli całkowity strumień energii promieniowanej w jednostce czasu. Jeżeli jądrowe źródła energii i neutrinowe straty są nieistotne, to mamy

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -L.$$

Skalę czasową ewolucji gwiazdy wyznacza wtedy iloraz $|\mathcal{E}|/L$. Możemy, za wzorem (57) dla politrop, przyjąć GM^2/R jako ocenę $|\mathcal{E}|$. Dlatego wielkość

$$\tau_{\rm th} \equiv \frac{GM^2}{RL} \approx 3\times10^7\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\frac{L_\odot}{L}\frac{R_\odot}{R}\ \text{lat.} \tag{255}$$

definiujemy jako *cieplną skalę czasową*. Jest ona znacznie dłuższa od dynamicznej skali czasowej, ale znacznie krótsza od wieku Ziemi. Słońce musi więc posiadać jądrowe źródła energii. Z tego faktu zdano sobie sprawę już w latach dwudziestych.

Tylko nieliczne spośród obserwowanych gwiazd ewoluują w cieplnej skali czasowej (brązowe karły, gwiazdy typu T Tauri,....). Ponieważ jasność gwiazd ciągu głównego rośnie z masą zazwyczaj szybciej niż M^2 (średni wykładnik wynosi 3.7), a R chociaż wolniej też rośnie, to $\tau_{\rm th}$ jest szybko malejącą funkcją masy. Na przykład, dla gwiazdy o masie $M = 10M_\odot$ na początku jej ewolucji w fazie ciągu głównego mamy $\tau_{\rm th} = 1.5 \times 10^5$ lat.

9.1.3 Jądrowe skale czasowe

Zapas energii jądrowej dany jest przez ilość pierwiastków powstających w wyniku syntezy pomnożonych przez różnicę pomiędzy początkowymi i końcowymi nadwyżkami mas (ΔM, rów. 235). W dokładniejszej ocenie należy pomniejszyć różnice nadwyżek mas o energię unoszoną przez neutrina, ale to obniża wyliczony zapas energii o co najwyżej 10 %. W naszych ocenach pomijamy więc ten efekt.

Koncentrujemy teraz uwagę na fazie ciągu głównego. Ilość atomów helu zsyntetyzowanych w tej fazie zapisujemy jako $X_0 f_M M/m_{\rm He}$, gdzie X_0 oznacza względną początkową obfitość (~ 0.7 dla gwiazd populacji I), a f_M część masy gwiazdy, która podlega syntezie w fazie ciągu głównego. Gdyby produkty nukleosyntezy były całkowicie mieszane, to mielibyśmy $f_M = 1$. Na prawdę, wartość f_M wynosi ok. 0.13 przy $M = 1M_\odot$ i ok. 0.25 przy $M = 10M_\odot$. Z tabeli 2 znajdujemy, że różnica nadyżki masy przy syntezie jednego jądra helu wynosi

$$\Delta E_m = (4 \times 7.29 - 2.4)\ {\rm MeV}\ = 4.3 \times 10^{-5}\ {\rm erg},$$

a zatem dostępny zapas energii wynosi

$$E_n = 4.3 \times 10^{-5} \frac{M}{m_{\rm He}}\ {\rm erg} = 1.3 \times 10^{52} \frac{M}{M_\odot}\ {\rm erg}.$$

Wynika stąd następujące oszacowanie czasu życia gwiazdy na ciągu głównym

$$t_{\rm ms} = 7.5 \times 10^{10} \frac{X_0}{0.7} \frac{M}{M_\odot} \frac{L_\odot}{\bar{L}} f_M\ {\rm lat}, \tag{256}$$

gdzie przez $\bar{L}$ oznaczyliśmy średnią jasność gwiazdy w fazie palenia wodoru, przez $f_{\rm core}$ – względną masę jądra helowego.

Dla gwiazd o masach mniejszych niż ok. $3M_\odot$, tempo następnej fazy ewolucji, następującej gdy zawartość wodoru w centrum spada do zera, wyznacza również synteza helu. Przy masach odpowiednio niskich trwa to aż do początku syntezy węgla. Zapas energii jądrowej, E_n, jest wtedy większy niż dla fazy ciągu głównego. Jednak, ze względu na znacznie większe wartości $\bar{L}$, ta następna faza ewolucji trwa zawsze krócej.

Różnica nadwyżek mas dla syntezy węgla wynosi 7.3 MeV. Część z tworzonych jąder węgla dołacza jądro helu, co wyzwala dodatkowo 4.7 MeV. Zawsze więc jednostki masy otrzymujemy o czynnik co najmniej 10 mniej energii niż przy syntezie helu. Z tego powodu, a także ze względu na wyższe wartości $\bar{L}$, faza syntezy węgla i tlenu w jądrze trwa znacznie krócej od fazy ciągu głównego.

9.2 Rozwiązywanie równań wewnętrznej budowy gwiazd sferycznych

9.2.1 Równania i warunki brzegowe

Przepisujemy cztery równania wewnętrznej budowy: (8), (9), (198-199).

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{257}$$

$$\frac{dp}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{258}$$

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon \equiv \epsilon_{\rm nuc} - \epsilon_\nu \tag{259}$$

$$\frac{dT}{dM_r} = \frac{T}{P}\frac{dP}{dM_r} \times \begin{cases} \nabla_{\rm rad} & \text{jeżeli } \nabla_{\rm rad} \leq \nabla_{\rm ad} \\ \nabla_{\rm ad} + \nabla_n & \text{jeżeli } \nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad} \end{cases} \tag{260}$$

Postać ostatniego równania jest nieco zmieniona. Mamy w nim

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r p}{16\pi Gac M_r T^4}.$$

Gradient nadadiabatyczny, $\nabla_n \equiv \nabla - \nabla_{\rm ad}$, uwzględnia się jedynie w warstwach zewnętrznych gwiazd, wyliczając go według opisu podanego w podrozdziale 7.4.

Zależności mikroskopowe $p(\rho, T, \boldsymbol{X})$, $\epsilon(\rho, T, \boldsymbol{X})$, $\nabla_{\rm ad}(\rho, T, \boldsymbol{X})$ i $\kappa(\rho, T, \boldsymbol{X})$ traktujemy jako znane *dane materiałowe.* Także jako dane traktujemy $\boldsymbol{X}(M_r)$.

Mamy więc cztery równania różniczkowe zwyczajne na cztery następujące funkcje: $r(M_r)$, $p(M_r)$, $T(M_r)$, $L(M_r)$. Oczywiście korzystając z z zależności $p(\rho, T, \boldsymbol{X})$, oraz z równań (257) i (260) można łatwo uzyskać wyrażenie na pochodną ρ i zastąpić nim (257).

Mamy też cztery warunki brzegowe.

$$\text{Dla } M_r = 0 \qquad L_r = 0 \text{ i } r = 0. \tag{261}$$

Te nie wymagają komentarza. Jako zewnętrzne warunki brzegowe przyjmujemy

$$\text{dla } M_r = M \qquad \rho \approx 0 \text{ i } T = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_{\rm eff} = \frac{L}{8\pi\sigma R^2} \tag{262}$$

Pierwszy z warunków odpowiada $p = 0$. Ze względu na ograniczenie danych materiałowych, przyjmuje się pewną małą, ale nie zerową wartość ρ na zewnętrznym brzegu. Drugi warunek wynika ze (184) i wyraża fakt, że gwiazda nie jest oświetlana z zewnątrz.

Mamy tyle równań i warunków brzegowych ile niewiadomych funkcji. *Twierdzenie Vogta-Russella*, mówiące że z materii o danym składzie chemicznym i danej masie można skonstruować jeden i tylko jeden model gwiazdy jest jednak fałszywe. Jako kontrprzykład można podać, że w zakresie mas od ok 0.1 do 1.5 $M_\odot$ można z materii o takim składzie chemicznym jak w otoczce Słońca, zbudować zarówno gwiazdę ciągu głównego, w której jądrze zachodzi synteza helu jak i zimnego białego karła. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych nie stosuje się do problemów brzegowych.

Zadanie: Otoczką gwiazdy nazwiemy tu jej część zewnętrzną, w której można założyć

$$M_r \approx M \text{ i } L_r \approx L.$$

Zakładając, równanie gazu doskonałego, $\nabla_{\rm rad} \leq \nabla_{\rm ad}$ i współczynnik nieprzezroczystości w postaci

$$\kappa = \kappa_0 \rho^q T^{-s},$$

gdzie q i s są dodatnimi stałymi, proszę pokazać, że – poczynając od pewnej głębokości – struktura otoczki jest w przybliżeniu politropowa.
Wskazówka: Skorzystać z tego, że p i T są szybko malejącymi funkcjami r dla $r \approx R$.

9.3 Algorytm

Równania (257-260) rozwiązuje się metodą iteracji ze zszywaniem w punkcie pośrednim, $M_r = M_{\rm fit}$. Potrzebna jest znajomość przybliżonych wartości $\rho(0) = \rho_c$,$T(0) = T_c$, L oraz $T_{\rm eff}$ lub R. Rozwiązanie od centrum ku górze rozpoczyna się od rozwinięcia w szereg potęgowy. Dla dostatecznie małych wartości mamy z (257)

$$r = \left(\frac{3M_r}{4\pi\rho_c}\right)^{1/3}, \tag{263}$$

a z równania (258)

$$p = p_c - \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3}\pi\rho_c^4\right)^{1/3}, \tag{264}$$

gdzie $p_c = p(\rho_c, T_c)$. Odtąd wskaźnik "c" oznaczać będzie wielkości wyliczane dla argumentów $\rho = \rho_c$ i $T = T_c$. Z (259) mamy

$$L_r = \epsilon_c M_r, \tag{265}$$

a podstawiając to do (260) otrzymujemy

$$T = T_c - \frac{T_c}{p_c} {\rm Min}(\nabla_{{\rm rad},c}, \nabla_{{\rm ad},c}) \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3}\pi\rho_c^4\right)^{1/3}, \tag{266}$$

gdzie

$$\nabla_{\mathrm{rad},c} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{p_c\kappa_c\epsilon_c}{T_c}. \tag{267}$$

Tu, podobnie jak w całym głębokim wnętrzu, przyjęliśmy $\nabla_n = 0$.
Dalej, posługując się różnicową reprezentacją równań (257-260), kontynuuje się wyliczanie zmiennych aż do wybranej wartości $M_r = M_{\mathrm{fit}}$. Oznaczmy wartości czterech wybranych zmiennych zależnych w punkcie zszycia przez $y_{j,\mathrm{core}}$ ($j = 1,2,3,4$). Wartości te są funkcjami $\rho_c = x_1$ i $T_c = x_2$.

Całkowanie od powierzchni wgłąb wykonujemy dla próbnych wartości $L = x_3$ i $T(M) = (\frac{1}{2})^{1/4}T_{\mathrm{eff}} = x_4$. Przyjmując, na przykład, $\rho(M) = 10^{-12}$ mamy już wszystkie dane do rozpoczęcia całkowania wgłąb do $M_r = M_{\mathrm{fit}}$. Wartości zmiennych zależnych w tym punkcie oznaczamy teraz $y_{j,\mathrm{env}}$.

Na ogół stwierdzamy, że

$$d_j = y_{j,\mathrm{env}} - y_{j,\mathrm{core}} \neq 0.$$

Zmieniamy więc wartości x_k tak długo, aż osiągniemy dopasowanie z założoną dokładnością. (Maksymalna wartość $|d_j/y_j|$ mniejsza od ustalonej małej liczby.) Poprawki Δx_k można wyznaczać posługując się n.p. metodą iteracji zakładając przybliżenie liniowe w każdym kroku. Wtedy bieżące wartości Δx_k dostajemy jako rozwiązania równań.

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial y_{j,\mathrm{core}}}{\partial x_k}\Delta x_k - \sum_{k=3}^{4}\frac{\partial y_{j,\mathrm{env}}}{\partial x_k}\Delta x_k = d_j. \tag{268}$$

Pochodne cząstkowe wyliczamy numerycznie. Wyznaczone poprawki dodaje się do x_k i proces powtarza, aż do uzyskania wymaganej dokładności zszycia.

9.4 Równowaga cieplna gwiazd rotujących

W rozdziale 1.4 pokazaliśmy , że w przypadku rotacji cylindrycznej (w tym jednorodnej) w obszarze chemicznie jednorodnym wszystkie parametry termodynamiczne są stałe na powierzchniach całkowitego potencjału mechanicznego, Φ_T. Wniosek pzostaje ważny dla konfiguracji chemicznie niejednorodnych jeśli tylko skłdowe $\boldsymbol{X}$ są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych. Zatem także wielkości κ i ϵ są stałe na ta tych powierzchnich i strumień promieniowania (rów.186) można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}} = \eta(\Phi_T)\boldsymbol{g}, \tag{269}$$

gdzie

$$\eta = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{d\Phi_T} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\nabla}\Phi_T.$$

W odróżnieniu od parametrów termodynamicznych, $g = |\mathbf{g}|$ (przyspieszenie odśrodkowe uwzględnione w $\boldsymbol{g}$) i $F_{\mathrm{rad}} = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}}|$ nie są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych. Na przykład w modelu Roche'a, stosunek przyspieszenia biegunowego do równikowego na powierzchni ekwipotencjalnej dany jest przez

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{(1 + 0.5\epsilon_{\mathrm{rot},r})^2}{1 - \epsilon_{\mathrm{rot},r}}, \quad z \quad \epsilon_{\mathrm{rot,r}} = \frac{\Omega r_e^3}{GM}, \tag{270}$$

co łatwo wynika z (28).

Równanie (269) prowadzi do *prawa von Zeipe la* dla rozkładu temperatury efektywnej na powierzchni niesferycznej gwiazdy.

$$T_{\mathrm{eff}} \propto F_{\mathrm{rad}}^{1/4} \propto g^{1/4}. \tag{271}$$

Stosuje się ono do gwiazd dostatecznie gorących, w których otoczkach strumień konwektywny można zaniedbać i dla wszystkich potencjalnych sił odkształcających, na przykład do gorących składników ciasnych układów podwójnych. Czasami używa sie terminu *pociemnienie grawitacyjne.* Gwiazda rotująca oglądana ze strony bieguna wygląda na obiekt wcześniejszego typu niż oglądana z płaszczyzny równikowej.

W gwieździe niesferycznej na ogół nie udaje się spełnić warunku równowagi cieplnej w formie

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \epsilon\rho - \mathrm{div}\boldsymbol{F} = 0. \tag{272}$$

Problem ten znany jest jako *paradoks von Zeipela.* Dostrzec go łatwo używając wyrażenia (269) w w równaniu bilansu ciepła (272). Dostajemy wtedy

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \epsilon_{\mathrm{nuc}}\rho - \eta \vec{\nabla}^2 \Phi_T - \frac{d\eta}{d\Phi_T} g^2. \tag{273}$$

Dla przypadku rotacji jednorodnej mamy z (2) i (24)

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_T = 4\pi G\rho - 2\Omega^2. \tag{274}$$

Widzimy, że pierwszy i drugi wyraz lewej strony (273) są stałe na powierzchniach ewipotencjanych, ale nie dotyczy to ostatniego wyrazu. Poza szczególną sytuacją gdy $\frac{d\eta}{d\Phi_T} = 0$, nie można go skompensować tak, aby spełnić warunek równowagi cieplnej. W tej szczególnej sytuacji musielibyśmy mieć jednak zupełnie nierealistyczne prawo generacji energii, $\epsilon = 4\pi G - 2\Omega^2/\rho$. Stąd wniosek o niemożności spełnienia równania (272) w przypadku rotacji jednorodnej.

Brak równowagi cieplnej ma miejsce dla "prawie" wszystkich niesferycznych modeli gwiazd przy założonej sile odkształcającej. W przypadku małych odkształceń, rozpatrywanych w podrozddziale 1.5, wniosek wynika z tego, że nieradialne składowe zaburzeń p i ρ wyznaczone są przez warunek równowagi sił i nie ma już swobody dla spełnienia warunku równowagi cieplnej.

Jeżeli natomiast $\Omega(r, \theta)$ jest traktowana jako nieznana funkcja, to wtedy mamy potrzebną swobodę dla wprowadzenia warunku $dS/dt = 0$. Otrzymane w taki sposób prawa rotacji są jednak niestabilne.

Konsekwencją nierównowagi cieplnej jest *cyrkulacja południkowa* inaczej *cyrkulacja Eddingtona-Vogta*. Przy założeniu stacjonarności, wzory na składowe pola prędkości cyrkulacji można uzyskać z równania (273) i z równania ciągłości (86). Wzory są dość skomplikowane. Tu podaję bez wyprowadzenia wzór na składową radialną, ważny dla powolnej rotacji, równania gazu doskonałego i w pewnej odległości od granicy obszarów konwektywnych. Ma on postać

$$v_{\mathrm{mc},r} = \tilde{v}_{\mathrm{mc}}(r) P_2(\cos\theta), \tag{275}$$

gdzie

$$\tilde{v}_{\mathrm{mc}} = \frac{4}{3}\frac{\Omega^2 r}{g}\frac{\nabla_{\mathrm{ad}}}{\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla_{\mathrm{rad}}}\frac{r^2 L_r}{G M_r^2}\left(1 - \frac{M_r}{L_r}\epsilon\right)\left(1 + \frac{3}{2r\Omega^2}\frac{d\tilde{\Phi}_2}{dr}\right). \tag{276}$$

Najważniejszym pytaniem jest to, czy cyrkulacja południkowa może mieszać pierwiastki. Spodziewamy się mieszania produktów nukleosyntezy, jeśli

$$\tau_{\mathrm{mc}} \equiv \int_{r_c}^{R} \frac{dr}{\tilde{v}_{\mathrm{mc}}} \sim \tau_{\mathrm{ms}}. \tag{277}$$

Ze wzorów (277) i (255) wynika następujące oszacowanie

$$\tau_{\mathrm{mc}} \sim \frac{\tau_{\mathrm{th}}}{\epsilon_{\mathrm{rot}}} \tag{278}$$

Przykład: Dla gwiazdy ciągu głównego o masie $M = 5M_\odot$, $\tau_{\mathrm{ms}} = 10^8$ lat, $t_{\mathrm{th}} = 6 \times 10^5$ lat. Stąd

$$\tau_{\mathrm{mc}} \approx 6 \times 10^{-3} \tau_{\mathrm{ms}} \left(\frac{\Omega_{\max}}{\Omega}\right)^2.$$

Dla takiej gwiazdy $\Omega_{\max}$ odpowiada ok. 500 km/s.
Przy typowych prędkościach dla gwiazd górnego ciągu głównego $\sim 10^2$ km/s wpływ cyrkulacji na redystrybucję helu i wodoru powinien być istotny. Przy ocenie efektywności transportu pierwiastków przez cyrkulację należy uwzględnić

(a) zwrotny efekt horyzontalnego gradientu μ (Wiadomo, że hamuje on cyrkulację),

(b) zwrotny wpływ cyrkulacji na rotację gwiazdy.