10 Modele ewolucyjne gwiazd

Konwencja: Lokalne parametry fizyczne ewoluujących gwiazd traktujemy jako funkcje czasu t i lokalnej masy M_r. Symbol d/dt oznacza pochodną przy ustalonym M_r, a symbol d/dM_r pochodną przy ustalonym t.

10.1 Źródła zmian ewolucyjnych

10.1.1 Nierównowaga cieplna

Występuje wtedy, gdy

(i)brak dostatecznie wydajnych jądrowych źródeł energii

(ii)nukleosynteza jest niestabilna.

Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia na przykład w fazie ewolucji przed ciągiem głównym, kiedy temperatura jest zbyt niska dla syntezy wodoru. Zachodzi wtedy kontrakcja gwiazdy w cieplnej skali czasowej (rów. 255). Po wyczerpaniu wodoru w jądrze konwektywnym jego struktura zmienia się w izotermiczną. Jeżeli względna masa takiego jądra przekracza pewną krytyczną wartość, to następuje jego kontracja w skali cieplnej. Kończy ją bądź degeneracja elektronów, bądź – w przypadku gwiazd o większej masie niż ok. $2.25M_\odot$– początek syntezy węgla. Białe karły i gwiazdy neutronowe ewoluują także w skali cieplnej, ale wzór (255) do tych obiektów się nie stosuje, bo został wyprowadzony przy założeniu równania stanu gazu doskonałgo i mechaniki newtonowskiej.

Nukleosynteza jest niestabilna wtedy, gdy wzrost wydzielanej energii w reakcjach nie powoduje wzrostu ciśnienia. Mówimy wtedy o *niestabilności cieplnej* gwiazdy. Działa dodatnie sprzężenie zwrotne. Rośnie temperatura,co skutkuje dalszym wzrostem wydzielanej energii. Spotykamy się z tym zjawiskiem w fazie *zapalenia helu* w zdegenerowanych jądrach gwiazd o niewielkich masach (*błysk helowy*), a także w białych karłach akreujących bogatą w wodór materię. Zdarza się to w układach podwójnych i odpowiada za wybuch znany jako zjawisko *gwiazdy nowej*. Dodatnie sprzężenie zwrotne występuje też wtedy, gdy reakcja palenia helu zachodzi w cienkiej warstwie nad węglowo-tlenowym jądrem. W tym przypadku niestabilność prowadzi do szybkich cyklicznych zmian parametrów gwiazdy.

W modelowaniu ewolucji gwiazd posługujemy się zawsze równaniem bilansu ciepła uwzględniając pochodną czasową entropii (rów.195). Tak więc, dla ewoluujących gwiazd sferycznych w miejsce równania (257) używamy

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon - 4\pi r^2 \left[c_v \left(\frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1)\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \right) + \sum_j \frac{\partial u}{\partial X_j}\frac{dX_j}{dt} \right]. \tag{277}$$

Pochodna czasowa u została tu wyrażona poprzez pochodne T, ρ i względnych obfitości pierwiastków. Wykorzystaliśmy przy tym wzory (110-111) z rozdziału 5. Posługując się tym równaniem uwzględniamy automatycznie nierównowagę cieplną. Oczywiście jeżeli ewolucja postępuje w jądrowej skali czasowej, to człony zawierające pochodne czasowe są małe. Człon zawierający pochodne obfitości jest istotny tylko wtedy, gdy dochodzi do szybkiego mieszania warstw, w których wcześniej zachodziła nukleosynteza.

10.1.2 Zmiany składu chemicznego

Ewolucja chemiczna gwiazd jest skutkiem nukleosyntezy, mieszania pierwiastków, dyfuzji i selektywnego ciśnienia promieniowania. Tu napiszemy formalnie

$$\frac{dX_i}{dt} = \mathcal{C}_{i,\mathrm{nuc}} + \mathcal{C}_{i,\mathrm{mix}} + \mathcal{C}_{i,\mathrm{dif}} + \mathcal{C}_{i,\mathrm{rad}}. \tag{278}$$

Tempo zmian względnej obfitości i-tego izotopu w wyniku reakcji termo-jądrowych dane jest wzorem,

$$\mathcal{C}_{i,\mathrm{nuc}}(\rho, T, \boldsymbol{X}) = \frac{\rho}{m}\left[\sum_j \sum_k \lambda_{j,k} A_i \frac{X_j X_k}{A_j A_k} - \sum_l \lambda_{i,l} \frac{X_i X_l}{A_l}\right], \tag{279}$$

kóry wynika z (236), dla izotopów stabilnych ($\tilde{\lambda}_i = 0$).

Mieszanie pierwiastków w konwektywnych jądrach jest procesem bardzo szybkim. Zachodzi w skali czasowej dłuższej niż τ_d, ale znacznie krótszej niż τ_th. Dlatego przyjmuje się, że produkty nukloesyntezy w jądrach konwektywnych ulegają natychmiastowemu mieszaniu. W standardowym modelowaniu ewolucji zaniedbuje się inne efekty prowadzące do mieszania pierwiastków, a także $\mathcal{C}_\mathrm{dif}$ i $\mathcal{C}_\mathrm{rad}$. Uwzględnia się jednak czasami, w ramach modeli standardowych, możliwość mieszania pierwiastków w pewnym obszarze poza granicą jądra konwektywnego $M_r = M_\mathrm{c}$ wyznaczoną przez warunek $\nabla_\mathrm{rad} = \nabla_\mathrm{ad}$. Ma to symulować efekt *przestrzeliwania (overshooting)* elementów turbulentnych. Nie potrafimy wyliczyć jego zasięgu. Zwyczajowo przyjmuje się na zasięg mieszania wielkość $d_\mathrm{ov} H_p(M_\mathrm{c})$ i w rozmaity sposób dobiera wartoś ć d_ov z przedziału $[0, 1]$. Jeżeli w trakcie postępu ewolucji masa jądra konwektywnego ma tendencję do wzrostu to, w standardowych modelach, równanie opisujące ewolucję chemiczną sprowadza sie do

$$\frac{dX_i}{dt} = \begin{cases} \mathcal{C}_{i,\mathrm{nuc}} & \text{dla } M_r > M_\mathrm{mix} \\ \frac{1}{M_\mathrm{mix}} \int_0^{M_\mathrm{mix}} \mathcal{C}_{i,\mathrm{nuc}} dM_r & \text{dla } M_r \le M_\mathrm{mix} \end{cases}, \tag{280}$$

gdzie $M_\mathrm{mix} = M_\mathrm{conv} + M_\mathrm{ov}$. Zauważmy, że przy $d_\mathrm{ov} \neq 0$ mamy nieciągłość X_j i ρ dla $M_r = M_\mathrm{mix}$

Jeżeli masa jądra przyrasta w trakcie ewolucji, to zakłada się częściowe mieszanie produktów nukleosyntezy w obszarze stabilnym przylegającym do obszaru konwekcji w taki sposób, aby spełnić warunek neutralnej stabilności względem konwekcji, $\nabla_{\rm rad} = \nabla_{\rm ad}$. W takim obszarze, nazywanym *warstwą półkonwektywną*, wartości $X_i(M_r)$ wyznacza warunek

$$\frac{d(\nabla_{\rm rad} - \nabla_{\rm ad})}{dM_r} = 0,$$

z którego można uzyskać wyrażenie na pochodne obfitości izotopów,

$$\frac{dX_i}{dM_r} = F_i(\rho, T, L_r, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_c, M_r). \tag{281}$$

Wielkość $\boldsymbol{X}_c$ oznacza obfitości w jądrze konwektywnym. Jawną, choć dość zawiłą, postać funkcji F_i, można usyskać w oparciu o równania wewnętrznej budowy. Górne ograniczenie warstwy półkonwekywnej wyznacza miejsce, w którym obfitość "spalanego" izotopu zrówna się z obfitością wynikającą z lokalnej wartości $\mathcal{C}_{i,\rm nuc}$.

Dane obserwacyjne częściowo uzasadniają zaniedbanie zmian chemicznych w warstwach zewnętrznych. Skład chemiczny atmosfer większości gwiazd należących do jednej populacji jest podobny, niezależny od ich zaawansowania ewolucyjnego. Istnieją jednak ważne wyjątki.

Gwiazdy typu Ap i Am, które wykazują rozmaite anomalie w obfitościach pierwiastków. Tłumaczy się je efektami dyfuzji i selektywnego ciśnienia promieniowania. Atmosfery białych karłów, poza nielicznymi wyjątkami, są bądź czysto wodorowe (typ DA) bądź czysto helowe (typ DB). Dowodzi to efektywności baro-dyfuzji (grawitacyjnego osiadania) cięższych pierwiastków. Ten efekt powinien działać we wszystkich gwiazdach.

W chłodnych gwiazdach mieszanie pierwiastków w rozległych warstwach konwektywnych znacznie redukuje efektywność dyfuzji. Na przykład dla Słońca wartość Y w otoczce obniżyła się w ciągu 4.6 miliardów lat jego życia tylko o ok. 10%. od 0.28 do 0.25. O podobny procent obniżyła się względna obfitość cięższych pierwiastków. Brak widocznych efektów dyfuzji w atmosferach większości gwiazd o cienkich zewnętrznych warstwach konwektywnych tłumaczy się istnieniem powolnego mieszania związanego z cyrkulacją południkową. Co dowodzi, że mieszanie to jest wystarczające do zniesienia efektu baro-dyfuzji, ale nie do wydobycia produktów nukleosyntezy z głębokiego wnętrza na powierzchnię gwiazdy. .

Zmiany koncentracji wywołane dyfuzją opisane są przez dwa następujące równania

$$\mathcal{C}_{i,\rm dif} = -4\pi \frac{d(r^2\mathcal{F})_i}{dM_r}, \tag{282}$$

gdzie strumień dyfuzyjny $\mathcal{F}_i$ dany jest wzorem

$$\mathcal{F}_i = 4\pi r^2 \rho \left(-D_{d,i}\frac{dX_i}{dM_r} + D_{p,i}\frac{dp}{dM_r} + D_{T,i}\frac{dT}{dM_r} \right). \tag{283}$$

Trzy kolejne człony w tym wyrażeniu opisują efekty zwykłej dyfuzji molekularnej, oraz baro- i termo-dyfuzji. Współczynniki $D_{d,i}$, $D_{p,i}$ i $D_{T,i}$ wyraża się w funkcji lokalnych wartości ρ, T i $\boldsymbol{X}$ przez odpowiednie równania materiałowe. Uwzględnienie dyfuzji pierwiastków podnosi rząd różniczkowy równań ewolucji gwiazd w t i w M_r. Dodatkowymi warunkami brzegowymi są

$$\mathcal{F}_i = 0 \text{ dla } M_r = 0 \text{ i } M.$$

Wpływ powolnej turbulencji opisuje się czasami tak, jak zjawisko dyfuzji. Wtedy do $D_{d,i}$ dodaje się dodatkowy, wspólny dla wszystkich pierwiastków, człon.

Efekt selektywnego ciśnienia promieniowania, $\mathcal{C}_{i,\mathrm{rad}}$, dla zadanych lokalnych wartości ρ, T, $\boldsymbol{X}$ i L_r , daje się opisać ściśle. Uwzględnienie tego efektu nie podnosi różniczkowego rzędu problemu, ale bardzo komplikuje obliczenia . Robi się to dopiero od niedawna.

10.1.3 Utrata i akrecja materii

Te efekty odgrywają fundamentalną rolę w ewolucji składników ciasnych układów podwójnych. W przypadku gwiazd pojedynczych, utrata masy jest istotna w ewolucji gwiazd bardzo masywnych na ciągu głównym. Dla gwiazd o masie $M > 30M_\odot$ skala czasowa utraty masy,

$$t_{\mathrm{m.l.}} = -\frac{dt}{d\ln M},$$

jest porównywalna z t_{nuc}. Przyczyną tak szybkiej utraty masy jest *wiatr* gwiazdowy napędzany promieniowaniem w bardzo gorących atmosferach. Ten efekt jest nieistotny dla gwiazd chłodniejszych. Wiatr typu słonecznego nie prowadzi do znaczącej utraty masy. Dla Słońca tempo utraty masy spowodowane wiatrem wynosi $2 \times 10^{-14} M_\odot/\mathrm{rok}$ i jest porównywalne z utratą masy wynikającą z nukleosyntezy.

Dla gwiazd pojedynczych o masach mniejszych niż $\sim 30M_\odot$ znacząca utrata masy występuje dopiero w fazie czerwonych olbrzymów i nadolbrzymów. Wtedy powoduje ją ciśnienie promieniowania działające na ziarna pyłu w atmosferach tych gwiazd.

Utratę masy opisuje się zazwyczaj wzorami empirycznymi postaci

$$\frac{dM}{dt} = f(\boldsymbol{X}, M, R, L). \tag{284}$$

10.2 Warunki początkowe

Standardowym podejściem jest rozpoczynanie obliczeń ciągów ewolucyjnych od wieku zero (modele ZAMS). Wpływ wcześniejszych etapów ewolucji na strukturę gwiazd na ciągu głównym jest zaniedbywalny, jeśli nie rozważamy efektów rotacji i pola magnetycznego. Skutki nukleosyntezy zachodzącej przed wiekiem zero są albo nieistotne dla struktury gwiazdy (n.p. reakcje Li+p, D+p) albo łatwe do uwzględnienia w modelach wieku zero, a później szybko zapominane (reakcje ^{3}He+^{3}He, ^{12}C+p).

Modelowanie gwiazd znajdujących się w fazie przed ciągiem głównym ma samodzielne znaczenie. Dla takich ciągów modelami inicjującymi są modele całkowicie konwektywne.

10.3 Jednoznaczność rozwiązań równań ewolucji

Niech składowe wektora $\boldsymbol{y}(M_r, t)$ oznaczają kolejno r, ρ, L_r, T i obfitości tych pierwiastków, $\boldsymbol{X}$, których zmiany obfitości chcemy śledzić. Jeżeli znamy $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$ w pewnej chwili $t = t_0$ i mamy wszystkie potrzebne dane materiałowe, to z pomocą równań (255-256, 258, 277, 278) możemy, w zasadzie, wyznaczyć $\boldsymbol{y}$ w dowolnej chwili t. Przekonuje nas o tym następujące rozumowanie.

Oznaczmy przez Δt mały przyrost czasu od momentu t_0, na tyle mały żeby wyrazy rzędu Δt^2 były zaniedbywalne. Używamy równań (278) lub do wyznaczenia X_i w chwili $t_0 + \Delta t$, wyliczając ich prawe strony w chwili t_0. Znając $\boldsymbol{y}_0$ mamy wszystkie potrzebne do tego dane.

Równania (255-256), (277) i (258) zapisujemy w postaci

$$\mathcal{R}_j(\boldsymbol{y}) \equiv \frac{df_j(\boldsymbol{y})}{dM_r} + h_j(\boldsymbol{y}) = 0 \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{285}$$

Zauważmy, że dla $j \neq 2$ mamy po prostu $f_j = y_j$. Z różnicowej wersji równania (277) dostajemy liniowy związek pomiędzy małymi przyrostami $\Delta\rho$ i ΔT,

$$c_v \left[\Delta T - (\Gamma_3 - 1)\frac{T}{\rho}\Delta\rho\right] = \frac{\Delta t}{4\pi r^2}\left(\epsilon - \frac{dL_r}{dM_r}\right) - \sum_i \frac{\partial u}{\partial X_i}\Delta X_i,$$

w którym współczynniki i wielkości po prawej stronie równości są znane. Korzystamy z tego związku w zlinearyzowanej wersji dwóch pierwszych równań (285). Dostajemy układ dwóch równań liniowych, niejednorodnych na $\Delta\rho$ i Δr.

Zadanie Proszę napisać jawną postać tego układu równań i dowieść, że ma zawsze rozwiązania, poza przypadkiem neutralnej stabilności dynamicznej.

Ostatnie z równań (285), czyli (258), wyznacza ΔL_r. Opisane postępowanie dowodzi istnienia rozwiązań równań ewolucji, ale nie prowadzi do stabilnego schematu obliczeń numerycznych.

10.4 Metoda Henyeya

Schemat różnicowy śledzenia ewolucji w czasie opisany powyżej nosi nazę *metody explicite*. W tej metodzie wszystkie pochodne wyliczane są na początku kroku czasowego. Tu przedstawiam oryginalną wersję metody Henyeya, w której ewolucja chemiczna traktowana jest metodą *explicite* natomiat ewolucja cieplna traktowana metodą *implicite*. Oznacza to, że stosować będziemy następującą reprezentację różnicową równania (277).

$$\overline{\frac{dL_r}{dM_r}} = \overline{\epsilon} - 4\pi r^2 \left[\overline{c_v T} \left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta t} - \overline{(\Gamma_3 - 1)} \frac{\Delta \ln \rho}{\Delta t} \right) - \sum_i \overline{\frac{\partial u}{\partial X_i}} \frac{\Delta X_i}{\Delta t} \right], \tag{286}$$

gdzie kreski nad symbolem oznaczają średnie arytmetyczne wartości na początku i końcu kroku czasowego Δt, który powinien być dostatecznie mały. Zmiany chemiczne, według przepisów opisanych w podrozdziale 10.1.2, wykonuje się po każdym kroku czasowym.

Przyjmiemy, że mamy przybliżoną wartość $\Delta \boldsymbol{y}$. Dla pierwszego modelu w ciągu startującym z ZAMSu przyjmuje się zwykle $\Delta \boldsymbol{y} = 0$, a w kolejnych modelach przyrosty wynikające z wartości $\Delta \boldsymbol{y}/\Delta t$ w poprzednim kroku czasowych. Dalej nie korzysta się już z założenia, że przyrosty $\Delta \boldsymbol{y}$ są małe, a tylko poprawki do nich,

$$\delta \boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{z},$$

będące zarazem poprawkami do $\boldsymbol{y}$ Równania (285) linearyzuje się względem $\boldsymbol{z}$.

Schemat iteracyjnego wyznaczania poprawek $\boldsymbol{z}$ pokazują dwa następujące równania

$$\mathcal{R}_j(\boldsymbol{y}_0 + \Delta_i \boldsymbol{y}) + \sum_k \left\{ \frac{d}{dM_r} \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_i \boldsymbol{z}_k \right] + \left(\frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i \boldsymbol{z}_k \right\} = 0 \tag{287}$$

i

$$\Delta_{i+1} \boldsymbol{y} = \Delta_i \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \tag{288}$$

gdzie wskaźnik "i" numeruje kolejne iteracje. Kontynuuje się je tak długo, aż największa z liczb $|z|$ nie stanie się mniejsza od przyjętej wartości. Metoda iteracji jest więc podobna do opisanej dla konstrukcji modelu na ZAMS, ale zamiast czterech iterowanych wielkości mamy $4 \times N$, gdzie N jest liczbą punktów węzłowych w modelu.

Różnicowa (w M_r) reprezentacja równań (287) prowadzi do następujących liniowych związków łączących $\boldsymbol{z} \equiv \delta \boldsymbol{y}$ w sąsiednich punktach sieciowych.

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} + D_M \frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i^{n+1} z_k^{n+1} = \sum_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} - D_M \frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right)_i^{n} z_k^n - D_M (\mathcal{R}_j^{n+1} + \mathcal{R}_j^n)_i,$$

gdzie wkaźniki górne numerują punkty sieciowe, a $D_M = (M_r^{n+1} - M_r^n)/2$. Po odwróceniu macierzy dostajemy

$$\boldsymbol{z}^{n+1} = \boldsymbol{A}^{n,n+1} \boldsymbol{z}^n + \boldsymbol{w}^{n,n+1}, \tag{289}$$

gdzie $\boldsymbol{A}^{n,n+1}$ jest znaną macierzą 4×4, a $\boldsymbol{w}^{n,n+1}$ jest znanym wektorem. W sumie mamy $4 \times (N-1)$ równań na $4 \times N$ niewiadomych $\boldsymbol{z}^n$. Warunki brzegowe dostarczają brakujących czterech równań.

Warunki brzegowe zachowają tę samą postać co dla modeli równowagowych, jeśli w ϵ_c występującym w równaniu (263) uwzględnimy człon z pochodnymi czasowymi, podobnie jak to zrobiliśmy w równaniu (277). Linearyzując równania (261-265) znajdziemy łatwo (tu opuszczam te mało interesujące obliczenia) macierz $\boldsymbol{B}^1$ o wymiarach 4×2 i wektor $\boldsymbol{C}^1$ w relacji

$$\boldsymbol{z}^1 = \boldsymbol{B}^1 \begin{pmatrix} \delta\rho_c \\ \delta T_c \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}^1. \tag{290}$$

Korzystając następnie z równania (289), możemy wyliczyć kolejne macierze $\boldsymbol{B}^n$ i wektory $\boldsymbol{C}^n$, zdefiniowane następującym wzorem.

$$\boldsymbol{z}^n = \boldsymbol{B}^n \begin{pmatrix} \delta\rho_c \\ \delta T_c \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}^n. \tag{291}$$

Zewnętrzny warunek brzegowy nakłada się w punkcie $n = N$, który zwykle nie pokrywa się z brzegiem gwiazdy. Strukturę *otoczki*, obejmującej małą część masy gwiazdy, można modelować korzystając z równowagowych równań wewnętrznej budowy (255-258) kładąc $L_r = L$. W otoczce nie zachodzą reakcje jądrowe, a mała energia w niej zawarta uzasadnia założenie równowagi cieplnej, nawet wtedy gdy ewolucja gwiazdy zachodzi w cieplnej skali czasowej.

Całkując te równania od powierzchni wgłąb do $M_r = M_r^N$ dla wybranych wartości L i $T_{\rm eff}$, znajduje się wartości $\boldsymbol{y}^N$. Dodatkowe całkowania dla par $(L + \delta L, T_{\rm eff})$ i $(L, T_{\rm eff} + \delta T_{\rm eff})$, pozwalają na liczbowe wyznaczenia macierzy $\boldsymbol{D}^N$ o wymiarach 4×2 i w relacji

$$\boldsymbol{z}^N = \boldsymbol{D}^N \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta T_{\rm eff} \end{pmatrix}. \tag{292}$$

To równanie w połączeniu z (291) dla $n = N$ prowadzi do układu czterech równań liniowych niejednorodnych na $\delta\rho_c$, δT_c, δL i $\delta T_{\rm eff}$. Po wyznaczeniu $\delta\rho_c$ i δT_c i poprawek do parametrów powierzchniowych, znajduje się wszystkie wartości $\delta\boldsymbol{y}(M_r^n) = \boldsymbol{z}^n$ korzystając ze związków (291).

Po zakończeniu iteracji mamy model gwiazdy w chwili t. Teraz wylicza się zmiany obfitości pierwiastków, ΔX_i, dla założonego kroku czasowego, Δt. Wybór wartości Δt zależy od tempa ewolucji. Czasami zmniejszenie Δt wymusza brak zbieżności iteracji.