Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu
im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Paweł Kankiewicz

Wpływ subtelnych efektów grawitacyjnych na ewolucję orbit planetoid zbliżających się do Ziemi

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. Edwin Wnuk

Poznań, 2003

Spis treści

Wstęp

Niedawno minęło 200 lat od odkrycia pierwszej planetoidy – Ceres. Niecałe 100 lat po tym wydarzeniu odkryto Erosa, pierwszego znanego przedstawiciela planetek z bliskiego otoczenia Ziemi. Jednak prawdziwą ekspansję badań planetoid przyniósł wraz z misjami kosmicznymi koniec dwudziestego wieku.

Dynamika małych ciał naszego układu planetarnego jest dziedziną, która w ciągu ostatnich dekad rozwinęła się bardzo intensywnie. Badania kosmiczne dostarczyły bardzo wielu nowych odkryć i obecnie postrzegamy Układ Słoneczny jako złożony, trudno przewidywalny w ewolucji system. Analiza ruchu wszystkich tych ciał jest z punktu widzenia mechaniki nieba zagadnieniem bardzo skomplikowanym. Przewidywanie „przyszłości dynamicznej" małych ciał, a więc badanie ewolucji orbitalnej to problematyka wciąż rozwijająca się w związku z poszerzaniem się wiedzy na temat ich orbit, mas, rozmiarów lub innych parametrów fizycznych. Ostatnio uwaga astronomów koncentruje się w dużym stopniu na małych ciałach mogących zagrażać Ziemi (NEO – *Near Earth Objects*). W przeważającej ilości są to planetoidy z niewielką „domieszką" komet. Obecnie są one obiektem kilku międzynarodowych projektów, obejmujących obserwacje, badania dynamiki i własności fizycznych oraz misje kosmiczne.

Niniejsza praca koncentruje się na problemach modelowania dynamiki planetoid zbliżających się do Ziemi. Celem pracy jest ilościowe oszacowanie perturbacji od Ziemi i Księżyca (rozdzielonych) oraz największych planetoid pasa głównego – Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei w ruchu planetoid NEA. Perturbacje te zostały w pracy nazwane subtelnymi efektami grawitacyjnymi.

Cel został zrealizowany poprzez zastosowanie różnych modeli dynamicznych Układu Słonecznego. W razie potrzeby były one modyfikowane o dodatkowe czynniki zaburzające, takie jak rozdzielony układ Ziemia-Księżyc lub masywne planetoidy. Następnie porównywano wyniki modelowania ze sobą, co umożliwiło określenie wpływu subtelnych efektów grawitacyjnych na otrzymane rezultaty. Zwrócono największą uwagę na różnice w położeniach i elementach orbitalnych planetoid. Zbadano również związki zastosowanych modeli dynamicznych ze stabilnością badanych trajektorii. Jako ilościowe kryterium stabilności wykorzystano wykładniki i czasy Lapunowa.

Ponieważ w zagadnieniach dynamiki NEA wiele owocnych rezultatów zawdzięczamy obliczeniom numerycznych, w pracy zostały wykorzystane najpopularniejsze dostępne algorytmy służące do całkowania równań ruchu. Uwzględniono zarówno klasyczne metody zmiennokrokowe, jak również stosowane w ostatnim dziesięcioleciu metody oparte o tzw. schemat symplektyczny.

Praca została podzielona na 5 rozdziałów:

- Rozdział 1 ma charakter wprowadzający do zagadnienia i wyjaśnia podstawowe definicje i sformułowania. Prezentuje on aktualny stan wiedzy na temat planetoid NEA i metodyki ich badań. Zawiera on również opis terminologii i niektórych specyficznych pojęć pojawiających się w pracy.

- W rozdziale 2 zamieszczono dyskusję stosowalności wybranych metod numerycznych wraz z wynikami ich testów. Zawiera on przegląd i podstawowe opisy badanych algorytmów. W dalszej części opisane są testy dokładności oraz szybkości obliczeń. Ich wyniki stanowiły kryterium, które zadecydowało o wyborze odpowiedniej metody w badanych zagadnieniach.

- Problemowi rozdzielenia Ziemi i Księżyca został poświęcony rozdział 3. Jest w nim omówiony problem oszacowania zaburzeń w ruchu planetoid NEA, jakie powoduje rozdzielony układ Ziemia-Księżyc.

- Perturbacje od Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei zostały omówione w rozdziale 4. W tym rozdziale przeanalizowano wyniki zastosowania modelu dynamicznego Układu Słonecznego zawierającego dodatkowo te cztery duże planetoidy.

- Zagadnienia oszacowania stabilności badanych orbit są opisane w rozdziale 5. Opisano w nim związki użytych w pracy modeli dynamicznych z chaotycznymi właściwościami orbit NEA.

- Rozdział 6 ma charakter podsumowujący. Zawarto w nim najważniejsze wnioski wynikające z pracy.

Rozdział 1

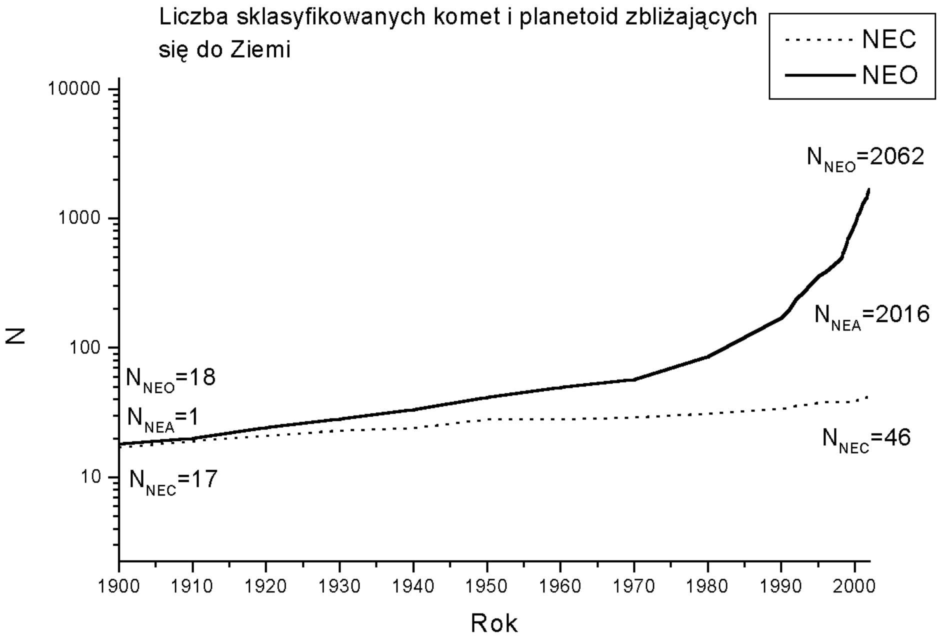
Ogólna charakterystyka zagadnień omówionych w pracy

1.1 Rys historyczny i obecny stan wiedzy na temat planetoid zbliżających się do Ziemi (NEA).

1.1.1 Statystyka odkryć

Pierwsze znane cztery planetoidy – Ceres, Pallas, Juno i Vesta[1] zostały odkryte w latach 1801–1807. Dwie następne – (5) Astraea i (6) Hebe odkryto około 40 lat później. W roku 1852 liczba znanych planetoid osiągnęła 20, a w 1870 roku było ich już 110, ale nie znano jeszcze żadnego obiektu zbliżającego się do Ziemi. Dopiero w roku 1898 Gustav Witt z obserwatorium berlińskiego odkrył planetoidę (433) Eros. Od tego czasu liczba znanych planetoid NEA notowała sukcesywny wzrost, przy czym najwięcej odkryto w ostatnim dziesięcioleciu. Liczba sklasyfikowanych planetoid zbliżających się do Ziemi przekroczyła we wrześniu 2002 r. 2000 obiektów (Rys. 1.1). Obiekty typu NEO (*Near Earth Objects*) dzielą się w ogólności na komety (NEC–*Near Earth Comets*) oraz planetoidy (NEA - *Near Earth Asteroids*). Znanych jest zaledwie 46 komet typu NEC. Pomimo, że stanowią one niewielką grupę, są również poważnym zagrożeniem dla naszej planety w przypadku kolizji. Komety najczęściej posiadają silnie ekscentryczne orbity i w przypadku zderzenia poruszają się z większą prędkością względną, niż planetoidy NEA.

[1]Nazwa ta ma swój polski odpowiednik Westa, w pracy zdecydowano się na używanie międzynarodowych nazw planetoid.



Rysunek 1.1: Statystyka odkryć obiektów zbliżających się do Ziemi w latach 1900-2002 (NEC-komety, NEA-planetoidy).

1.1.2 Problem kolizji planetoidy z Ziemią

Informacja o odkryciu planetoidy NEA mogącej w najbliższym czasie zderzyć się z Ziemią niemal zawsze wywołuje sensację. Podobnie było w przypadku dwóch niedawno odkrytych planetoid, 1997 XF11 i 1999 AN10 (Sitarski, 1999). Napływ nowych danych obserwacyjnych dla tych planetoid pozwolił lepiej oszacować prawdopodobieństwo kolizji w najbliższej przyszłości, praktycznie ją wykluczając.

Zderzenie małego ciała z naszą planetą jest zagrożeniem realnym (choć mało prawdopodobnym) i przyciąga uwagę nie tylko mediów, ale także organizacji międzynarodowych. Poza Międzynarodową Unią Astronomiczną (IAU) zaangażowane są również UNCOPUOS (*United Nations Paceful Usage of Outer Space*) oraz OECD (*Organization for Economic Coordination and Development*).

Największe na świecie zespoły badawcze zajmujące się obecnie śledzeniem planetoid NEA to (źródło: Yeomans, 2001):

- LINEAR: *Lincoln Near-Earth Asteroid Research.* Program kontynuowany przez MIT Lincoln Laboratory we współpracy z USAF(*United States Air Force*). Około 70 % planetoid sklasyfikowanych w ostatnim dziesięcioleciu odkryto w ramach jego realizacji.

- NEAT: *Near Earth Asteroid Tracking* – kompleksowy program prowadzony od 1998 r. przez NASA/Jet Propulsion Laboratory.

- Spacewatch – program rozpoczęty w 1984 r. Odniósł on wiele sukcesów obserwacyjnych poprzez odkrycia znacznej liczby planetoid przechodzących bardzo blisko Ziemi, w tym obiektów o rozmiarach rzędu kilku metrów.

- LONEOS: *Lowell Observatory Near-Earth Object Search*. Program rozpoczęty w 1993 r. użytkujący teleskop we Flagstaff, mogący śledzić obiekty o jasności do 19^m; w roku 2000 znacznie zwiększono jego wydajność obserwacyjną.

- Catalina Sky Survey. Program wykorzystujący teleskopy na Mt. Bigelow i Mt. Lemmon (Arizona, USA). Planowane jest włączenie do projektu teleskopu w Siding Spring (Australia) w celu uzyskiwania regularnych obserwacji z półkuli południowej.

- JSGA: *Japanese Spaceguard Association*. Program ten rozpoczął sie w roku 2000 w Bisei (Japonia) i oprócz obserwacji NEO bierze udział w monitorowaniu śmieci kosmicznych na orbicie okołoziemskiej.

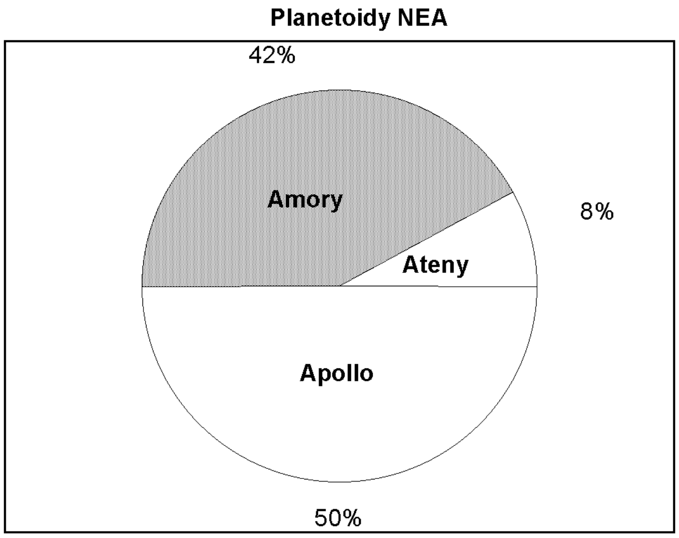
Obecnie wysiłki wszystkich organizacji i programów badawczych koncentrują się na wzajemnej wymianie informacji i efektywnej współpracy w najbliższej przyszłości. Celem jest stworzenie globalnego systemu, który byłby w stanie ostrzegać i podejmować ewentualne środki zaradcze przeciwko potencjalnemu zagrożeniu.

1.1.3 Klasyfikacja planetoid NEA

Problem klasyfikacji tych ciał, który mógłby odzwierciedlać ich fizyczne własności jest w zasadzie ciągle otwarty. W dobie tak dużej różnorodności znanych małych ciał nabiera on szczególnego znaczenia. Powszechnie za planetoidę NEA uważa się ciało, którego odległości peryhelium i aphelium spełniają warunki $q \leq 1.3AU$ i $Q \geq 0.983AU$. Początkowo, kiedy znano bardzo niewielką ilość ciał tego typu nazywano je po prostu „Grupą Apollo" od nazwy charakterystycznej planetoidy Apollo odkrytej przez Reinmutha w 1932 r. Ponieważ liczba skatalogowanych ciał znacznie wzrosła, z czasem wykształcił się bardziej zróżnicowany podział na rodziny Apolla, Amora i Ateny. Nazwy pochodzą od planetek-przedstawicieli tych grup : (2062) Aten[2], (1862) Apollo i (1221) Amor. Kryteria przynależności do danej podgrupy NEA określają kryteria:

– Dla Aten: $a < 1.0AU$ i $Q \geq 0.983AU$.

[2]Jest to nazwa międzynarodowa, polskim odpowiednikiem jest Atena



Rysunek 1.2: Rodziny planetoid NEA.

– Dla grupy Apolla $a \geq 1.0AU$ i $q \leq 1.0167AU$.

– Dla grupy Amora: $q > 1.0167AU$ i $q \leq 1.3AU$.

Podział ten można ogólnie zinterpretować w następujący sposób: orbity Aten znajdują się „wewnątrz" orbity Ziemi i spotykają się z naszą planetą w pobliżu aphelió w swoich orbit; grupa Apolla ma orbity na zewnątrz orbity ziemskiej, ale odległości peryhelió w leżą w strefie, gdzie planetki te mogą spotkać się z Ziemią; Amory mają swe orbity w strefie pomiędzy Ziemią a Marsem. Podział na rodziny AAA jest nieco sztuczny, ale określa podstawowe własności dynamiczne orbit planetoid zbliżających się do Ziemi i może być podstawą wstępnego podziału danych obliczeniowych przy analizie długookresowej ewolucji tych ciał (Dvorak, Pilat-Lohinger, 1999). Obecnie najwięcej znanych planetoid NEA jest typu Apollo – stanowią one połowę populacji (Rys. 1.2).

Kampanie obserwacyjne zajmujące się analizą zagrożenia dla Ziemi ze strony planetoid NEA operują także pojęciem PHA (*Potentially Hazardous Asteroid*) – planetoidy potencjalnie niebezpieczne. Kryterium zakwalifikowania planetoidy do tej grupy jest wartość parametru MOID[3] mniejsza od $0.05AU$ oraz jasność absolutna $H < 22^m$.

Parametr MOID określa najmniejszą odległość przestrzenną pomiędzy orbitą Ziemi i planetoidy. Odległość ta zmniejsza się wyraźnie w pobliżu węzłów

[3]Minimum Orbital Intersection Distance - minimalna odległość przecięcia orbit

orbity planetki, które są usytuowane w odległościach od Słońca $r_{\pm} = \frac{a(1-e^2)}{1 \pm ecos\omega}$. Jeśli węzły te leżą w okolicach ok. $1AU$ od Słońca, odległość przestrzenna orbity Ziemi i planetoidy jest niewielka. Odległość węzłów jest tylko przybliżonym kryterium oceny, ponieważ orbita Ziemi nie leży idealnie w płaszczyźnie ekliptyki, i nie jest kołowa. Rzeczywista odległość dwóch orbit (MOID) w przestrzeni jest to minimum funkcji odległości między dwoma trajektoriami, przy czym ewoluuje ona w czasie wraz z wiekowymi zmianami elementów obu orbit. Parametr MOID nie przesądza definitywnie o fakcie zachodzenia ciasnych zbliżeń lub kolizji z Ziemią, ponieważ nie ma związku z konkretnym położeniem ciała na orbicie, co jest warunkiem spotkania obu ciał. Wskazuje on tylko na bliskie sąsiedztwo dwóch orbit.

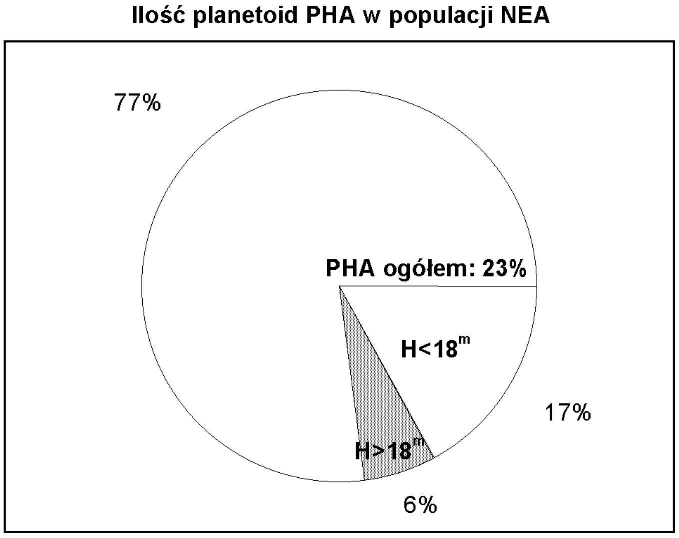
Jasność absolutna planetoidy H jest zdefiniowana jako jasność wizualna ciała oświetlonego przez Słońce z $1AU$, umieszczonego w odległości $1AU$ od obserwatora, przy zerowym kącie fazowym obserwacji (w opozycji). Ponieważ masy i rozmiary planetoid NEA są znane z dużym przybliżeniem, a potrzebne było kryterium oceniające je pod względem wielkości, założono, że przy przeciętnym albedo 13% planetoidy o jasności $H = 22^m$ mają średnicę ok. $150m$ (dla szerszego zakresu albedo mogą się wahać: $110 \div 240m$), natomiast dla $H = 18^m$ – około kilometra. Jasność absolutna jest w tym przypadku traktowana jako przybliżone kryterium rozmiaru.

Uogólniając definicję można stwierdzić, że orbity planetoid PHA znajdują się w odległościach mniejszych niż $0.05AU$ (ok. 7.5 mln km) od orbity ziemskiej, a ciała te mają rozmiary rzędu co najmniej setek metrów.

Planetoidy PHA stanowią niemal jedną czwartą znanych NEA. Obiekty PHA o $H > 18^m$, a więc o rozmiarach w przybliżeniu przekraczających kilometr to w przybliżeniu 6 % populacji (Rys. 1.3).

Statystyka odkrytych obiektów w dużej mierze zależy od możliwości i technik obserwacyjnych. Rzeczywisty rozkład rozmiarów planetoid NEA i PHA może być oszacowany jedynie w przybliżeniu, gdy weźmie się pod uwagę ograniczenia obserwacyjne (Morbidelli et al., 2003). Wg Yeomansa (2001) większość dużych planetoid, o średnicy większej od kilometra została już odkryta.

Warto wspomnieć o klasyfikacji dynamicznej planetoid zaproponowanej przez Milaniego (1999), w której o przynależności konkretnej planetoid do określonej klasy decyduje charakter ewolucji jej orbity. Aby przyporządkować planetoidę do określonej grupy, trzeba znać własności jej ruchu. Na podstawie typowych przedstawicieli Milani początkowo zaproponował podział planetoid na klasy Toro, Kozai, Geographos, Alinda, Eros, Oljato; sklasyfikował dodatkowo także komety. Przydzielanie małego ciała do określonej grupy odbywa się według dość złożonego algorytmu. Wobec dużej różnorodności małych ciał w naszym układzie należy się spodziewać w przyszłości, że będą one klasyfikowane na podstawie cech ruchu orbitalnego i innych własności fizycznych.



Rysunek 1.3: Liczebność obiektów typu PHA o jasnościach absolutnych H powyżej i poniżej 18^m w obecnie znanej grupie planetoid NEA.

1.2 Metodyka badań dynamiki NEA

Klasyczny scenariusz badania ewolucji dynamicznej ciał Układu Słonecznego rozpoczyna się od etapu pozyskiwania danych obserwacyjnych, które służą wyznaczaniu, a następnie sukcesywnemu poprawianiu orbit. Wyniki opracowania obserwacji (np. elementy orbity oskulacyjnej) mogą być w dalszej kolejności użyte w symulacjach, na których podstawie będzie można określić przyszłe bądź przeszłe zachowanie układu. Symulacje takie umożliwiają nam śledzenie interesujących nas parametrów i wnioski na temat przyszłości lub przeszłości dynamicznej wybranych ciał. Wyniki badań ewolucji dynamicznej znajdują zastosowanie przy opracowywaniu efemeryd, planowaniu misji kosmicznych oraz przewidywaniu zbliżeń i kolizji małych ciał i planet.

1.2.1 Misje kosmiczne

Małe ciała, w tym planetoidy NEA są częstym celem misji kosmicznych. W Tab. 1.1 zestawiono najważniejsze współczesne misje do komet i planetoid. Najbardziej znana to zakończona już misja NEAR (*Near Earth Asteroid Rendezvous*) do największej planetki NEA (433) Eros. Misję tę poprzedziły liczne badania dynamiki Erosa. Ze względu na dobrze znaną orbitę i duże rozmiary interesowano się również długookresową ewolucją tego ciała (Michel et al., Tablica 1.1: Misje kosmiczne do komet, planetoid pasa głównego oraz NEA.

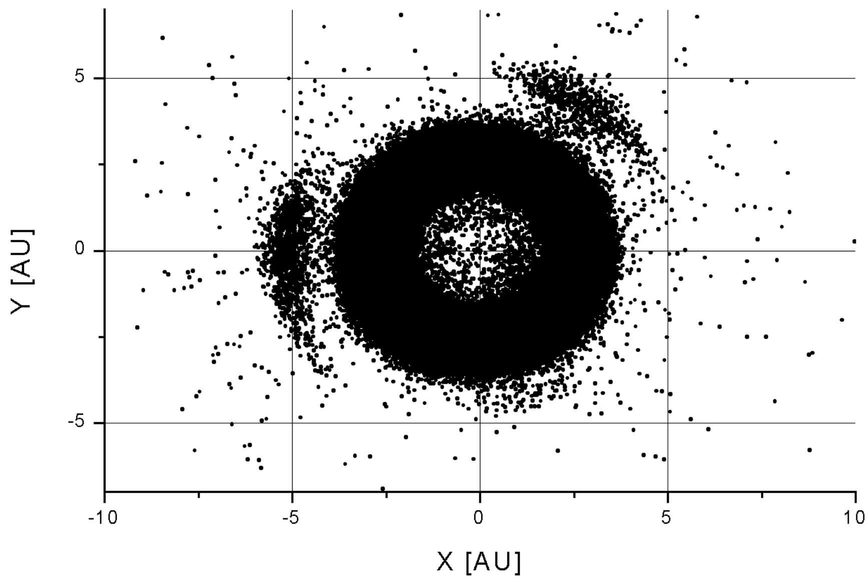
Misja	Przeznaczenie	Termin
NEAR	Przelot w pobliżu planetki Mathilde, Lot orbitalny wokół Erosa	1996-2001
DEEP SPACE 1	Przelot w pobliżu planetki (9969) Braille, Spotkanie z kometą Borrelly	1998-2001
STARDUST	Otrzymanie obrazu jądra komety Wild-2, pobranie próbek materii komety	1999-2006
CONTOUR	Badania komet Encke i Schwassmann-Wachmann 3	2002-2006
MUSES-C	Pobranie próbek planetoidy 1998 SF36	2002-2007
ROSETTA	Przelot w pobliżu planetoid (4979) Otawara i (140) Siwa, Lądowanie na komecie Wirtanen	2002-2007
DEEP IMPACT	Uderzenie w kometę Tempel 1	2004-2005
DAWN	Wejście na orbity wokół Ceres i Vesty	2006-2014

1998).

W projektowaniu misji tego typu niezbędne jest bardzo precyzyjne przewidywanie trajektorii. W przypadku skomplikowanych manewrów bądź lądowania na powierzchni wymagana jest dokładność rzędu metrów. Pomiary dokonane przez sondę NEAR znacznie zmieniły wyobrażenie o masach planetoid Mathilde i Eros (Yeomans et al., 1999), co wpłynęło na planowanie misji i wykonywane manewry.

1.2.2 Metody badania ewolucji orbitalnej

Badanie ewolucji orbitalnej z punktu widzenia mechaniki nieba ogranicza się do badania jakościowych cech ruchu danego układu. Układ Słoneczny to układ N-ciał oddziaływujących ze sobą grawitacyjnie, w niektórych przypadkach zaburzany przez czynniki niegrawitacyjne. Cechą charakterystyczną tego układu jest dominująca masa składnika centralnego (Słońce) w stosunku do pozostałych ciał. Obiegające je planety poruszają się po orbitach bardzo zbliżonych do keplerowskich i są to trajektorie stabilne, o niewielkich mimośrodach leżące w zasadzie w jednej płaszczyźnie. Inaczej jest w przypadku bardzo licznej grupy małych ciał (Rys. 1.4), które reprezentują orbity bardzo zróżnicowane. Ich masy są w zasadzie zaniedbywalnie małe w porównaniu z zaburzającymi je planetami. Orbity silnie ekscentryczne, o dużym nachyleniu nie są rzadkością. Zdarza się również, że ich ruch jest istotnie zaburzany



Rysunek 1.4: Widok małych ciał układu (rzut na płaszczyznę ekliptyki). Przedstawiono wg danych MPC włącznie z orbitami planetoid „zagubionych” na podstawie bazy danych Lowell Observatory. Zaznaczono około 195 000 obiektów, w tym 43721 „numerowanych”

przez efekty niegrawitacyjne. Dzieje się tak w przypadku komet, natomiast w szczególnych przypadkach mamy do czynienia z zaburzeniami niegrawitacyjnymi w dynamice planetoid (efekt Yarkovskiego). Ruch małych ciał jest bardzo wrażliwy na subtelne perturbacje, dlatego ich orbity mogą zmieniać się w czasie w sposób trudno przewidywalny.

Różniczkowych równań ruchu grawitacyjnego zagadnienia N-ciał nie można rozwiązać w ścisły sposób analitycznie, dlatego ewolucję orbitalną małych ciał śledzi się za pomocą symulacji numerycznych. Równania ruchu rozwiązuje się w sposób przybliżony stosując algorytmy całkowania numerycznego. Jeśli w badanym ruchu występują efekty niegrawitacyjne, równania ruchu komplikują się o dodatkowo modelowane perturbacje. Obecnie istnieje duża liczba rozmaitych algorytmów mogących realizować tego typu obliczenia, problemem jest jednak analiza błędów obliczeniowych. Wzrost wydajności komputerów umożliwił eksploatację metod numerycznych na bardzo dużą skalę przy jednoczesnym zwiększeniu stopnia komplikacji obliczeń. Niektóre cechy układów grawitacyjnych stanowią poważną barierę dla modelowania ruchu, ponieważ mogą powodować nieoczekiwane kumulacje błędów o pochodzeniu numerycznym. Typowym przykładem jest badanie ruchu małych ciał zbliżających się bardzo blisko do planet, np. planetoid typu NEA.

Dodatkowe problemy stwarza obecność chaosu, czyli silnej wrażliwości układu na małe zmiany warunków początkowych. Regularne ciasne zbliżenia w układzie i obecność rezonansów orbitalnych w ruchu średnim mogą być czynnikami decydującymi o stabilności otrzymanych rozwiązań.

Współcześnie stosowane algorytmy numeryczne można z grubsza podzielić na metody klasyczne ze zmiennym krokiem całkowania (mającym zapewnić minimalizację błędów) oraz doskonalone w ostatnich latach metody symplektyczne. Ogólną własnością metod klasycznych jest dobra dokładność (odwzorowanie trajektorii) w krótkiej skali czasu, natomiast metody symplektyczne są szybsze i w założeniu mają lepiej zachowywać jakościowe cechy ruchu (np. energię i pęd układu) na dłuższych przedziałach czasu. W modelowaniu krótkookresowym istnieją tendencje do stosowania klasycznych metod zmiennokrokowych, natomiast do badań długookresowych astronomowie ostatnio chętnie sięgają po metody symplektyczne.

1.3 Podstawowe definicje

1.3.1 Pojęcie ciała testowego

Ciało testowe (*test particle*) jest to punkt materialny o zaniedbywalnej masie, zaburzany przez siły grawitacyjne w układzie N-ciał. W szczególności może być to małe ciało układu planetarnego, takie, jak planetoida czy kometa, doznające zaburzeń od ciał masywnych (planet, ich księżyców czy większych planetoid). Warunki początkowe – położenia i prędkości ciała testowego na orbicie są jedynie wynikiem wyznaczenia jego orbity i odpowiadają rzeczywistości jedynie z pewnym przybliżeniem.

1.3.2 Modele dynamiczne zastosowane w pracy

W pracy zastosowano trzy podstawowe modele dynamiczne Układu Słonecznego, uwzględniające dodatkowo subtelne efekty grawitacyjne związane z perturbacjami od ciał o masach mniejszych od planet. Jako potencjalne dodatkowe czynniki perturbacyjne uwzględniono w tych modelach Księżyc i cztery największe planetoidy.

Modele MB i MZK

- Model MB to Układ Słoneczny z 9 planetami, przy czym Ziemia jest w tym przypadku ciałem umieszczonym w barycentrum układu Ziemia-Księżyc o masie równej sumie składników tego układu.

- Model MZK to Układ Słoneczny z 9 planetami i wydzielonym Księżycem, obiegającym Ziemię

Bardziej szczegółowe omówienie obu modeli zawiera rozdział 3 pracy, natomiast różnice pomiędzy modelami ilustruje Rys. 1.5.

Model BIG4

Model BIG4, zawierający „Wielką czwórkę" planetoid z pasa głównego jest modelem MB wzbogaconym o planetoidy Ceres, Pallas, Westę i Hygieię. Planetoidy te są potencjalnym źródłem perturbacji w ruchu obiektów NEA o orbitach z dużymi mimośrodami (Rys. 1.6). Szczegóły jego zastosowania omówiono w rozdziale 4.

1.3.3 Jednostka odległości EMU

W celu pewnych porównań ilościowych często przyjmuje się dodatkową jednostkę odległości, znaną jako EMU–*Earth-Moon Unit* lub LD–*Lunar Distance*. Równa jest ona średniej odległości Ziemia-Księżyc, a więc 384 400 km (0.00257 AU).

1.3.4 Ciasne zbliżenia małych ciał do planet

Zbliżenia małych ciał do planet definiuje się jako ciasne na podstawie różnych kryteriów. W uproszczeniu często przyjmuje się, że są to przejścia w odległości mniejszej, niż $0.1AU$, a bardzo ciasne zbliżenia - poniżej $0.01AU$. Innym kryterium, biorącym pod uwagę oszacowanie perturbacji, jest uznanie zbliżenia za ciasne, jeśli zachodzi ono w odległościach rzędu promienia sfery działania planety lub promienia Hilla.

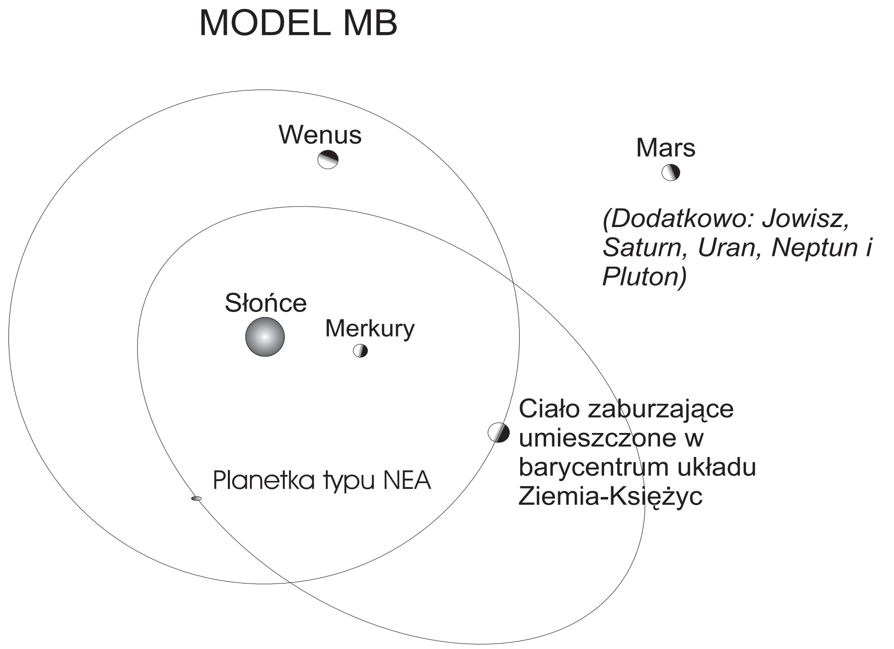
Promień sfery działania planety

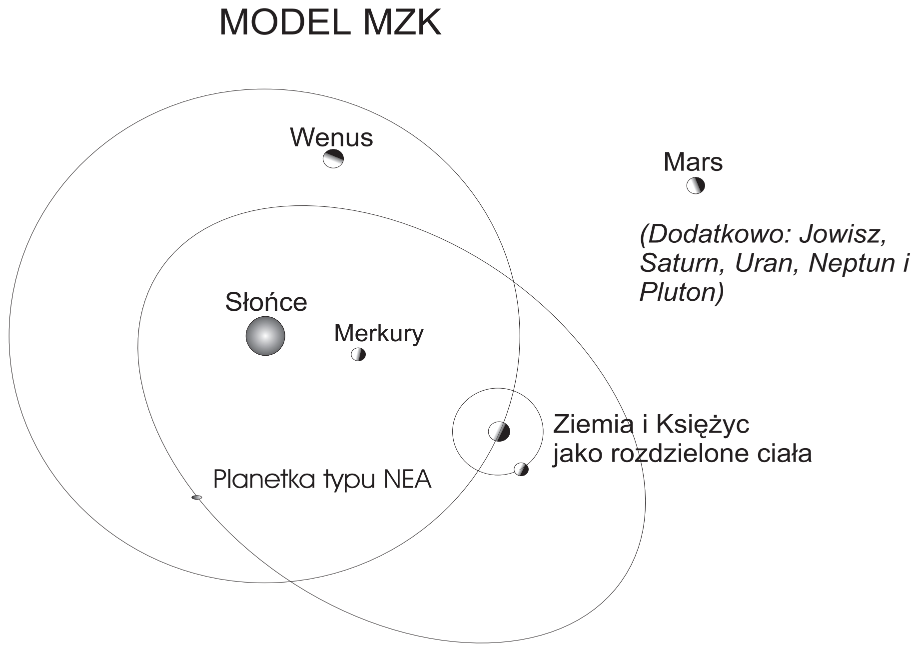
Pojęcie sfery działania po raz pierwszy wprowadził Laplace; zaprezentowane definicje sfer działania i przyciągania pochodzą od Wierzbińskiego (1973) i Roya (1988).

Powierzchnię definiującą sferę działania możemy zdefiniować rozważając układ 3 ciał: zaburzanego małego ciała o zaniedbywalnej masie, planety i ciała centralnego – Słońca. Biorąc pod uwagę przyspieszenia działające na małe ciało w układzie heliocentrycznym i planetocentrycznym możemy zdefiniować równanie, które jest spełnione na powierzchni ograniczającej sferę działania:

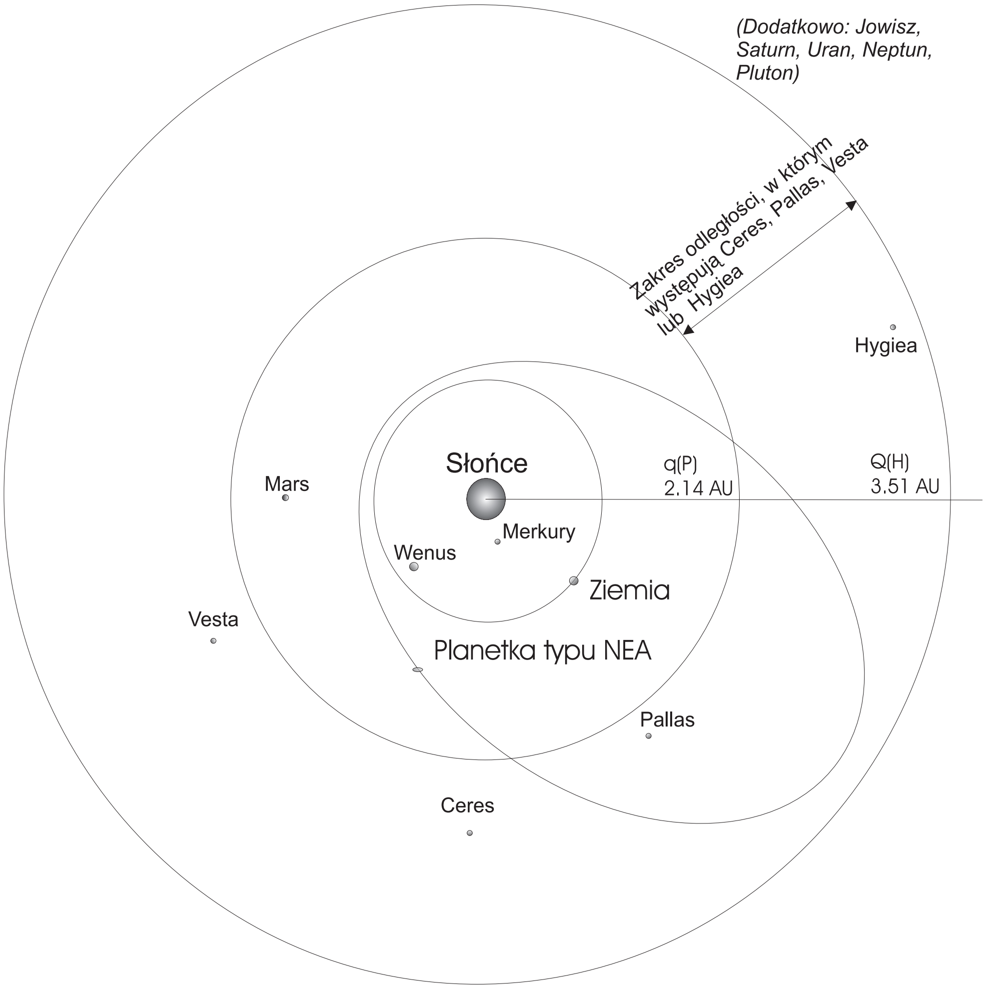
$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}, \tag{1.1}$$

gdzie R jest przyspieszeniem wywołanym przez pole grawitacyjne Słońca, a F – przyspieszeniem zakłócającym wywołanym przez planetę (w układzie heliocentrycznym). F_1 i R_1 są analogicznymi przyspieszeniami w układzie





Rysunek 1.5: Różnica między modelami dynamicznymi MB i MZK. Ciało zaburzające w modelu MB ma masę równą sumie mas Ziemi i Księżyca. Oba modele uwzględniają oddziaływanie innych planet – ze względu na skalę nie umieszczono wszystkich na rysunku.



Rysunek 1.6: Model dynamiczny uwzględniający perturbacje od Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei. Przykładowa planetoida NEA o silnie ekscentrycznej orbicie może potencjalnie przebywać w strefie, gdzie znajdują się orbity największych planetoid. W związku z tym jej orbita może być potencjalnie zaburzana przez te planetki. W modelu wzięto pod uwagę zaburzenia od innych planet, przy czym Ziemia jest tu uwzględniona jako pojedyncze ciało, tak jak w modelu MB.

planetocentrycznym: F_1 oznacza przyspieszenie grawitacyjne planety, natomiast R_1 jest przyspieszeniem zakłócającym pochodzącym od Słońca.

Wewnątrz sfery działania zachodzi nierówność:

$$\frac{F}{R} > \frac{F_1}{R_1}. \tag{1.2}$$

W tym przypadku wzajemna odległość między małym ciałem a planetą jest mniejsza od granicznej wartości, którą jest promień sfery działania (r_{inf}).

Sfera działania nie jest sferą w ścisłym tego słowa znaczeniu i jej promień zależy od kąta ϕ (jest to kąt między kierunkami planeta–Słońce i planeta–małe ciało):

$$r_{inf} = \left(\frac{\left(\frac{m_p}{m_\odot}\right)^2}{(1 + 3cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{5}} r_{p\odot}, \tag{1.3}$$

gdzie kąt ϕ jest zdefiniowany jak powyżej, m_p i $m_\odot$ oznaczają masy planety i Słońca, natomiast $r_{p\odot}$ jest odległością planeta-Słońce. Stosunek maksymalnej do minimalnej wartości r_{inf} wynosi $2^{\frac{1}{5}}$, natomiast maksymalny promień sfery działania (dla $\phi = 90°$) wynosi:

$$r_{inf} = \left(\frac{m_p}{m_\odot}\right)^{\frac{2}{5}} r_{p\odot}. \tag{1.4}$$

Promień sfery działania dla Ziemi wynosi około 925 000 km ($6.18 \cdot 10^{-3} AU$).

Promień sfery przyciągania planety

Sferą przyciągania planety nazywamy obszar przestrzeni, wewnątrz którego przyciąganie grawitacyjne planety jest większe od przyciągania Słońca. Promień tego obszaru liczony od środka planety wynosi:

$$r_{int} = \left(\frac{m_p}{m_\odot}\right)^{\frac{1}{2}} r_{p\odot}. \tag{1.5}$$

Promień sfery przyciągania Ziemi wynosi przeciętnie ok. 260 000 km ($1.74 \cdot 10^{-3} AU$).

Promień Hilla

Równania Hilla zostały sformułowane po raz pierwszy w ograniczonym kołowym zagadnieniu 3 ciał zastosowanym w teorii ruchu Księżyca (Hill, 1878). W układzie małe ciało-planeta-Słońce odniesionym do planety można je przedstawić następująco:

$$\ddot{x} - 2n_p\dot{y} = k^2\left(\frac{3}{r_{p\odot}^3} - \frac{m_p}{m_\odot r^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\ddot{y} + 2n_p\dot{x} = -k^2\frac{m_p}{m_\odot}\frac{y}{r^3} = \frac{\partial U_H}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Srodek układu współrzędnych x i y stanowi planeta, przy czym oś x skierowana jest do Słońca. Poza wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami $(r_{p\odot}, m_p, m_\odot)$ k jest stałą Gaussa, U_H – potencjałem, n_p jest ruchem średnim planety, a wartość r odpowiada odległości pomiędzy małym ciałem i planetą.

Promieniem Hilla nazywamy taką odległość r od planety, dla której zanika składowa przyspieszenia małego ciała w kierunku Słońca (w układzie małe ciało-planeta-Słońce). Składowa ta występuje w równaniu 1.6 i zanika, jeżeli dla promienia r spełniony jest warunek

$$r_{Hill} = \left(\frac{m_p}{3m_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} r_{p\odot}. \quad (1.8)$$

Promień Hilla dla Ziemi wynosi ok. 6 900 000 km $(4.64 \cdot 10^{-2} AU)$, natomiast dla planetoidy Ceres – przeciętnie 220 000 km $(1.49 \cdot 10^{-3} AU)$. Wielkość ta ma zastosowanie jako pomocnicze kryterium przy uwzględnianiu perturbacji planetarnych w ruchu małych ciał. Znalazła również zastosowanie w regularyzacji omówionych w pracy metod numerycznych.

Rozdział 2

Zastosowane metody numeryczne

2.1 Wprowadzenie

W zagadnieniach dynamiki małych ciał Układu Słonecznego, ze względu na złożoność modelu dynamicznego zazwyczaj używa się metod numerycznych. Ruch orbitalny planetoid typu NEA jest zdominowany przez ciasne zbliżenia do Ziemi i planet wewnętrznych. Ze względu na trudności w modelowaniu zbliżeń i perturbacji od wielu ciał ewolucja tych obiektów jest w większości zastosowań śledzona przy pomocy całkowania numerycznego równań ruchu.

Metodyka tego typu badań sprowadza się zazwyczaj do stosowania integratorów[1], czyli oprogramowania pozwalającego na całkowanie różniczkowych równań ruchu w sposób przybliżony na skończonym interwale czasu. Ruch orbitalny małego ciała jest zaburzany przez wiele czynników, niekoniecznie grawitacyjnych. W związku z tym równania ruchu przybierają złożone formy i całkowanie numeryczne jest wygodnym podejściem do ich rozwiązania. Integratory znajdują powszechne zastosowanie w zagadnieniach precyzyjnego wyznaczania trajektorii małych ciał (poprawianie orbit, przewidywanie zbliżeń i kolizji, misje kosmiczne). Stosuje się je również w zagadnieniach ewolucyjnych, np. do bardziej jakościowych i statystycznych oszacowań zachowania dużej liczby obiektów na długich okresach czasu. Nie są one narzędziami uniwersalnymi, są często projektowane z myślą o zastosowaniu w konkretnym zagadnieniu. Weryfikacja, czy określony algorytm nadaje się do zastosowania w konkretnych obliczeniach ma istotne znaczenie dla przyszłych wyników. W pracy zostały zastosowane niedawno opracowane algorytmy całkowania: RMVS3 (Duncan et al., 1998), HYBRID (Chambers, 1999) jak również klasyczne metody numeryczne, jak RA15 Everharta (1985), B–S (Bulirsch i Stoer, 1966) używane często także w celach porównawczych.

[1]Wyrażenie integrator może nieformalnie oznaczać zarówno konkretną metodę całkowania numerycznego, jak i formę jej realizacji (program)

2.2 Przegląd stosowanych współcześnie metod

Aż do wczesnych lat dziewięćdziesiątych najczęściej używane były klasyczne algorytmy całkowania (Morbidelli, 2002). Nastawione one były na uzyskanie jak największej dokładności w przewidywaniu trajektorii. Na ogół używano w tym celu procedur automatycznego doboru kroku całkowania. Jednymi z licznych przedstawicieli tego typu integratorów są opisane dalej metody: Bulirscha-Stoera (Bulirsch i Stoer, 1966) oraz metoda RA15 znana pod nazwą *Radau-Everharta* (Everhart, 1985).

Cechą charakterystyczną obliczeń przeprowadzanych klasycznymi metodami jest fakt, że pochłaniają one względnie dużo czasu, co jest ceną za uzyskanie dużej dokładności. Ponadto możliwości zwiększenia wydajności obliczeniowej są ograniczone – zmniejszenie dokładności bardzo szybko powoduje kumulację błędów obcięcia (Morbidelli, 2002). W takiej sytuacji jedynym sposobem na efektywne obliczenia jest używanie komputera o dużej wydajności obliczeniowej, a więc rozwiązanie „sprzętowe".

Mniej więcej na początku lat dziewięćdziesiątych rozpoczęła się epoka integratorów symplektycznych. Rozwiązują one numerycznie równania ruchu z zachowaniem własności symplektycznych układów hamiltonowskich. Typowym przykładem jest zaproponowany przez Wisdoma i Holmana (1991) algorytm MVS *(Mixed Variable Symplectic)*[2]. Wykorzystuje on podział funkcji Hamiltona na część keplerowską i „perturbacyjną" dla układu N zaburzających się ciał. Warunkiem efektywnego działania tego algorytmu jest zastosowanie go w układzie dynamicznym, gdzie masa ciała centralnego jest wyraźnie większa od mas innych składników, a więc dominuje część keplerowska hamiltonianu (*ruch quasikeplerowski*). Zastosowanie tego algorytmu, który jest w niektórych przypadkach szybszy od klasycznych metod, pozwala uzyskać porównywalne do nich wyniki przy całkowaniu układu planetarnego. Niestety, w przypadku układów dynamicznych, w których zachodzą ciasne zbliżenia ciał, tak jak w przypadku NEA, metoda ta napotyka na ograniczenia związane z dominującym wpływem zaburzeń planetarnych na ruch orbitalny planetoidy. Dlatego MVS nadaje się najlepiej do badania długookresowej ewolucji ciał na orbitach zbliżonych do keplerowskich.

Pewną odmianą metody MVS jest integrator RMVS – *Regularized Mixed Variable Symplectic* (Duncan et al., 1998) zaprojektowany do całkowania układów dynamicznych, w których zachodzą ciasne zbliżenia. Łączy on pewne cechy różnych metod – kiedy w układzie dynamicznym nie zachodzą ciasne zbliżenia, całkowany jest on metodą MVS, natomiast w przypadku zbliżeń stosowany jest rodzaj regularyzacji, polegający na adaptacji kroku całkowania oraz modyfikacji podziału funkcji Hamiltona. Te czynniki co prawda powodują utratę własności symplektycznych metody, ale pozwalają całkować

[2]MVS jest określeniem używanym w oprogramowaniu SWIFT zastosowanym w pracy. W nowszych wersjach tego oprogramowania autorzy zastępują je skrótem WH.

z zadowalającą dokładnością ruch małego ciała zbliżającego się do planet. Stąd częste zastosowanie tej metody w ciągu ostatnich lat w badaniach NEA, w szczególności w zagadnieniach ewolucyjnych. Nieco innym podejściem do zagadnienia całkowania ciasnych zbliżeń jest metoda HYBRID (Chambers, 1999), która jest połączeniem metody MVS i B-S.

2.3 Metoda RA15

Integrator RA15 (Everhart, 1985) całkuje równania ruchu w nieco podobny sposób, jak metoda Rungego–Kutty, poddając proces obliczeniowy pewnej optymalizacji. Należy on do metod jednokrokowych. RA15 nie jest metodą symetryczną – oznacza to, że przy całkowaniu równań ruchu w przód i wstecz na tym samych interwałach czasu, nie zawsze otrzymuje się wyniki zgodne z danymi początkowymi. Krok całkowania jest „automatyczny", tj. dobierany w taki sposób, aby zminimalizować błędy oraz jednocześnie zapewnić efektywne (szybkie) działanie algorytmu. Metoda znana jest często pod nazwą *Radau* ze względu na zastosowanie w przybliżonych wzorach całkowania (15 rzędu) węzłów Gaussa-Radaua.

Rozwiązanie to można przedstawić na przykładzie jednego z równań ruchu orbitalnego małego ciała w formie często stosowanej w mechanice nieba (Everhart, 1974):

$$\ddot{x} = F(x, t). \tag{2.1}$$

Przy założeniu, że w chwili początkowej $t_1 = 0$ położenie x_1, prędkość $\dot{x}$ i siła F_1 są znane, można rozłożyć funkcję F w szereg potęgowy zmiennej t wokół t_1:

$$\ddot{x} = F = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + ... + A_N t^N. \tag{2.2}$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$x = x_1 + \dot{x}t + \frac{F_1 t^2}{2} + \frac{A_1 t^3}{6} + ... + \frac{A_N t^{N+2}}{(N+1)(N+2)}, \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F_1 t + \frac{A_1 t^2}{2} + ... + \frac{A_N t^{N+1}}{N+1}. \tag{2.4}$$

Szereg obcięty do N-tego rzędu ma rozwinąć funkcję F dla takich wartości t_i, jakie są najbardziej optymalne do obliczenia położeń i prędkości na wybrany moment czasu T. Współczynniki A są głównymi niewiadomymi, które trzeba wyznaczyć. Wykorzystywana jest w tym celu procedura podobna do metody Rungego-Kutty, za pomocą której oblicza się wartości F na odpowiadające momentom czasu $t_2, t_3, ...$ (przedział $< t_1, T >$ zostaje podzielony na nierówne „podkroki" t_i). Współczynniki A są dobrane w ten sposób, aby otrzymać dokładne równania położeń i prędkości na moment czasu T (szczegóły procedury: Everhart, 1974). Konsekwencją tego algorytmu jest znalezienie punktów t_i z przedziału $< 0, T >$.

Everhart (1974) podaje przykład na obliczanie współrzędnych na określony moment czasu T metodą piątego rzędu (N=5) przy użyciu trzech „podkroków" t_2, t_3, t_4. Podstawą tej ilustracji są trzy równania (tzw. *predictor equations – wzory wstępne*) odpowiadające każdemu z trzech „podkroków":

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + \frac{F_1 {t_2}^2}{2} + \frac{A_1 {t_2}^3}{6} + \frac{A_2 {t_2}^4}{12} + \frac{A_3 {t_2}^5}{20}, \tag{2.5}$$

$$x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + \frac{F_1 {t_3}^2}{2} + \frac{A_1 {t_3}^3}{6} + \frac{A_2 {t_3}^4}{12} + \frac{A_3 {t_3}^5}{20}, \tag{2.6}$$

$$x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + \frac{F_1 {t_4}^2}{2} + \frac{A_1 {t_4}^3}{6} + \frac{A_2 {t_4}^4}{12} + \frac{A_3 {t_4}^5}{20}. \tag{2.7}$$

Położenia i prędkości odpowiadające końcowi sekwencji T są obliczane z równań (tzw. *corrector equations – wzory korygujące*):

$$x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + \frac{F_1 T^2}{2} + \frac{A_1 T^3}{6} + \frac{A_2 T^4}{12} + \frac{A_3 T^5}{20}, \tag{2.8}$$

$$\dot{x}(T) = \dot{x}_1 + F_1 T + \frac{A_1 T^2}{2} + \frac{A_2 T^3}{3} + \frac{A_3 T^4}{4}. \tag{2.9}$$

Współczynniki A_i są nieznane i wyznacza się je za pomocą iteracji, przyjmując na początku przybliżone wartości. Następnie obliczane są położenia i prędkości. Długość odpowiedniego kroku całkowania wyznaczana jest poprzez kontrolę wyrazu najwyższego rzędu (w rozwinięciu wartości x). Parametr kontrolujący tę procedurę wynosi dla powyżej podanego przykładu $C = A_3 T^5/20$. Jeśli całkujemy przypadek trójwymiarowy i przyjmiemy wartość $H = (|A_{3x}| + |A_{3y} + |A_{3z}|)/20$, powinniśmy dobrać następny krok $T = (C/H)^{\frac{1}{5}}$. Oczywiście wszystkie współczynniki zmieniają się w zależności od rzędu metody.

W pracy zastosowano algorytm 15-go rzędu oparty o procedurę zaprogramowaną przez Everharta. Szczegółowy opis zastosowania tego rozwiązania od strony programowej włącznie z algorytmem dostępny jest w literaturze (Everhart, 1985). Od strony „użytkowej" oryginalna wersja integratora Everharta jest procedurą numeryczną napisaną w języku Fortran z możliwością ingerencji użytkownika obejmującą wybór warunków początkowych, początkowego kroku całkowania, decyzję, czy krok ma być automatyczny, czy stały, a także wybór oczekiwanej dokładności oraz rodzaju rozwiązywanych równań. Oczekiwaną dokładnością steruje się za pomocą zmiennej odpowiadającej błędowi współczynników wielomianu kolokacyjnego. Integrator umożliwia również całkowanie trzech różnych klas równań ruchu:

$$\dot{x} = f(x, t),$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= f(x, \dot{x}, t), \\ \ddot{x} &= f(x, t).\end{aligned}$$

Dodatkowo, użytkownik może napisać procedurę zawierającą rozwiązywane przez integrator równania ruchu, uwzględniając wybrany układ odniesienia oraz rozmaite dodatkowe efekty zaburzające ruch. Pierwsze zastosowania tego algorytmu obejmowały między innymi dynamikę małych ciał, w szczególności komet w Układzie Słonecznym, ale wachlarz tych zastosowań jest oczywiście o wiele szerszy. Początkowo w pracy zastosowana została wersja algorytmu napisana w języku C przez Dybczyńskiego (OA UAM, Poznań). Przy jej pomocy rozwiązywane są równania ruchu planetoid typu NEA z uwzględnieniem perturbacji od wszystkich planet układu z możliwością uwzględnienia subtelnych efektów grawitacyjnych od Księżyca i masywnych planetoid. Zaadaptowanie metody RA15 do tego typu zagadnienia sprowadza się do sformułowania w postaci numerycznej równań ruchu względnego małego ciała w układzie heliocentrycznym z uwzględnieniem perturbacji od n ciał (planet, ewentualnie Księżyca i wybranych planetoid). Równania te przedstawiają się następująco:

$$\ddot{x}_i = -k^2 \left(\frac{x_i}{{r_i}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{{r_{ij}}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j}{{r_j}^3} \right), \qquad (2.10)$$

$$\ddot{y}_i = -k^2 \left(\frac{y_i}{{r_i}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_i - y_j}{{r_{ij}}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_j}{{r_j}^3} \right), \qquad (2.11)$$

$$\ddot{z}_i = -k^2 \left(\frac{z_i}{{r_i}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_i - z_j}{{r_{ij}}^3} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_j}{{r_j}^3} \right), \qquad (2.12)$$

gdzie x_i, y_i, z_i są położeniami małego ciała-planetoidy (NEA), x_j, y_j, z_j są położeniami j-tej planety (n-1 ciał, za wyjątkiem Słońca), m_j oznacza masę j-tej planety w jednostkach masy Słońca. r_i jest odległością i-tej planetoidy od początku układu, r_{ij} oznacza odległość i-tej planetoidy od j-tej planety, natomiast r_j to odległość planety od początku układu. W szczególności do $n-$ 1 ciał zaburzających może zostać dołączony Księżyc i masywne planetoidy. Masa Słońca jest traktowana jako jednostkowa, a masa całkowanej planetoidy jako zaniedbywalnie mała.

Powyższe równania są łatwe do adaptacji w metodzie RA15, ponieważ umieszcza się je w kodzie programu w zbliżonej formie. Prawe strony tych równań można modyfikować, dodając bądź odejmując wybrane efekty perturbacyjne. Jest to istotna zaleta oprogramowania, ponieważ możemy zmieniać model dynamiczny badanego układu bez ingerencji w samą procedurę całkującą.

W opisanym powyżej zastosowaniu można całkować wyłącznie ruch planetoidy – pozycje ciał zaburzających są wówczas odczytywane przy każdym kroku z efemerydy (np. JPL DE406), bez całkowania ruchu planet. To rozwiązanie pozwala znacznie zaoszczędzić na czasie obliczeń, ale nakłada ograniczenia na symulacje długookresowe ruchu orbitalnego, kiedy kończy się zasięg efemerydy (dłużej niż ok. 3000 r. , przy całkowaniu wstecz 3000 r. p.n.e.). Do obliczeń wykonywanych w pracy całkowanie ruchu planet okazało się jednak konieczne w celu kompleksowego zbadania perturbacji w układzie.

W obliczeniach wykorzystana została także inna realizacja metody RA15, opracowana przez Chambersa (1999) w ramach pakietu obliczeniowego MERCURY. W tym przypadku całkowano również ruch planet – rozwiązanie to umożliwia badanie ewolucji orbitalnej na dłuższych okresach czasu, których nie pokrywa efemeryda JPL.

Podsumowując, metoda RA15 jest łatwa w adaptacji i daje użytkownikowi dużą elastyczność zastosowań, ale obliczenia zajmują sporo czasu, zwłaszcza przy całkowaniu złożonych równań. Jest to metoda bardzo popularna i często stosowana w astronomii.

2.4 Metoda Bulirscha-Stoera

Integrator Bulirscha-Stoera (B-S)jest kolejnym klasycznym algorytmem całkowania numerycznego, optymalizującym długość kroku. Całkowanie odbywa się odmianą metody Rungego-Kutty drugiego rzędu znaną jako zmodyfikowana metoda punktu środkowego (Press i in. , 1992). W celu optymalizacji zastosowano metodę ekstrapolacji Richardsona (Bulirsch i Stoer, 1966). Metoda ta pozwala oszacować błędy pojawiające się przy każdym kroku całkowania i dobrać krok zgodny z oczekiwaniami dotyczącymi dokładności. Krok powinien być wystarczająco mały, aby prawidłowo odtworzyć trajektorię ciała i jednocześnie wystarczająco duży, aby zredukować liczbę operacji numerycznych przy całkowaniu. Kompromis pomiędzy tymi warunkami powinien zminimalizować błędy pojawiające się przy całkowaniu. Uwaga ta zresztą dotyczy wszystkich klasycznych metod z automatycznym doborem kroku, jednak w każdej z nich proces optymalizacji realizowany jest w inny sposób.

Uproszczony schemat całkowania zmodyfikowaną metodą punktu środkowego można przedstawić następująco:

$$x_0 = y(t) \tag{2.13}$$

$$x_1 = x_0 + hf(t, x_0) \tag{2.14}$$

$$x_{m+1} = x_{m-1} + 2hf(t + mh, x_m), m = 1, 2, ..., n - 1 \tag{2.15}$$

$$y(t + H) \simeq y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1} + hf(t + H, x_n)). \tag{2.16}$$

Zmiany wartości $y(t)$ w przedziale od t do $t+H$ są reprezentowane poprzez sekwencję n „podkroków” o długości $h = H/n$. Wartości x są przybliżane iteracyjnie z każdym krokiem h aż do uzyskania zadowalającej dokładności przybliżenia wartości y_n do $y(t + H)$. Przy założeniu, że wynik całkowania może być przedstawiony w postaci funkcji analitycznej parametru h, można tę funkcję dopasować poprzez obliczenia z różnymi wartościami h. Wynik przewidywany przy nieskończenie małej wielkości h można wówczas otrzymać poprzez ekstrapolację funkcji wymiernej.

Pojedynczy krok H metody B–S zawiera n „podkroków". Sekwencja zwiększania wartości n aż do uzyskania żądanej dokładności wygląda następująco:

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, ...[n_j = 2n_{j-2}]. \tag{2.17}$$

Dzięki ekstrapolacji możemy oszacować błąd każdej kolejnej iteracji, i, jeśli jest on zbyt duży, kontynuować procedurę z kolejnymi wartościami n aż do osiągnięcia pożądanej zbieżności.

W pracy wykorzystano integrator B-S napisany w języku Fortran 77, wchodzący w skład pakietu SWIFT - *Solar System Integration Package* stworzonego przez M. Duncana i H. Levisona. Został on przystosowany do użycia w zagadnieniach dynamiki Układu Słonecznego, a także zintegrowany z innymi metodami w celach porównawczych. Użytkownik może sformułować wymagania dotyczące początkowego kroku, dokładności, warunków początkowych (położeń i prędkości całkowanych ciał, czasu całkowania). W powyższym zastosowaniu możliwe jest całkowanie równań ruchu grupy małych ciał (o zaniedbywalnej masie) wraz z ciałami masywnymi układu (planetami). Pakiet MERCURY Chambersa zawiera również metodę B-S oraz jej tzw. *odmianę zachowawczą* BS2. Algorytm BS2 jest nieco szybszy, ale można go stosować jedynie w układzie, gdzie działają wyłacznie siły zachowawcze (w tym przypadku niemożliwe jest np. uwzględnianie tarcia lub niektórych efektów niegrawitacyjnych). W przypadku ruchu, w którym występują jedynie siły grawitacyjne, odmiana ta może być z powodzeniem stosowana.

B-S w opisanych odmianach jest metodą szybką dzięki wprowadzonym modyfikacjom, ale w porównaniu z metodami opartymi np. o schemat MVS czas obliczeń jest znacznie dłuższy. W przypadku większych wymagań dotyczących dokładności obliczenia przebiegają dłużej w związku z większą liczbą iteracji koniecznych do spełnienia tych warunków. Metoda B-S ekstrapoluje wyniki do wartości, jakie mogłyby być uzyskane przy bardzo małym kroku, co pozwala oszacować błędy „z góry".

2.5 Metoda MVS

Integratory symplektyczne zaczęły być stosowane na większą skalę w latach dziewięćdziesiątych, ale teoretyczne podstawy ich działania zostały opracowane w latach osiemdziesiątych (Morbidelli, 2002, Yoshida, 1993). Są one stosowane w układach dynamicznych N ciał opisanych równaniami ruchu

Hamiltona. Generalną ich własnością jest względnie dobre zachowanie energii układu, która w przypadku klasycznych metod jest sztucznie wzbudzana bądź ograniczana przez kumulację błędów o pochodzeniu numerycznym (np. lokalne błędy obcięcia). Każdy krok integratora jest przekształceniem symplektycznym, które zachowuje podstawową własność, zwaną **zachowaniem struktury symplektycznej** przy przekształceniu:

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q})_{t=0} \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})_{t=\tau}, \tag{2.18}$$

gdzie τ jest długością kroku całkowania. Ponieważ krok integratora jest transformacją kanoniczną, jest on transformacją posiadającą własność symplektyczności. Wynika to z faktu, że macierz Jacobiego dowolnej transformacji kanonicznej jest tzw. *macierzą symplektyczną*. Wyznacznik macierzy syplektycznej wynosi 1, więc transformacje kanoniczne zachowują element objętości przestrzeni fazowej.

Zachowanie struktury symplektycznej oznacza tutaj zachowanie iloczynu zewnętrznego dwóch form różniczkowych $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ w 2N-wymiarowej przestrzeni fazowej $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ podczas każdej transformacji (kroku):

$$d\mathbf{p}^0 \wedge d\mathbf{q}^0 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}. \tag{2.19}$$

Warunek ten jest również zwany *warunkiem zachowania powierzchni*, ponieważ dla szczególnego układu o jednym stopniu swobody oznacza zachowanie zorientowanej powierzchni.

Konsekwencją jest brak systematycznego błądu w energii, czyli **zachowanie przybliżonej wartości H (równoznaczne z zachowaniem energii układu, bo hamiltonian jako całka ruchu jest z nią utożsamiany):**

Metoda MVS całkuje nieco zmodyfikowany hamiltonian $\tilde{H} = H + H_{err}$. H jest rzeczywistym hamiltonianem układu, natomiast H_{err} jest rodzajem rozwinięcia w szereg $(\tau H_1 + \tau^2 H_2 ...)$ (szczegóły: Yoshida, 1993). Dla wystarczająco małego kroku τ wartość błędu H_{err} jest mała i funkcja $\tilde{H}$ zwana też hamiltonianem zastępczym *(surrogate)* jest zbliżona do rzeczywistego hamiltonianu układu. W konsekwencji błąd w energii całkowanego układu jest ograniczony (waha się ona w pobliżu pewnej stałej wartości).

Podstawy teoretyczne integratorów symplektycznych w zastosowaniu w dynamice Układu Słonecznego są szerzej omówione w literaturze (Wisdom, Holman, 1991; Yoshida, 1993).

Integrator MVS (*Mixed Variable Symplectic*) znany jest jako metoda Wisdoma i Holmana (1991) a także pod nazwą *WH91*. Jest on przykładem zastosowania integratora symplektycznego dla układu dynamicznego, którego hamiltonian może być rozdzielony na sumę dwóch części, z których każda z osobna jest całkowalna:

$$H = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \tag{2.20}$$

Dla szczególnego układu N-ciał, jakim jest Układ Słoneczny, możemy zapisać:

$$H = H_T(\mathbf{p}) + H_V(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|\mathbf{p_i}|^2}{2m_i} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}. \tag{2.21}$$

Zapis taki rozdziela hamiltonian na dwie części, odpowiadające energii kinetycznej i potencjalnej układu (barycentryczny układ odniesienia). Już w oparciu o taki podział możemy stworzyć integrator symplektyczny typu „$T + V$”, jednak do osiągnięcia względnego błędu w energii rzędu $\sim 10^{-5}$ wymagany będzie krok rzędu $\sim 10^{-3}$ najkrótszego z okresów obiegu całkowanych ciał (Duncan, Levison, Lee, 1998). W związku z tym Wisdom i Holman rozdzielili inaczej powyższy hamiltonian biorąc pod uwagę pewne specyficzne własności naszego układu planetarnego. Ponieważ masa ciała centralnego (Słońca) znacznie przewyższa masy pozostałych ciał, wygodniej jest dokonać podziału funkcji Hamiltona na część keplerowską i zaburzającą:

$$H = H_{Kep} + \epsilon H_{Int}, \tag{2.22}$$

gdzie część zaburzająca ϵH_{Int} jest znacznie mniejsza od keplerowskiej H_{Kep}, jeśli parametr ϵ opisujący zwykle stosunek mas planet do masy Słońca jest wystarczająco mały: $\epsilon \ll 1$. Wpływa to na ograniczenie błędu H_{err} ($H_{err} \sim O(\epsilon\tau^2)$).

Aby jednak zapisać hamiltonian układu N ciał rozdzielając go na część keplerowską i zaburzającą, należy użyć do opisu współrzędne Jacobiego[3] (wynika to z problemów z zastosowaniem heliocentrycznego ukladu odniesienia; szczegóły transformacji: Wisdom i Holman, 1991). Wtedy równania opisujące układ przyjmą następującą postać:

$$H_{Kep} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|p'_i|^2}{2m'_i} - \frac{Gm_i m_\odot}{r'_i} \right) \tag{2.23}$$

$$H_{Int} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Gm_i m_\odot}{r'_i} - \frac{Gm_i m_\odot}{r_{i\odot}} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}, \tag{2.24}$$

gdzie zmienne p'_i, m'_i, r'_i odnoszą się do współrzędnych Jacobiego, $r_{i\odot}$ jest odległością i-tego ciała od Słońca, r_{ij} to wzajemna odległość ciała i od j, m_i i m_j są masami poszczególnych ciał obiegających Słońce, $m_\odot$ jest masą Słońca.

Operacje, jakie wykonuje integrator symplektyczny drugiego rzędu (np. taki, jak MVS) można schematycznie zapisać (dla $H = H_{Kepl} + H_{Int} = H_0 + H_1$):

$$E_0(\tau/2)E_1(\tau)E_0(\tau/2), \tag{2.25}$$

[3]Podstawowa interpretacja współrzędnych Jacobiego jest następująca: jest to system współrzędnych względnych N ciał, w którym każda i-ta współrzędna jest wyznaczona względem barycentrum pozostałych ciał z mniejszymi indeksami i.

gdzie $E_i(\tau)$ oznacza *operator ewolucji* części hamiltonianu H_i w czasie τ (Duncan, Levison, Lee, 1998). Zgodnie z powyższym równaniem, krok integratora MVS składa się z następujących operacji:

- Ruch keplerowski ciał układu w czasie $\tau/2$
- „Impuls" wartości pędu każdego ciała w związku w obecnością H_{int} (wyłącznie funkcja położeń q_i) w czasie τ
- Dalszy ruch po zmodyfikowanej orbicie keplerowskiej w czasie $\tau/2$

Zalety omówionej powyżej metody ujawniają się przede wszystkim, kiedy spełniony jest warunek $|H_{int}| \ll |H_{Kep}|$, czyli: (1) Masa ciała centralnego jest relatywnie duża; (2) Trajektorie ciał obiegających są dobrze odseparowane i zbliżone do orbit keplerowskich. Dobre wyniki można uzyskać wtedy już przy kroku całkowania równym 1/20 najkrótszego okresu obiegu w układzie (Duncan, Levison, Lee, 1998). Dobrym przykładem jest badanie długookresowej ewolucji orbity Plutona, które może być tą przeprowadzone w krótkim czasie z zadowalającymi wynikami na komputerze o niewielkiej wydajności obliczeniowej (Wisdom, Holman, 1991).

Metoda MVS napotyka jednak na problemy przy układach dynamicznych, w których zachodzą ciasne zbliżenia ciał, a więc nie może być używana do całkowania orbit NEA, które zbliżają się do Ziemi nawet na odległości porównywalne z rozmiarem orbity Księżyca. Powyższy warunek ($|H_{int}| \ll |H_{Kep}|$) przestaje być wówczas spełniony, a metoda traci swoją główną zaletę: zadowalającą dokładność przy dużym kroku.

2.6 Integrator RMVS

Osobliwości w układzie dynamicznym, takie, jak ciasne zbliżenia czy kolizje często wymagają dodatkowej regularyzacji użytych metod. Regularyzację należy tu rozumieć jako zabieg, który eliminuje błędy obliczeniowe algorytmu związane z osobliwością. Takiego właśnie zabiegu dokonano na metodzie MVS, aby zaadoptować ją do badania układów, w których zachodzą ciasne zbliżenia. Powstała odmiana tej metody zwana RMVS - *Regularized Mixed Variable Symplectic* (Levison, Duncan, Lee, 1998). Algorytm, skonstruowany do całkowania ciasnych zbliżeń jest rodzajem kompromisu między klasycznymi metodami zmiennokrokowymi a integratorami symplektycznymi. Posiada on następujące własności:

- W przypadku, gdy nie zachodzą ciasne zbliżenia, ciała układu całkowane są metodą MVS z zachowaniem jej wszystkich właściwości
- W momencie, kiedy jedno z małych ciał (np. planetoida, kometa) zbliża się do planety na odległość równą trzem promieniom Hilla, zmniejszany

jest krok całkowania, aby lepiej odtworzyć trajektorię podczas zbliżenia. Zmiana kroku pociąga za sobą utratę własności symplektycznych metody i wydłuża czas obliczeń.

- W momencie bardzo ciasnego zbliżenia (wewnątrz promienia Hilla) funkcja Hamiltona jest „przebudowywana" i jej część keplerowska opisuje ruch w układzie odniesienia związanym z planetą, natomiast część perturbacyjna (H_{int}) opisuje oddziaływanie Słońca i pozostałych planet. Umożliwia to poprawę dokładności, ale tak, jak w poprzednim przypadku powoduje utratę symplektyczności.

- Oprócz powyższych czynników – w odróżnieniu od MVS metoda nie jest odwracalna w czasie (symetryczna).

- W rezultacie integrator RMVS nadaje się do całkowania obiektów typu NEA, zachowując kompromis pomiędzy dokładnością i szybkością. Utrata własności symplektycznych rekompensowana jest zadowalającą dokładnością przy całkowaniu zbliżeń i szybkością algorytmu (poza zbliżeniami).

Algorytm RMVS daje zadowalające rezultaty i dobrze się sprawdza w badaniach statystycznych ewolucji orbitalnej dużej liczby obiektów. W indywidualnych przypadkach dokładność obliczeń zależy od przyjętego początkowego kroku całkowania i konfiguracji geometrycznej całkowanych ciał. Szczegółowa dyskusja dokładności MVS i RMVS2 została opublikowana przez Michela i Valsecchiego (1997). Metoda RMVS została również zastosowana przez Gladmana, Michela i Froeschle (2000) w badaniach długookresowej ewolucji orbit NEA.

W pracy zastosowana została odmiana znana jako RMVS3, wchodząca w skład pakietu SWIFT. Przy jej pomocy całkowane są planetoidy NEA wraz z zaburzającymi ich ruch planetami. Analizowane są różne warianty modelu dynamicznego, z większą i mniejszą ilością ciał perturbujących (np. dodawany jest Księżyc). W zagadnieniu badania perturbacji od masywnych planetoid (Ceres, Pallas, Vesta, Hygieia) ze względu na pewne ograniczenia metody RMVS3 (Morbidelli, 2002) wydajnosć tej metody w testach okazała się nieco gorsza. Przyczyną była między innymi specyfika badanego zagadnienia (brak bardzo ciasnych zbliżeń, bardzo małe masy zaburzające).

2.7 Pakiet MERCURY i integrator Hybrid

Alternatywnym rozwiązaniem dla użytkowników metody RMVS jest algorytm Hybrid, również przeznaczony do zastosowań w układach dynamicznych, w których zachodzą ciasne zbliżenia. Wchodzi on w skład pakietu

MERCURY (Chambers, 1999). MERCURY zawiera oprogramowanie do całkowania numerycznego równań ruchu w zagadnieniu N-ciał. Narzędzie to zostało stworzone do śledzenia ewolucji orbitalnej planet, komet i planetoid w Układzie Słonecznym, może też być stosowane w badaniu ruchu satelitów planet, a także do symulacji ruchu ciał w innych układach planetarnych.

Oprogramowanie zostało napisane przez Chambersa przy współpracy Duncana i Levisona – autorów pakietu SWIFT. MERCURY zawiera kilka opisanych wcześniej integratorów: MVS, B-S, RA15 i dwa dodatkowe: zoptymalizowaną wersję metody B-S oraz Hybrid.

Hybrid (*Hybrid Symplectic/Bulirsch-Stoer Integrator*) jest metodą opartą o opisany powyżej integrator MVS, przeznaczoną podobnie jak RMVS do całkowania ciasnych zbliżeń. Zastosowano tu jednak nieco inne rozwiązanie:

- Jeśli w układzie nie zachodzą ciasne zbliżenia, jest on całkowany metodą MVS.
- W przypadku zajścia zbliżenia małego ciała do planety, metoda całkowania zamieniana jest na wolniejszy, ale dokładniejszy algorytm zmiennokrokowy B-S, który optymalnie dobiera krok całkowania. Podobnie, jak w przypadku RMVS powoduje to utratę symplektyczności i wydłuża czas obliczeń, ale zbliżenia całkowane są z większą dokładnością.
- Kryterium „ciasnego zbliżenia” narzuca sam użytkownik w zależności od swoich potrzeb, definiując minimalną odległość zbliżenia w promieniach Hilla, dla której następuje zmiana algorytmu z MVS na B-S.

Biorąc pod uwagę fakt, że ruch orbitalny małego ciała poza zbliżeniami odbywa się po orbicie zbliżonej do keplerowskiej, powyższe rozwiązanie pozwala zaoszczędzić na czasie obliczeń przy zachowaniu umiarkowanej dokładności. Planetoida typu NEA większość czasu w swoim ruchu orbitalnym spędza w znacznej odległości od planet i wówczas metoda MVS wykazuje większość swoich zalet: szybkość bez utraty dokładności. W przypadku zbliżeń ujawnia swoje zalety metoda B-S, nie pozwalając na utratę dokładności. Zbliżenia stanowią niewielki procent czasu w ruchu orbitalnym, więc „spowolnienie” procesu obliczeniowego spowodowane zamianą metody na wolniejszą jest względnie małe. Czynnikiem mogącym pogorszyć jakość obliczeń może być utrata symplektyczności (błędy w całkowitej energii układu) oraz szczególne przypadki orbit silnie ekscentrycznych, z którymi nie radzi sobie metoda MVS. Integrator Hybrid został zastosowany z zadowalającymi wynikami (porównawczo z metodą RMVS i B-S) przez Tsiganisa i Varvoglisa (2000) w badaniu ewolucji planetoidy 719 Albert.

2.8 Testy zastosowanych metod

Wszystkie metody całkowania numerycznego opisane w pracy były testowane – sprawdzana była ich przydatność w opisywanych dalej zagadnieniach. Umożliwiło to otrzymanie i porównanie ze sobą dużej ilości wyników. Dyskusja stosowalności konkretnej metody numerycznej jest zagadnieniem trudnym, ponieważ opinie na ten temat znajdujące się w literaturze nie zawsze są ze sobą zgodne. Do tych opinii należy podchodzić ostrożnie. Wg Chambersa (1999), wybór właściwej metody do całkowania zagadnienia N-ciał jest kwestią indywidualnych preferencji i doświadczeń. Testy najnowszych metod opartych o schemat MVS (Michel, Valsecchi, 1997; Chambers, 1999) najczęściej mają charakter porównawczy – testuje się je razem z klasyczną metodą zmiennokrokową w celu odniesienia.

Testy zamieszczone poniżej biorą pod uwagę dwa kryteria wydajności metod: szybkość i dokładność. Szybkość była określana na podstawie czasu, jaki zajęły obliczenia na komputerze przy rozwiązywaniu określonego zagadnienia. Jest to parametr nieco subiektywny, ponieważ zależy od wielu czynników, np. architektury i wydajności konkretnego komputera. Dlatego przedstawiono go w sposób porównawczy, aby dawał ogólną orientację o szybkości danej metody. Dokładność oceniano poprzez przeprowadzenie obliczeń w przód i wstecz na tych samych interwałach czasu. Ten test może być stosowany przede wszystkim dla metod zmiennokrokowych, dla których całkowanie „powrotne" przebiega po innych punktach (nie jest symetryczne). Porównanie końcowych wyników z danymi startowymi pozwala określić „wewnętrzną zgodność metody" i może być traktowane jako kryterium jej dokładności. Ponieważ metody RMVS3 i Hybrid zawierają elementy regularyzacji związane ze zmiennością kroku, również mogły być przetestowane w ten sposób.

Podsumowując, przetestowano następujące metody numeryczne:

- Integrator RA15 Everharta.

- Metodę B-S w trzech odmianach: zamieszczoną w pakiecie SWIFT Duncana i Levisona, klasyczną, zamieszczoną w pakiecie MERCURY Chambersa oraz szybszą odmianę zwaną BS2, zaprogramowaną przez Chambersa do zastosowania w układach zachowawczych.

- Dwie metody oparte o integrator MVS: RMVS3 oraz Hybrid, zawierające dodatkowe elementy regularyzacji.

2.8.1 Testy szybkości

Test szybkości metod RMVS3 i B-S z pakietu SWIFT

Zadaniem tego testu było określenie, jak szybka jest metoda RMVS3 w porównaniu z klasyczną metodą Bulirscha-Stoera w zastosowaniach omówionych w pracy. Zastosowano więc obie metody do zagadnienia omówionego w następnym rozdziale - ruchu planetoid NEA ze zbliżeniami do Ziemi i Księżyca. Do testów wykorzystano 26 planetoid NEA wykazujących ciasne zbliżenia do Ziemi, których orbity wykazały wrażliwość na obecność Księżyca jako dodatkowego czynnika perturbującego (ruch 7 z nich został dokładniej omówiony w rozdziale następnym). Zastosowano dwa modele zaburzeń MB i MZK (również dokładniej zdefiniowane w następnym rozdziale). Dla metody RMVS3 przyjęto krok całkowania 0.1 dnia. Ze względu na własności tej metody i charakterystykę zagadnienia – krok jednego dnia w niektórych przypadkach jest zbyt duży, aby procedura regularyzacyjna prawidłowo przeanalizowała bardzo ciasne zbliżenia, które zachodzą w krótkiej skali czasu. Uwaga ta nie dotyczy metody B-S, gdzie krok jest zmienny. Jako parametr wymaganej dokładności dla metody B-S przyjęto typową wartość $\epsilon = 10^{-12}$.

Następnie wykonano całkowanie numeryczne równań ruchu 26 obiektów wraz z układem planetarnym na okresie czasu 100 lat i oszacowano czas potrzebny do zrealizowania tych operacji dla metody RMVS3 i B-S. Wyniki tego porównania zamieszczone są w Tab. 2.1.

T_{B-S}, $\epsilon = 10^{-12}$, model MB	T_{B-S}, $\epsilon = 10^{-12}$, model MZK	T_{RMVS3} $\tau = 0.1^d$, model MB	T_{RMVS3}, $\tau = 0.1^d$, model MZK
1.0	1.58	0.81	0.85

Tablica 2.1: Czas realizacji obliczeń za pomocą metod B-S i RMVS3 w zależności od przyjętego modelu dynamicznego. Czas obliczeń metodą B-S (dla modelu MB) w celu odniesienia przyjęto jako jednostkowy.

Jeżeli zdefiniujemy odwrotność czasu potrzebnego do obliczeń jako szybkość obliczeń i odniesiemy ją dla metody RMVS3 względem metody B-S, okazuje się, że w powyższym zastosowaniu może być około $1.2 \div 1.8$-krotnie szybsza. Szybkość metody RMVS3 nieco maleje, kiedy występuje częstsza konieczność „zwalniania" obliczeń przy całkowaniu zbliżeń. Metoda RMVS3 nieco lepiej radzi sobie z całkowaniem równań ruchu w układzie z rozdzielonym Księżycem (MZK). Metoda B-S przy dodatkowym uwzględnieniu Księżyca bardziej „zwalnia". Można znacząco przyspieszyć obliczenia metodą RMVS3, ale odbywa się to kosztem zmniejszenia dokładności.

Test szybkości wszystkich metod - zastosowanie modelu dynamicznego MZK

Przetestowano również kompleksowo szybkość wszystkich metod w zagadnieniu ruchu 26 ciał testowych z modelem MZK (Tab. 2.2). Dla metod zmiennokrokowych przyjęto takie samo kryterium dokładności $\epsilon = 10^{-12}$, natomiast dla metod opartych o schemat symplektyczny przyjęto krok całkowania $\tau = 0.1^d$. Przy takich uwarunkowaniach czas obliczeń okazał się podobnego

Metoda, Założony krok lub dokładność	Czas obliczeń (względny)
Hybrid, $\tau = 0.1^d$	1.49
RA15, $\epsilon = 10^{-12}$	1.0
RMVS3, $\tau = 0.1^d$	1.14
BS(Mercury), $\epsilon = 10^{-12}$	1.18
BS2(Mercury), $\epsilon = 10^{-12}$	0.72
BS(Swift), $\epsilon = 10^{-12}$	2.12

Tablica 2.2: Czas realizacji obliczeń za pomocą różnych metod numerycznych – czas obliczeń metodą RA15 przyjęto jako jednostkowy. Całkowano równania ruchu 26 planetoid NEA przy uwzględnieniu zaburzeń od planet i Księżyca (model MZK).

rzędu dla wszystkich metod, przy czym szybkość metody B-S różniła się w zależności od użytej odmiany: najszybsza okazała się wersja BS2, zoptymalizowana w pakiecie Mercury do całkowania ruchu w układach zachowawczych. Metody symplektyczne przy podniesieniu stawianych im wymogów okazały się nieco wolniejsze w tym zastosowaniu od klasycznego algorytmu RA15 (Tab. 2.2).

Test szybkości wszystkich metod - zastosowanie modelu dynamicznego BIG4

Analogiczny test zastosowano dla zagadnienia z czterema największymi planetoidami (model BIG4). Wyniki przedstawione są w Tab. 2.3. W tym teście metody oparte o MVS (RMVS3, Hybrid) okazały się bardzo szybkie, jednak tylko pod warunkiem zwiększenia podstawowego kroku całkowania do jednego dnia. Jak się okazało później, zabieg ten spowodował obniżenie dokładności obliczeniowej. Całkowanie z bardziej optymalnym podstawowym krokiem 0.1^d powoduje spadek szybkości obliczeń w stosunku do metod klasycznych. W porównaniu z poprzednim przypadkiem odnotowano większy spadek szybkości względem metody RA15.

Metoda, Założony krok lub dokładność	Czas obliczeń (względny)
Hybrid, $\tau = 0.1^d$	1.92
Hybrid, $\tau = 1^d$	0.20
RA15, $\epsilon = 10^{-12}$	1.0
RMVS3, $\tau = 0.1^d$	1.61
RMVS3, $\tau = 1^d$	0.17
BS(Mercury), $\epsilon = 10^{-12}$	0.80
BS2(Mercury), $\epsilon = 10^{-12}$	0.46

Tablica 2.3: Czas realizacji obliczeń za pomocą różnych metod numerycznych – czas obliczeń metodą RA15 przyjęto jako jednostkowy. Całkowano równania ruchu 13 planetoid NEA przy uwzględnieniu zaburzeń od planet i czterech planetoid (model BIG4).

2.8.2 Testy dokładności

W testach dokładności zastosowano jako dane początkowe małych ciał współrzędne 1083 planetoid NEA na epokę oskulacji JD 2451800.5 (źródło: Lowell Observatory Database) oraz odpowiadające im współrzędne planet i Księżyca opracowane w oparciu o efemerydę JPL DE406. Test dotyczył zagadnienia omówionego w rozdziale 3. Dodatkowy test przeprowadzono dla 26 orbit najbardziej interesujących z punktu widzenia zagadnienia. Elementy tych orbit zamieszczone są w Tab. 2.4.

Analogiczne testy wykonano dla 651 orbit NEA badanych w rozdziale 4 oraz wyłonionej z nich podgrupy 13 orbit (Tab. 2.4). Epoka oskulacji tych orbit: JD 2452000.5. Te obliczenia wykonano z zastosowaniem modelu BIG4, przy czym do współrzędnych planet dołączono położenia i prędkości 4 dużych planetoid uzyskanych na podstawie Lowell Observatory Database.

Szczegóły dotyczące danych i ich selekcji w obu zagadnieniach zawierają odpowiednio rozdziały 2 i 3.

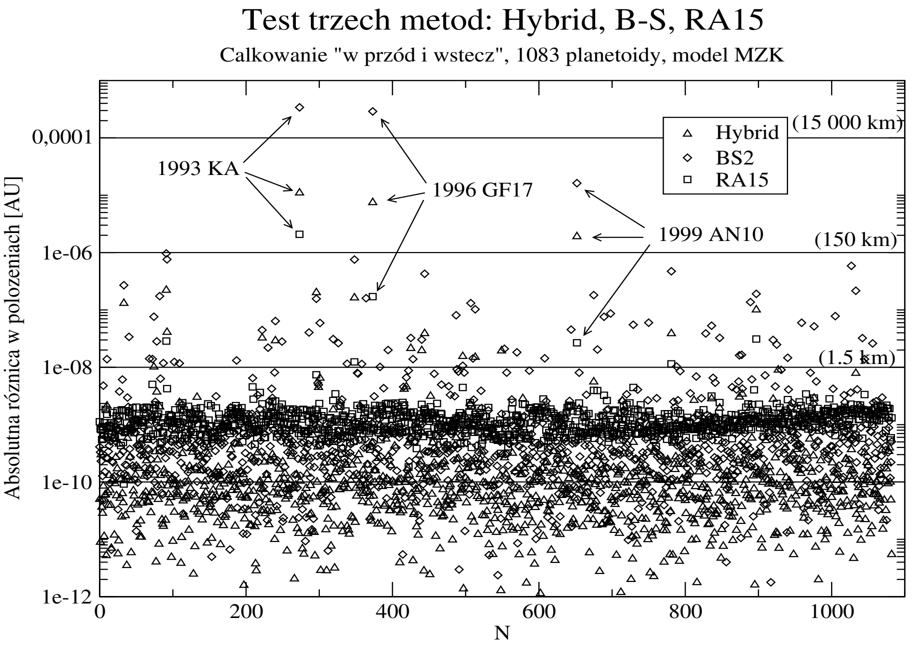
Testy dokładności w zagadnieniu badania perturbacji od rozdzielonej Ziemi i Księżyca

Jako kryterium dokładności przyjęto wynik testu polegającego na całkowaniu równań ruchu 100 lat w przód, 100 lat wstecz, i porównaniu wyniku z danymi początkowymi. Określona została absolutna różnica w położeniach wyrażonych we współrzędnych prostokątnych. Testowi poddano 1083 ciał – wyniki przedstawia Rys. 2.1.

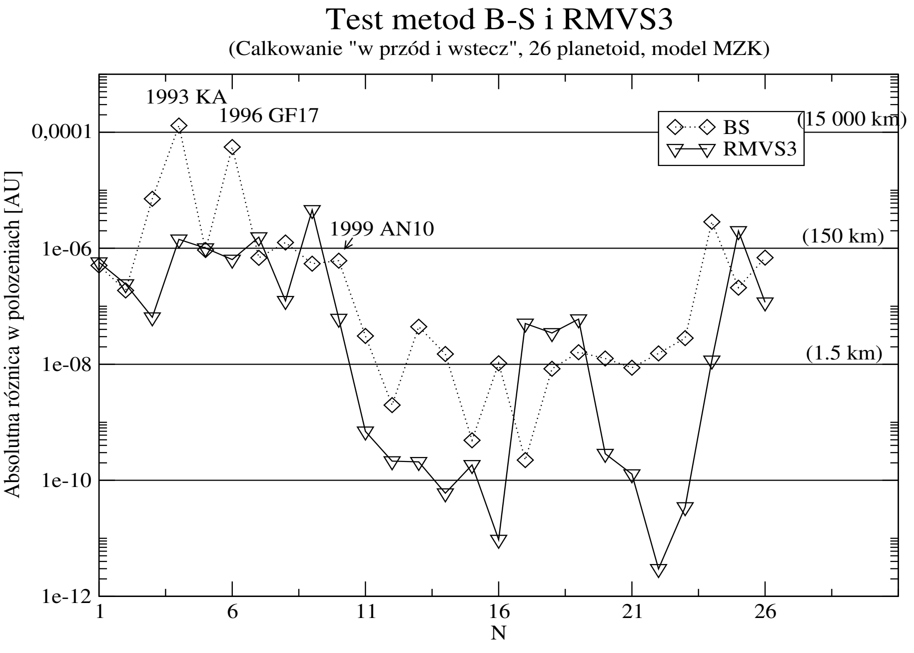
Dla większości planetoid NEA przeprowadzony test wypadł zadowalająco. Oszacowane błędy metod (dla położeń ciał testowych, w skali czasu 100 lat) były rzędu kilometrów lub mniejsze. Najwięcej problemów sprawiły

Tablica 2.4: Elementy orbitalne 26+13 wybranych „ciał testowych” (epoka oskulacji = 2451800.5 oraz 2452000.5). Pierwsze 7 planetoid zostało zamieszczone także później, w Tab. 3.1 jako najbardziej „wrażliwe” na zastosowanie modelu MZK. 13 ostatnich orbit (druga część tabeli) zostało omówione przy badaniu modelu BIG4.

26 orbit - epoka oskulacji 2451800.5 (testy z modelem MZK)						
Obiekt	M	ω	Ω	i	e	a
4581 Asclepius	101.215427	255.084739	180.521441	4.909830	0.35681206	1.02180089
4660 Nereus	95.234694	157.922770	314.752034	1.423832	0.36024680	1.48963990
1991 VG	132.707601	24.530938	73.965448	1.445878	0.04913300	1.02691827
1993 KA	87.918172	341.940491	235.877686	6.044502	0.19761648	1.25541684
1995 UB	15.457011	112.305279	204.276409	8.971842	0.41204103	1.40022604
1996 GF17	288.211569	344.528498	29.698983	17.153012	0.29564015	1.02809749
1997WQ23	106.918550	296.238442	56.094954	2.452544	0.49442120	1.73605995
1997 XF11	306.037278	102.472173	214.116699	4.095382	0.48356139	1.44178644
1998 KY26	212.571599	209.167862	84.452829	1.481157	0.20147964	1.23195728
1999 AN10	293.808101	268.292864	314.508257	39.931170	0.56217142	1.45869958
1943 Anteros	359.730780	338.233148	246.431439	8.705398	0.25603801	1.43009639
2061 Anza	259.101582	156.421310	207.787609	3.766109	0.53666768	2.26585546
3122 Florence	273.485204	27.591314	336.211607	22.172158	0.42257044	1.76884029
1985 WA	38.254474	351.153960	43.653306	9.803336	0.60698519	2.83133079
1993 BD3	241.985593	168.604349	313.882710	0.884247	0.37307807	1.62952920
1994 LY	105.474443	202.655506	141.219774	17.781569	0.44420146	1.89647027
1995 LA	249.414212	17.478268	247.771648	8.699697	0.52042192	2.12504151
1996 MQ	44.121661	28.471178	262.908082	3.476484	0.57132465	2.40181502
1998 KJ17	296.910315	163.973049	76.100347	9.157153	0.48374014	1.98681828
1998 MX5	150.643549	55.698717	266.611479	9.707346	0.61153773	2.91745761
1999 RJ33	242.429725	27.210965	343.226757	18.505500	0.18860085	1.25378820
1999 VG22	90.570138	222.469976	271.500536	2.852951	0.32974179	1.64692366
2000 CK59	128.856570	341.091691	139.430174	5.689946	0.31254518	1.47918436
2340 Hathor	6.372981	39.814022	211.629521	5.850352	0.45001337	0.84374811
1989 UQ	5.721623	14.925192	178.420051	1.291061	0.26466592	0.91481407
2000 BM19	125.236260	247.254828	70.751879	6.891492	0.35840944	0.74127403
13 orbit - epoka oskulacji 2452000.5 (testy z modelem BIG4)						
1990 BG	359.406719	135.744457	110.474172	36.398842	0.56991274	1.48596550
1991 BA	115.758282	72.500496	118.592584	2.089212	0.66472375	2.09169835
1994 ES1	20.197210	279.092735	352.899348	0.918377	0.59460726	1.42542075
1994 VH8	303.058198	313.438992	38.435811	3.619910	0.47989868	1.73841536
1994 XD	288.276677	247.913584	97.521641	4.337493	0.72869054	2.35668811
1997 QK1	279.505692	2.522676	307.145057	2.885333	0.64154977	2.79423802
1997 UR	330.475214	200.209581	214.099708	2.263015	0.31200993	1.45864402
1997 WQ23	193.105355	296.232030	56.098026	2.452498	0.49430029	1.73617460
1997 XF11	59.897733	102.475743	214.116164	4.095322	0.48355876	1.44179339
1999 MM	277.261791	268.462040	111.261651	4.764151	0.61055622	1.62369379
2000 VN2	39.569071	32.439719	76.588908	14.649533	0.44080489	1.97491371
2000 WG63	44.806277	185.443166	243.498390	9.193425	0.47475852	1.90965958
2001 DZ76	2.857033	38.049705	152.157227	5.736945	0.60661232	2.34601870



Rysunek 2.1: Test dokładności metod w zagadnieniu z modelem MZK



Rysunek 2.2: Test dokładności pakietu SWIFT dla wybranych 26 ciał testowych

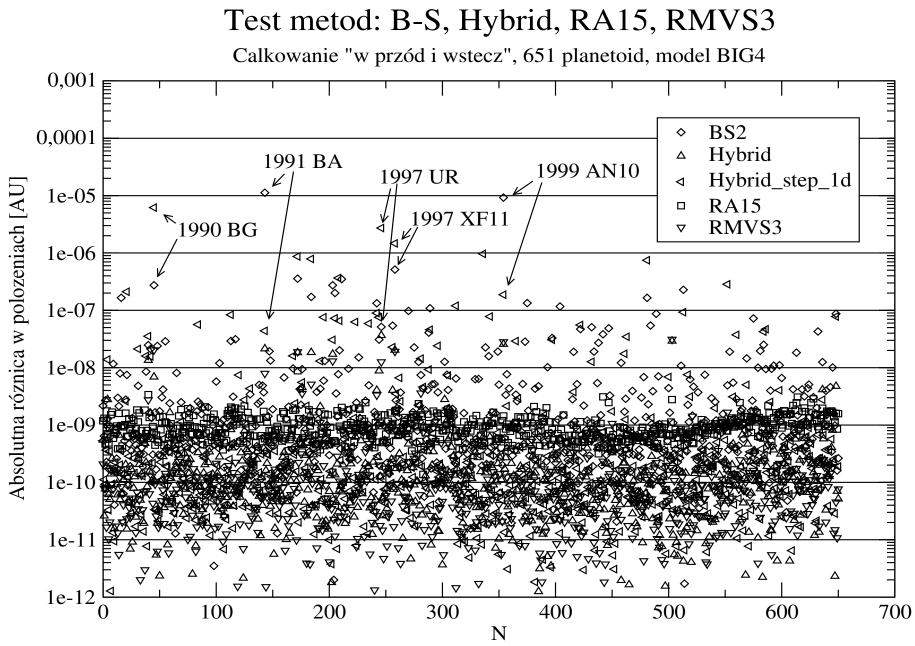
orbity obiektów 1993 KA, 1996 GF17 i 1999 AN10. Z tymi orbitami najgorzej poradziły sobie metody BS2, B-S i Hybrid, natomiast metody RA15 i RMVS3 uzyskały nieco lepsze wyniki. Te trzy orbity są przykładami trajektorii silnie uzależnionych od warunków początkowych. Ponadto znajdują się w wydzielonej grupie ciał najsilniej zaburzanych przez Księżyc. Grupa ta (26 orbit) została poddana dodatkowemu testowi, w którym porównano dokładność metody B-S i RMVS3 (Rys. 2.2).

W badanym zagadnieniu najbardziej przydatne okazały się metody RMVS3 i RA15, które dały wyniki nieco lepsze od innych pod względem wewnętrznej dokładności. Pod względem szybkości obliczeń metoda RMVS3 okazała się wolniejsza o około 14 % ze względu na konieczność całkowania z małym krokiem. Wyniki otrzymane tymi metodami są bardzo zbliżone i można traktować je w zasadzie równoważnie. Dlatego w rozdziale 3 zostały przedstawione wyniki otrzymane za pomocą metody RMVS3 i zweryfikowane metodą RA15.

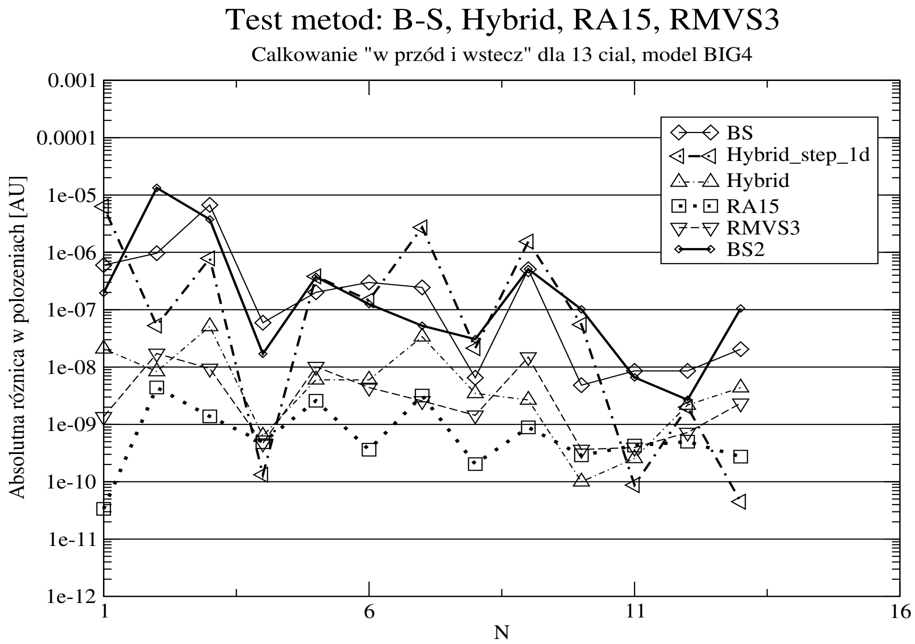
Testy dokładności w zagadnieniu badania perturbacji od Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei

Wykonano analogiczny do poprzedniego test polegający na całkowaniu równań ruchu w przód i wstecz i porównywaniu wyników z danymi początkowymi. Testowano ruch 651 ciał testowych – planetoid NEA o ekscentrycznych orbitach, które potencjalnie mogą być zaburzane przez cztery największe planetki. Wykorzystano model dynamiczny układu BIG4 z Ceres, Pallas, Vestą i Hygieią. Do bardziej precyzyjnych testów wykorzystano 13 ciał o trajektoriach najbardziej wrażliwych na oddziaływanie 4 dużych planetoid (szczegóły selekcji - rozdział 4).

Rys. 2.3 ilustruje wyniki testu dla wszystkich badanych metod. Dla planetoid 1990 BG, 1991 BA, 1997 UR, 1997 XF11 oraz 1999 AN10 wypadły one najgorzej, przy czym najgorsze wyniki testu dotyczą metody BS2 oraz Hybrid z krokiem całkowania 1^d. Jednocześnie były to algorytmy liczące stosunkowo szybko (Tab. 2.3). Należy dodatkowo zwrócić uwagę, że w przypadku zbliżeń ciał testowych do 4 dużych planetoid dla metod Hybrid i RMVS3 nie działały procedury regularyzacyjne, tzn. zbliżenia te były całkowane ze stałym krokiem. Przyczyną tego faktu był charakter badanego ruchu: brak ciasnych zbliżeń do Ceres w odległościach rzędu jej promienia Hilla, (dla Ceres $r_{Hill} = 1.49 \cdot 10^{-3} AU$). Dlatego w tym przypadku najbardziej można zaufać metodzie RA15, która dała w teście najdokładniejsze wyniki przy umiarkowanej szybkości. Przewaga tej metody jest zauważalna w teście 13 wybranych orbit (Rys. 2.4). Wyniki testu porównawczego elementów orbitalnych tych ciał przedstawiają Tab. 2.5–2.9. Elementy orbitalne zachowane są również z najlepszą zgodnością dla metody RA15. Dlatego wyniki przedstawione w rozdziale 4 odnoszą się właśnie do tej metody.



Rysunek 2.3: Test dokładności metod przy zastosowaniu modelu dynamicznego BIG4



Rysunek 2.4: Test dokładności metod przy zastosowaniu modelu BIG4 dla wybranych 13 ciał testowych

Tablica 2.5: Elementy orbitalne planetoid 2000 VN2, 2000 WG63, 2001 DZ76 przy całkowaniu równań ruchu różnymi metodami. Wyniki po przeprowadzeniu testu „w przód i wstecz” na przedziale 100 lat.

a	e	i	ω	Ω	M
2000 VN2 – dane startowe					
1.97491371E+00	4.40804890E-01	1.46495330E+01	3.24397190E+01	7.65889080E+01	3.95690710E+01
2000 VN2 – test metody B-S					
1.97491371E+00	4.40804890E-01	1.46495330E+01	3.24397190E+01	7.65889080E+01	3.95690710E+01
2000 VN2 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.97491371E+00	4.40804890E-01	1.46495330E+01	3.24397190E+01	7.65889080E+01	3.95690710E+01
2000 VN2 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.97491371E+00	4.40804890E-01	1.46495330E+01	3.24397190E+01	7.65889080E+01	3.95690710E+01
2000 VN2 – test metody RA15					
1.97491371E+00	4.40804890E-01	1.46495330E+01	3.24397190E+01	7.65889080E+01	3.95690710E+01
2000 WG63 – dane startowe					
1.90965958E+00	4.74758520E-01	9.19342500E+00	1.85443166E+02	2.43498390E+02	4.48062770E+01
2000 WG63 – test metody B-S					
1.90965958E+00	4.74758520E-01	9.19342500E+00	1.85443166E+02	2.43498390E+02	4.48062772E+01
2000 WG63 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.90965958E+00	4.74758520E-01	9.19342500E+00	1.85443166E+02	2.43498390E+02	4.48062770E+01
2000 WG63 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.90965958E+00	4.74758520E-01	9.19342500E+00	1.85443166E+02	2.43498390E+02	4.48062782E+01
2000 WG63 – test metody RA15					
1.90965958E+00	4.74758520E-01	9.19342500E+00	1.85443166E+02	2.43498390E+02	4.48062770E+01
2001 DZ76 – dane startowe					
2.34601870E+00	6.06612320E-01	5.73694500E+00	3.80497050E+01	1.52157227E+02	2.85703300E+00
2001 DZ76 – test metody B-S					
2.34601870E+00	6.06612320E-01	5.73694500E+00	3.80497050E+01	1.52157227E+02	2.85703285E+00
2001 DZ76 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
2.34601870E+00	6.06612320E-01	5.73694500E+00	3.80497050E+01	1.52157227E+02	2.85703305E+00
2001 DZ76 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
2.34601870E+00	6.06612320E-01	5.73694500E+00	3.80497050E+01	1.52157227E+02	2.85703297E+00
2001 DZ76 – test metody RA15					
2.34601870E+00	6.06612320E-01	5.73694500E+00	3.80497050E+01	1.52157227E+02	2.85703302E+00

Tablica 2.6: Elementy orbitalne planetoid 1991 BA, 1994 ES1, 1994 VH8 przy całkowaniu równań ruchu różnymi metodami. Wyniki po przeprowadzeniu testu „w przód i wstecz” na przedziale 100 lat.

a	e	i	ω	Ω	M
1991 BA – dane startowe					
2.09169835E+00	6.64723750E-01	2.08921200E+00	7.25004960E+01	1.18592584E+02	1.15758282E+02
1991 BA – test metody B-S					
2.09169870E+00	6.64723824E-01	2.08921280E+00	7.25005379E+01	1.18592544E+02	1.15758793E+02
1991 BA – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
2.09169835E+00	6.64723750E-01	2.08921200E+00	7.25004959E+01	1.18592584E+02	1.15758281E+02
1991 BA – test metody Hybrid z krokiem 1d					
2.09169835E+00	6.64723750E-01	2.08921200E+00	7.25004962E+01	1.18592584E+02	1.15758284E+02
1991 BA – test metody RA15					
2.09169835E+00	6.64723750E-01	2.08921200E+00	7.25004960E+01	1.18592584E+02	1.15758282E+02
1994 ES1 – dane startowe					
1.42542075E+00	5.94607260E-01	9.18377000E-01	2.79092735E+02	3.52899348E+02	2.01972100E+01
1994 ES1 – test metody B-S					
1.42542075E+00	5.94607260E-01	9.18377036E-01	2.79092735E+02	3.52899348E+02	2.01972010E+01
1994 ES1 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.42542075E+00	5.94607260E-01	9.18376998E-01	2.79092735E+02	3.52899348E+02	2.01972105E+01
1994 ES1 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.42542075E+00	5.94607260E-01	9.18376923E-01	2.79092735E+02	3.52899348E+02	2.01972320E+01
1994 ES1 – test metody RA15					
1.42542075E+00	5.94607260E-01	9.18376999E-01	2.79092735E+02	3.52899348E+02	2.01972102E+01
1994 VH8 – dane startowe					
1.73841536E+00	4.79898680E-01	3.61991000E+00	3.13438992E+02	3.84358110E+01	3.03058198E+02
1994 VH8 – test metody B-S					
1.73841536E+00	4.79898680E-01	3.61991000E+00	3.13438992E+02	3.84358110E+01	3.03058198E+02
1994 VH8 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.73841536E+00	4.79898680E-01	3.61991000E+00	3.13438992E+02	3.84358110E+01	3.03058198E+02
1994 VH8 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.73841536E+00	4.79898680E-01	3.61991000E+00	3.13438992E+02	3.84358110E+01	3.03058198E+02
1994 VH8 – test metody RA15					
1.73841536E+00	4.79898680E-01	3.61991000E+00	3.13438992E+02	3.84358110E+01	3.03058198E+02

Tablica 2.7: Elementy orbitalne planetoid 1994 XD, 1997 QK1, 1997 UR przy całkowaniu równań ruchu różnymi metodami. Wyniki po przeprowadzeniu testu „w przód i wstecz” na przedziale 100 lat.

a	e	i	ω	Ω	M
1994 XD – dane startowe					
2.35668811E+00	7.28690540E-01	4.33749300E+00	2.47913584E+02	9.75216410E+01	2.88276677E+02
1994 XD – test metody B-S					
2.35668811E+00	7.28690540E-01	4.33749296E+00	2.47913584E+02	9.75216413E+01	2.88276682E+02
1994 XD – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
2.35668811E+00	7.28690540E-01	4.33749300E+00	2.47913584E+02	9.75216410E+01	2.88276678E+02
1994 XD – test metody Hybrid z krokiem 1d					
2.35668813E+00	7.28690542E-01	4.33749281E+00	2.47913583E+02	9.75216424E+01	2.88276702E+02
1994 XD – test metody RA15					
2.35668811E+00	7.28690540E-01	4.33749300E+00	2.47913584E+02	9.75216410E+01	2.88276677E+02
1997 QK1 – dane startowe					
2.79423802E+00	6.41549770E-01	2.88533300E+00	2.52267600E+00	3.07145057E+02	2.79505692E+02
1997 QK1 – test metody B-S					
2.79423802E+00	6.41549769E-01	2.88533301E+00	2.52267583E+00	3.07145057E+02	2.79505688E+02
1997 QK1 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
2.79423802E+00	6.41549770E-01	2.88533300E+00	2.52267601E+00	3.07145057E+02	2.79505692E+02
1997 QK1 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
2.79423802E+00	6.41549769E-01	2.88533300E+00	2.52267594E+00	3.07145057E+02	2.79505689E+02
1997 QK1 – test metody RA15					
2.79423802E+00	6.41549770E-01	2.88533300E+00	2.52267600E+00	3.07145057E+02	2.79505692E+02
1997 UR – dane startowe					
1.45864402E+00	3.12009930E-01	2.26301500E+00	2.00209581E+02	2.14099708E+02	3.30475214E+02
1997 UR – test metody B-S					
1.45864402E+00	3.12009930E-01	2.26301498E+00	2.00209581E+02	2.14099708E+02	3.30475212E+02
1997 UR – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.45864402E+00	3.12009930E-01	2.26301499E+00	2.00209581E+02	2.14099708E+02	3.30475213E+02
1997 UR – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.45864402E+00	3.12009932E-01	2.26301419E+00	2.00209591E+02	2.14099701E+02	3.30475128E+02
1997 UR – test metody RA15					
1.45864402E+00	3.12009930E-01	2.26301500E+00	2.00209581E+02	2.14099708E+02	3.30475214E+02

Tablica 2.8: Elementy orbitalne planetoid 1997 WQ23, 1997 XF11, 1990 BG przy całkowaniu równań ruchu różnymi metodami. Wyniki po przeprowadzeniu testu „w przód i wstecz" na przedziale 100 lat.

a	e	i	ω	Ω	M
1997 WQ23 – dane startowe					
1.73617460E+00	4.94300290E-01	2.45249800E+00	2.96232030E+02	5.60980260E+01	1.93105355E+02
1997 WQ23 – test metody B-S					
1.73617460E+00	4.94300289E-01	2.45249891E+00	2.96232035E+02	5.60980213E+01	1.93105356E+02
1997 WQ23 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.73617460E+00	4.94300290E-01	2.45249806E+00	2.96232030E+02	5.60980257E+01	1.93105355E+02
1997 WQ23 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.73617460E+00	4.94300289E-01	2.45249855E+00	2.96232033E+02	5.60980232E+01	1.93105355E+02
1997 WQ23 – test metody RA15					
1.73617460E+00	4.94300290E-01	2.45249801E+00	2.96232030E+02	5.60980260E+01	1.93105355E+02
1997 XF11 – dane startowe					
1.44179339E+00	4.83558760E-01	4.09532200E+00	1.02475743E+02	2.14116164E+02	5.98977330E+01
1997 XF11 – test metody B-S					
1.44179339E+00	4.83558761E-01	4.09532202E+00	1.02475743E+02	2.14116164E+02	5.98977531E+01
1997 XF11 – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.44179339E+00	4.83558760E-01	4.09532200E+00	1.02475743E+02	2.14116164E+02	5.98977338E+01
1997 XF11 – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.44179339E+00	4.83558758E-01	4.09532193E+00	1.02475744E+02	2.14116164E+02	5.98976752E+01
1997 XF11 – test metody RA15					
1.44179339E+00	4.83558760E-01	4.09532200E+00	1.02475743E+02	2.14116164E+02	5.98977331E+01
1990 BG – dane startowe					
1.48596550E+00	5.69912740E-01	3.63988420E+01	1.35744457E+02	1.10474172E+02	3.59406719E+02
1990 BG – test metody B-S					
1.48596550E+00	5.69912740E-01	3.63988420E+01	1.35744457E+02	1.10474172E+02	3.59406713E+02
1990 BG – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.48596550E+00	5.69912740E-01	3.63988420E+01	1.35744457E+02	1.10474172E+02	3.59406719E+02
1990 BG – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.48596553E+00	5.69912748E-01	3.63988419E+01	1.35744458E+02	1.10474172E+02	3.59406844E+02
1990 BG – test metody RA15					
1.48596550E+00	5.69912740E-01	3.63988420E+01	1.35744457E+02	1.10474172E+02	3.59406719E+02

Tablica 2.9: Elementy orbitalne planetoidy 1999 MM przy całkowaniu równań ruchu różnymi metodami. Wyniki po przeprowadzeniu testu „w przód i wstecz” na przedziale 100 lat.

a	e	i	ω	Ω	M
1999 MM – dane startowe					
1.62369379E+00	6.10556220E-01	4.76415100E+00	2.68462040E+02	1.11261651E+02	2.77261791E+02
1999 MM – test metody B-S					
1.62369379E+00	6.10556220E-01	4.76415098E+00	2.68462040E+02	1.11261651E+02	2.77261792E+02
1999 MM – test metody Hybrid z krokiem 0.1d					
1.62369379E+00	6.10556220E-01	4.76415100E+00	2.68462040E+02	1.11261651E+02	2.77261791E+02
1999 MM – test metody Hybrid z krokiem 1d					
1.62369379E+00	6.10556221E-01	4.76415102E+00	2.68462040E+02	1.11261651E+02	2.77261790E+02
1999 MM – test metody RA15					
1.62369379E+00	6.10556220E-01	4.76415100E+00	2.68462040E+02	1.11261651E+02	2.77261791E+02

2.8.3 Wnioski z przeprowadzonych testów

W ogólności, wykonane testy metod numerycznych potwierdziły fakt ich uniwersalności. Badane metody zostały zastosowane do zróżnicowanej pod względem elementów grupy orbit i w większości przypadków możliwe było całkowanie ruchu w przód i wstecz na 100 lat z błędem nie przekraczającym setek metrów. Pojawiły się jednak odosobnione przypadki, dla których niektóre metody wypadły w teście nieco gorzej.

Testowane metody całkowania posiadają wystarczającą dokładność, aby można było sensownie oszacować badane w pracy subtelne efekty grawitacyjne. Jako metody dające najbardziej wiarygodne wyniki w zagadnieniu zastosowania modelu MZK (rozdział 3) uznano RMVS3 i RA15. W zastosowaniu modelu BIG4 (rozdział 4) najlepiej sprawdziła się metoda RA15.

Ciekawą konkluzję uzyskano badając szybkość obliczeń każdym z badanych algorytmów. Z założenia szybsze metody oparte o schemat symplektyczny po nałożeniu na nie dodatkowych wymagań dotyczących dokładności wykazały istotne spowolnienie obliczeń. Okazuje się zatem, ze nawet używając najnowszych metod całkowania numerycznego trudno jest pogodzić wymagania dotyczące oczekiwanej dokładności z wymogami szybkości obliczeń.

Rozdział 3

Problem separacji Ziemi i Księżyca w zagadnieniach dynamicznych planetoid NEA

3.1 Wprowadzenie do zagadnienia

Układ Ziemia–Księżyc jest pewnego rodzaju wyjątkiem w Układzie Słonecznym. W porównaniu z innymi systemami księżyców obiegających planety, rozmiary i masy obu składników różnią się w niewielkim stopniu. Stosunek mas wynoszący w przybliżeniu zaledwie 1/81 powoduje, że Ziemia z Księżycem są czymś w rodzaju „podwójnej planety”. Nieco podobny pod tym względem, ale znacznie słabiej poznany jest układ Pluton–Charon.

Ziemia i Księżyc znajdują się w średniej odległości od siebie $384400\,km \simeq 2.57 \cdot 10^{-3}\ AU$. Wartość ta często jest używana w celach poglądowych jako jednostka odległości (tzw. EMU - *Earth-Moon Unit*). Tak niewielkie rozseparowanie składników budzi oczywiście wątpliwość, czy w zagadnieniach dynamiki ciał zbliżających się do Ziemi należy brać pod uwagę model z rozdzielonym Księżycem. Dyskusji tego problemu poświęcony jest między innymi niniejszy rozdział pracy.

Wpływ perturbacji księżycowych na ruch planetoid NEA można oszacować ilościowo porównując wyniki całkowania numerycznego równań ruchu uzyskane za pomocą dwóch modeli dynamicznych. Pierwszy model, zwany dalej „Modelem barycentrum” (MB) bierze pod uwagę perturbacje od pojedynczego ciała o masie równej sumie mas obu składników położonego w barycentrum układu Ziemia–Księżyc. Jest to model uproszczony i używany zazwyczaj przy założeniu, że rozdzielenie Księżyca jest zabiegiem komplikującym obliczenia i nie wnoszącym znaczących zmian do wyników. Drugi model dynamiczny, nazwany w pracy „Modelem Ziemia–Księżyc” (MZK) uwzględnia Ziemię i Księżyc jako dwa osobne czynniki perturbujące. Jest to model bardziej zbliżony do rzeczywistości, ale za to złożony w zastosowaniu.

Obecnie można napotkać w literaturze na przykłady użycia każdego z wymienionych modeli, trudno natomiast jest zdefiniować ilościowe kryterium ich stosowalności. Obecność Księżyca jako dodatkowego czynnika zaburzającego może być istotna już na etapie wyznaczania orbity z danych obserwacyjnych. Taki właśnie przykład podają Yeomans i Chodas (1994) - procedura poprawiania orbity planetoidy nie mogła osiągnąć zbieżności, dopóki w modelu dynamicznym nie uwzględniono rozdzielenia Ziemi i Księżyca. Orbita ta była zatem niewyznaczalna bez wzięcia pod uwagę „dwoistości” tego układu. Wpływ zastosowania modelu MZK na wyniki przy całkowaniu ruchu planetoid i komet był również analizowany przez Todorovic-Juchniewicz (1985). W pracy tej wykorzystano bardzo niewielką liczbę orbit, ale otrzymane wyniki potwierdziły fakt, że całkowanie numeryczne równań ruchu NEA może dawać nieco inne wyniki przy zastosowaniu modelu MZK. Wstępne wyniki otrzymane przez autora (Kankiewicz, 2001 i 2002) dla 128 obiektów z grupy PHA (*Potentially Hazardous Asteroids*) wykazują, że zmiana modelu dynamicznego może w jednostkowych przypadkach znacząco zmienić orbity planetoid NEA. Ostatnio pojawiło się opracowanie dotyczące ewentualnego wpływu Księżyca na proces kolizyjny ciał niebieskich z Ziemią (Domingos, 2000). Praca ta podaje ilościowe oszacowanie warunków, jakie muszą zajść, aby wpływ Księżyca był istotny w przewidywaniu trajektorii kolizji małego ciała z Ziemią. Wyniki te otrzymano na podstawie uproszczonego modelu geometrycznego zagadnienia oraz symulacji numerycznych. Wnioski dotyczą przede wszystkim wpływu Księżyca na przewidywanie kolizji, a więc uzupełniają się tylko częściowo z wynikami opisanymi w poniższym rozdziale.

3.2 Model dynamiczny i dane początkowe

3.2.1 Wybór modelu i metody

W obliczeniach zostały wzięte pod uwagę dwa wspomniane wyżej modele dynamiczne układu Ziemia–Księżyc. Oczywiście do modeli MB i MZK dodano wszystkie planety układu. Ponieważ planetoidy NEA często zbliżają się do planet wewnętrznych, a także podlegają zaburzeniom od bardziej odległych 4 wielkich planet, wszystkie te czynniki perturbujące musiały zostać uwzględnione. Dyskusyjną sprawą jest tu obecność Plutona, którego dodanie do modelu dynamicznego ma marginalny wpływ na wyniki ze względu na dużą odległość i jego małą masę.

Równania ruchu planetoid całkowano za pomocą opisanego wcześniej pakietu SWIFT metodą RMVS3, a także metodami HYBRID, Bulirscha-Stoera oraz Everharta (RA15) w celach porównawczych. Ze względu na dużą szybkość i zadowalającą dokładność jako główne narzędzie obliczeniowe w badanym zagadnieniu została wybrana metoda RMVS3–wyniki przedstawione w tym rozdziale właśnie się do niej odnoszą. Posiada ona zalety metod symplektycznych (duża wydajność przy całkowaniu ruchu na orbicie quasi-keplerowskiej) i zawiera dodatkowe elementy regularyzacji – w przypadku zastosowania w układach dynamicznych w których zachodzą ciasne zbliżenia. Otrzymane rezultaty zostały później potwierdzone niezależnie poprzez całkowanie metodą RA15. Bardziej szczegółowy opis testów wymienionych metod numerycznych znajduje się w rozdziale 2.

3.2.2 Dane początkowe

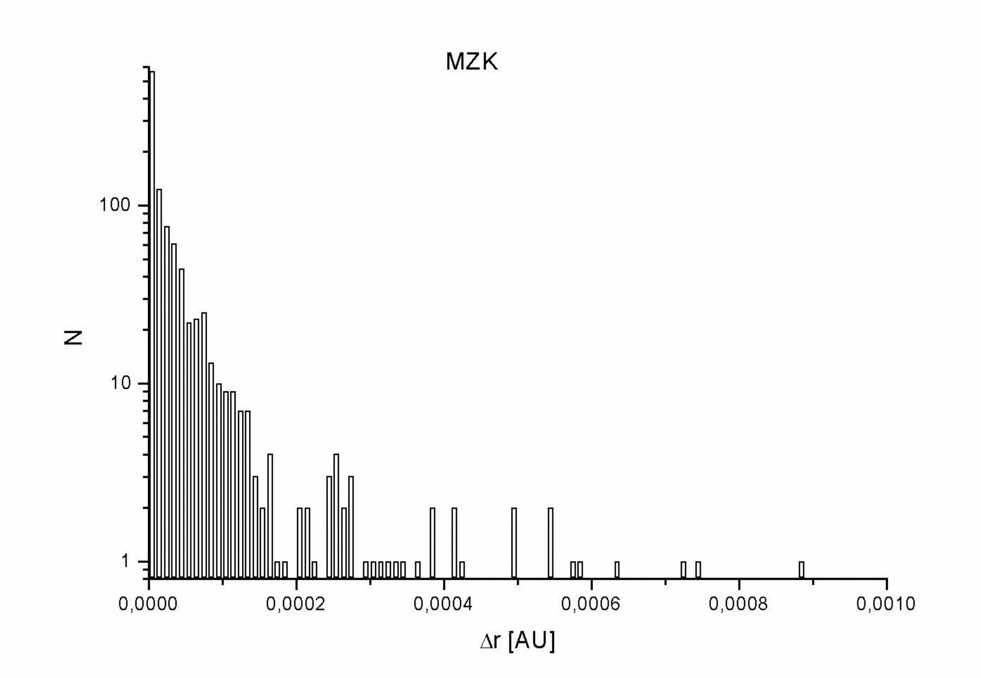
Elementy orbit planetoid NEA zostały zaczerpnięte z elektronicznej bazy danych *Lowell Observatory Database* dostępnej na bieżąco w sieci internet. Baza ta jest często aktualizowana w związku z lawinowym napływem danych obserwacyjnych i koniecznością stałego poprawiania orbit planetoid. W celu wstępnej selekcji planetoid NEA, dla których przewidywanie trajektorii może być uzależnione od wyboru modelu dynamicznego, całkowano numerycznie równania ruchu 1083 obiektów. We wrześniu 2000 r. , gdy rozpoczęto obliczenia do niniejszej pracy, w bazie danych zamieszczone były elementy orbitalne 544 planetoid typu Apollo, 455 typu Amor i 84 Ateny dla epoki oskulacji JD 2451800.5 (2000-09-13).

Warunki początkowe dla planet zaburzających i Księżyca pochodzą z efemeryd planet i Księżyca Jet Propulsion Laboratory JPL DE405/406 (Standish, 1998). W dalszej kolejności równania ruchu planet były całkowane numerycznie.

3.3 Obliczenia i wstępna selekcja orbit

W związku z ograniczeniami technicznymi pakietu SWIFT (maksimum 1000 małych ciał) każdą z podpopulacji (Apollo, Amora i Ateny) poddano osobnym symulacjom numerycznym, w których całkowano równania ruchu w okresie 100 lat przy zastosowaniu modelu MB i MZK. Przedział czasu 100 lat okazał się wystarczający do wykrycia wrażliwości wyników na zmianę modelu dynamicznego. Następnie, wyniki zostały porównane poprzez oszacowanie absolutnej różnicy w położeniach $|\vec{\Delta r}| = |\vec{r}_{MB} - \vec{r}_{MZK}|$, gdzie: $\vec{r}_{MB}$–położenie ciała uzyskane za pomocą modelu MB, $\vec{r}_{MZK}$–położenie ciała uzyskane za pomocą modelu MZK.

W dalszej kolejności wyselekcjonowane zostały orbity „ciekawe" pod względem dynamicznym. 13 planetek (3 Ateny i 10 Apollo) wykazało różnicę w położeniach większą, niż $10^{-2} AU$ po 100 latach. Spośród planetoid typu Amora tylko 13 miało orbity, dla których odnotowano różnicę położeń niewiele ponad $10^{-4} AU$. Jako najbardziej interesujące do dalszej analizy wybrano 7 orbit ciał z grupy Apollo, o końcowych wartościach $|\vec{\Delta r}|$ większych, niż $0.1 AU$. Oprócz obiektu 1996 GF17 odnotowują one ciasne zbliżenia do



Rysunek 3.1: Histogram wartości $|\vec{\Delta r}|$ dla 1083 planetoid po 100 latach. Wartość $|\vec{\Delta r}|$ ze względu na skalę ograniczono do zakresu $0 \div 10^{-4} AU$.

układu Ziemia–Księżyc w ciągu najbliższych 100 lat. Lista tych siedmiu obiektów jest wyszczególniona na początku Tab. 3.1. Histogram pozostałych wartości $|\vec{\Delta r}|$ przedstawia Rys. 3.1.

Następnym krokiem było dokładne przeanalizowanie na wybranych 7 orbitach zmian w położeniach, półosi wielkiej a i mimośrodzie e przy zastosowaniu poszczególnych modeli dynamicznych ($|\vec{\Delta r}|$, $|\Delta a| = |a_{MB} - a_{MZK}|$, $|\Delta e| = |e_{MB} - e_{MZK}|$). Wartości tych zmian można prześledzić bardziej szczegółowo na stronach 49 – 62. Nagłe zmiany tych parametrów są bardzo często powiązane z ciasnymi zbliżeniami planetki do układu Ziemia–Księżyc. Niektóre z wymienionych obiektów odnotowują w swoim ruchu także zbliżenia do innych planet (przykładem jest 1996 GF17, której ruch jest zdominowany przez zbliżenia do Wenus).

3.4 Wyniki

3.4.1 Zbliżenia planetoid do układu Ziemia–Księżyc

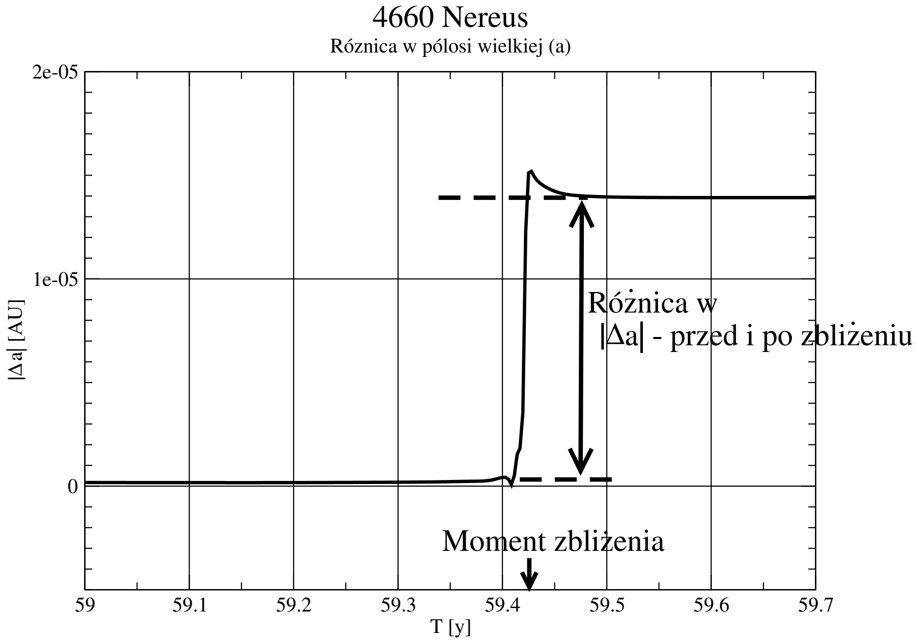
Zmiana modelu dynamicznego (z MB na MZK) przy całkowaniu równań ruchu wyselekcjonowanych 7 planetoid powoduje znaczącą różnicę w wynikach. Otrzymujemy wówczas zupełnie inne położenie ciała na orbicie. „Skok” różnicy w położeniach lub elementach orbitalnych zazwyczaj następuje przy

Tablica 3.1: Elementy orbitalne 26 ciał testowych najbardziej „wrażliwych" na zastosowanie modelu MZK (epoka oskulacji = 2451800.5). Największe wartości ($|\Delta r| > 10^{-1} AU$ po 100 latach) odnotowano dla 7 planetek typu Apollo, wyselekcjonowanych do bardziej szczegółowych obliczeń.

Obiekt	M	ω	Ω	i	e	a
Planetki typu Apollo ($\lvert\Delta r\rvert > 10^{-1} AU$)						
4581 Asclepius	101.215427	255.084739	180.521441	4.909830	0.35681206	1.02180089
4660 Nereus	95.234694	157.922770	314.752034	1.423832	0.36024680	1.48963990
1991 VG	132.707601	24.530938	73.965448	1.445878	0.04913300	1.02691827
1993 KA	87.918172	341.940491	235.877686	6.044502	0.19761648	1.25541684
1995 UB	15.457011	112.305279	204.276409	8.971842	0.41204103	1.40022604
1996 GF17	288.211569	344.528498	29.698983	17.153012	0.29564015	1.02809749
1997WQ23	106.918550	296.238442	56.094954	2.452544	0.49442120	1.73605995
Planetki typu Apollo ($10^{-2} AU < \lvert\Delta r\rvert < 10^{-1} AU$)						
1997 XF11	306.037278	102.472173	214.116699	4.095382	0.48356139	1.44178644
1998 KY26	212.571599	209.167862	84.452829	1.481157	0.20147964	1.23195728
1999 AN10	293.808101	268.292864	314.508257	39.931170	0.56217142	1.45869958
Planetki typu Amora ($10^{-4} AU < \lvert\Delta r\rvert < 10^{-2} AU$)						
1943 Anteros	359.730780	338.233148	246.431439	8.705398	0.25603801	1.43009639
2061 Anza	259.101582	156.421310	207.787609	3.766109	0.53666768	2.26585546
3122 Florence	273.485204	27.591314	336.211607	22.172158	0.42257044	1.76884029
1985 WA	38.254474	351.153960	43.653306	9.803336	0.60698519	2.83133079
1993 BD3	241.985593	168.604349	313.882710	0.884247	0.37307807	1.62952920
1994 LY	105.474443	202.655506	141.219774	17.781569	0.44420146	1.89647027
1995 LA	249.414212	17.478268	247.771648	8.699697	0.52042192	2.12504151
1996 MQ	44.121661	28.471178	262.908082	3.476484	0.57132465	2.40181502
1998 KJ17	296.910315	163.973049	76.100347	9.157153	0.48374014	1.98681828
1998 MX5	150.643549	55.698717	266.611479	9.707346	0.61153773	2.91745761
1999 RJ33	242.429725	27.210965	343.226757	18.505500	0.18860085	1.25378820
1999 VG22	90.570138	222.469976	271.500536	2.852951	0.32974179	1.64692366
2000 CK59	128.856570	341.091691	139.430174	5.689946	0.31254518	1.47918436
Planetki typu Ateny ($10^{-2} AU < \lvert\Delta r\rvert < 10^{-1} AU$)						
2340 Hathor	6.372981	39.814022	211.629521	5.850352	0.45001337	0.84374811
1989 UQ	5.721623	14.925192	178.420051	1.291061	0.26466592	0.91481407
2000 BM19	125.236260	247.254828	70.751879	6.891492	0.35840944	0.74127403

ciasnym zbliżeniu do Ziemi i Księżyca; różnica ta kumuluje się w czasie i w rezultacie otrzymujemy ciało na nieco innej orbicie i znaczne różniących się współrzędnych (różnice nawet rzędu 10^{-1} AU po 100 latach).

W Tab. 3.2 zaprezentowano parametry najciaśniejszych zbliżeń: minimalną odległość do Ziemi i Księżyca, prędkość względem Ziemi oraz przyrosty różnic w położeniach, półosi wielkiej i mimośrodzie (zmiany w $|\vec{\Delta r}|$, $|\Delta a|$ i $|\Delta e|$). Te ostanie trzy wielkości w tabeli zostały obliczone poprzez analizę $|\vec{\Delta r}|$, $|\Delta a|$, $|\Delta e|$ przed i po zbliżeniu; następnie wyznaczano różnicę. Sposób określania tych wielkości na przykładzie wartości $|\Delta a|$ dla Nereusa ilustruje Rys. 3.2. Zmiany tych wielkości są również widoczne na rysunkach opisanych w następnym podrozdziale.



Rysunek 3.2: Wartość $|\vec{\Delta a}|$ dla planetki 4660 Nereus przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK w momencie wybranego zbliżenia do Ziemi. Na rysunku przedstawiono sposób określania różnicy w $|\vec{\Delta a}|$.

3.4.2 Indywidualne rezultaty dla każdego z obiektów

(4581) Asclepius

Dla pierwszego ciała, planetki 4581 Asclepius, wpływ zbliżeń do Ziemi na przyrost różnicy w otrzymanych położeniach jest wyraźnie zauważalny (Rys. 3.3–3.6). Zarówno położenia, jak i półoś wielka oraz mimośród doznają znaczących zmian skorelowanych w czasie z ciasnymi zbliżeniami widocznymi na krzywych odległości. Odnotowano jedno zbliżenie do Ziemi (mniej więcej w połowie badanego przedziału czasu – w 2051 r.), dla którego zmiana modelu powoduje różnicę w położeniach równą 0.007 odległości Ziemia-Księżyc (około 3000 km). Minimalne odległości do Ziemi i Księżyca przy tym zbliżeniu wynoszą poniżej 4 jednostek *EMU*. Prędkość względem Ziemi jest większa w porównaniu z innymi przykładami w Tab. 3.2.

(4660) Nereus

Na ruch obiektu 4660 Nereus (Rys. 3.3–3.10) znacząco wpływają dwa bliskie spotkania z Ziemią i Księżycem. Momenty tych zbliżeń przypadają na lata 2060 i 2071. Przy pierwszym z tych zbliżeń planetoida mija Księżyc w

Tablica 3.2: Parametry zbliżeń do Ziemi 7 wybranych planetoid grupy Apollo

Obiekt	Min. odległość [AU]		$V_{wzgl.}$[km/s]	Zmiana w.	Zmiana w.	Zmiana w.
	do Ziemi	do Księżyca	wzgl. Ziemi	$\lvert\vec{\Delta r}\rvert$[AU]	$\lvert\Delta a\rvert$[AU]	$\lvert\Delta e\rvert$
4581 Asclepius	0.01210	0.01011	11.05	1.97E-5	1.55E-5	1.32E-7
4660 Nereus	0.00802	0.00631	6.33	9.06E-5	1.37E-5	5.03E-6
4660 Nereus	0.01959	0.01968	5.67	8.20E-4	1.58E-4	6.21E-6
1991VG	0.04721	0.04652	2.05	8.80E-6	1.60E-6	1.08E-6
1991VG	0.06062	0.05992	1.49	9.05E-5	1.62E-5	1.01E-5
1991VG	0.06465	0.06231	1.50	1.73E-4	1.11E-4	6.70E-5
1991VG	0.06351	0.06120	1.52	1.41E-3	6.53E-4	4.98E-4
1993KA	0.00381	0.00308	4.61	6.72E-4	9.08E-5	4.76E-5
1995UB	0.00461	0.00288	12.35	6.57E-4	7.91E-4	2.10E-5
1997WQ23	0.02959	0.02891	12.02	9.89E-6	1.06E-6	2.45E-7
1997WQ23	0.01446	0.01632	10.91	1.03E-6	2.04E-6	9.38E-7
1997WQ23	0.00976	0.01026	11.21	5.52E-4	8.97E-5	2.01E-5

odległości zaledwie 2.45 EMU. Zbliżenia powodują znaczące konsekwencje w przyroście wartości $|\vec{\Delta r}|$ wynoszące w przybliżeniu 13500 i 122000 km. W obu przypadkach prędkość względem Ziemi wynosi ok. 6 km/s.

1991 VG

Trzecia planetoida, 1991 VG (Rys. 3.11–3.14) zbliża się do Ziemi okresowo. Wspomniany efekt dużych różnic związany jest z małą prędkością względną planetoidy w czasie zbliżeń (Tab. 3.2). Zachodzące regularnie zbliżenia wynikają z przyczyn geometrycznych – specyficznego położenia dwóch orbit w przestrzeni. 1991 VG nie zbliża się do Ziemi i Księżyca bliżej, niż 18 EMU i przy każdym zbliżeniu mija układ z prędkością rzędu 1–2 km/s względem Ziemi. Orbita tej planetoidy została opisana przez Yeomansa i Chodasa (1994) jako przykład trajektorii zaburzanej przez Księżyc.

Jeśli zaniedbamy w przypadku takiej orbity obecność Księżyca – już po czasie całkowania ok. 50 lat otrzymamy położenie ciała różniące się o setki tysięcy kilometrów (Rys. 3.12).

1993 KA

Dla planetoidy 1993 KA najważniejszą rolę odgrywa jedno zbliżenie do Ziemi (2038 r.) na odległość zaledwie 0.00381 AU (0.00308 AU do Księżyca – patrz Tab. 3.2). W skali rozmiarów układu Ziemia-Księżyc minimalne odległości wynoszą 1.5 i 1.2 EMU. Zbliżenie to dobrze obrazuje Rys. 3.15, konsekwencje są widoczne na Rys. 3.16, 3.17 i 3.18.

1995 UB

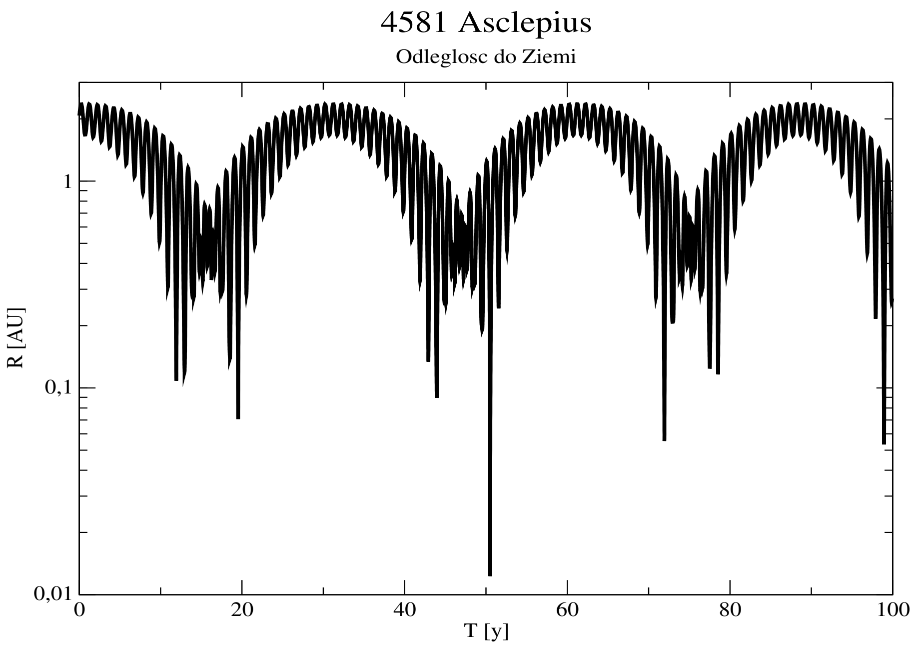
Bardzo podobną sytuację, jak poprzednio, dla obiektu 1995 UB ukazują Rysunki 3.19–3.22. Minimalna odległość tej planetki w czasie zbliżenia jest nieco mniejsza, niż w poprzednim przypadku. Prędkość względem Ziemi wynosi ponad 12 km/s (względem Księżyca ta prędkość jest podobnego rzędu, bo ruch orbitalny Księżyca odbywa się z prędkością ok. 1 km/s). Przy tak małych odległościach, poza prędkością ważną rolę odgrywa także geometria przejścia planetki w pobliżu Ziemi i Księżyca.

1996 GF17

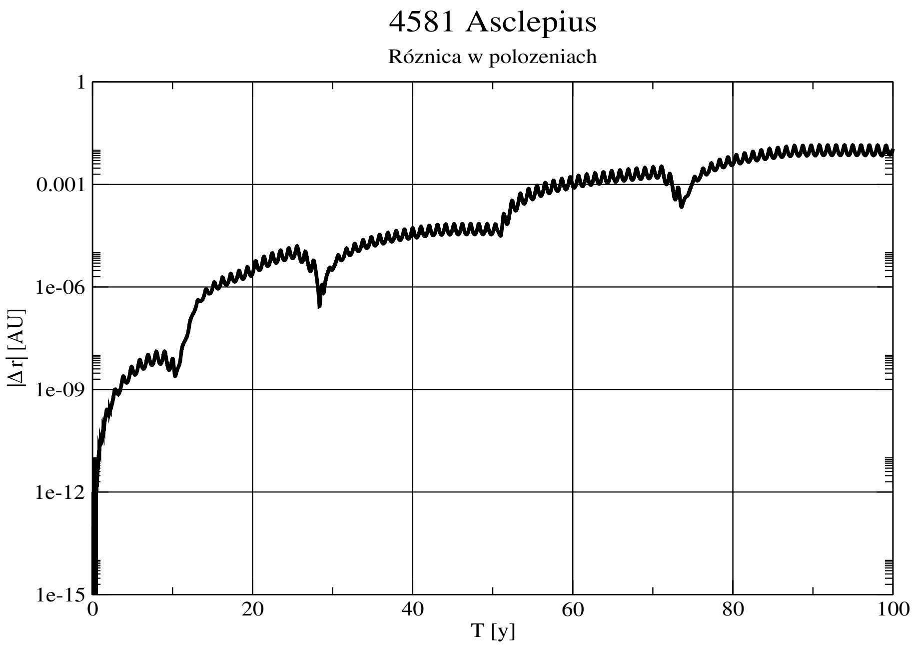
Szósty badany obiekt, 1996 GF17 wykazuje nieco mniejsze zmiany elementów, które nie są związane bezpośrednio ze zbliżeniami do układu Ziemia–Księżyc. Ciało to zbliża się w swoim ruchu do Wenus bliżej, niż do Ziemi (krzywe odległości na Rys. 3.23 i 3.24). Pośredni wpływ zmiany modelu jest niewielki (Rys. 3.25 i 3.26). Całkując ruch tego obiektu przez 50-60 lat przy użyciu modelu MB i MZK otrzymamy różnice w położeniach rzędu 100 km, ale na dłuższym okresie czasu te różnice mogą się kumulować. Mamy tu zatem również do czynienia z perturbacjami księżycowymi, ale nie działającymi w sposób bezpośredni (Księżyc zaburza planetę Wenus).

1997 WQ23

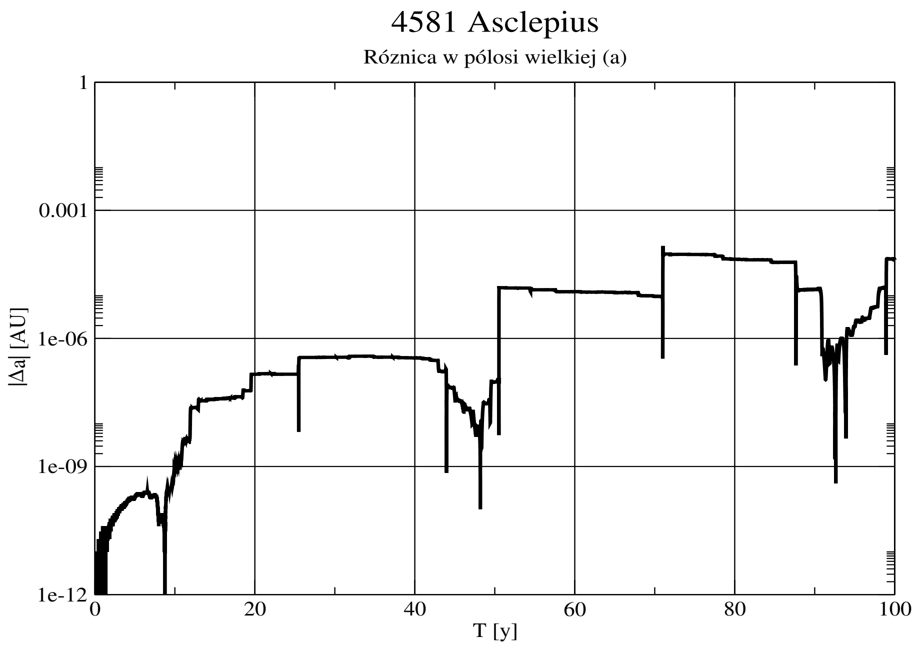
Ostatni z wyselekcjonowanych obiektów, 1997 WQ23 zbliża się do Ziemi 3 razy z zauważalnym efektem zmian w r, a i e, a więc jego orbita również jest „wrażliwa” na zmianę modelu dynamicznego z MB do MZK. Zmiany te obrazują Rys. 3.27 – 3.30. Zbliżenia te zachodzą w odległościach ok. 0.01–0.03AU z prędkością względną powyżej 10 km/s. Różnice wynikające z zastosowania modelu MZK przy każdym zbliżeniu do układu Ziemi-Księżyc stopniowo się pogłębiają. Po 100 latach całkowania $|\Delta r| = 0.08AU$.



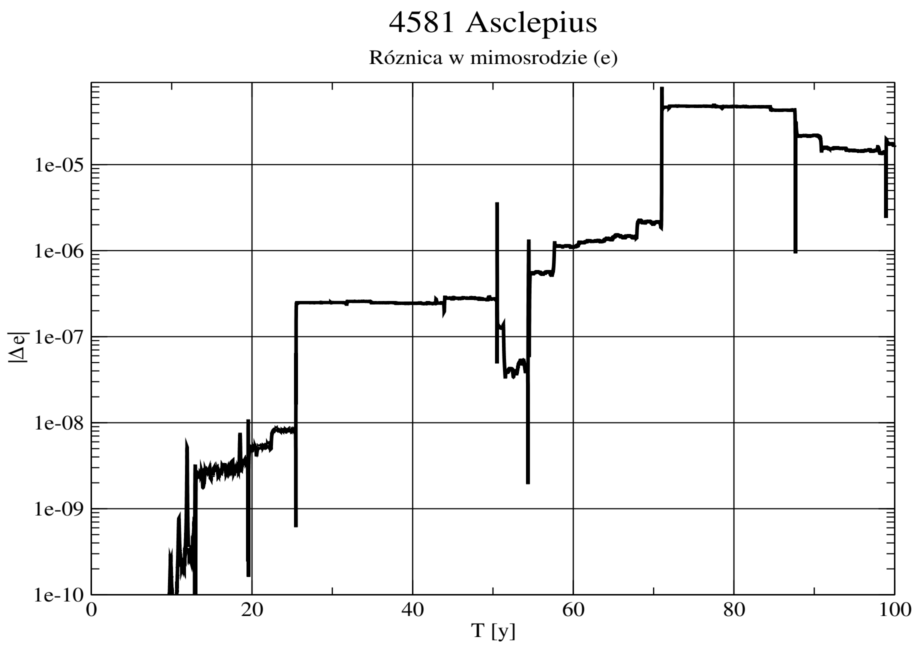
Rysunek 3.3: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 4581 Asclepius.



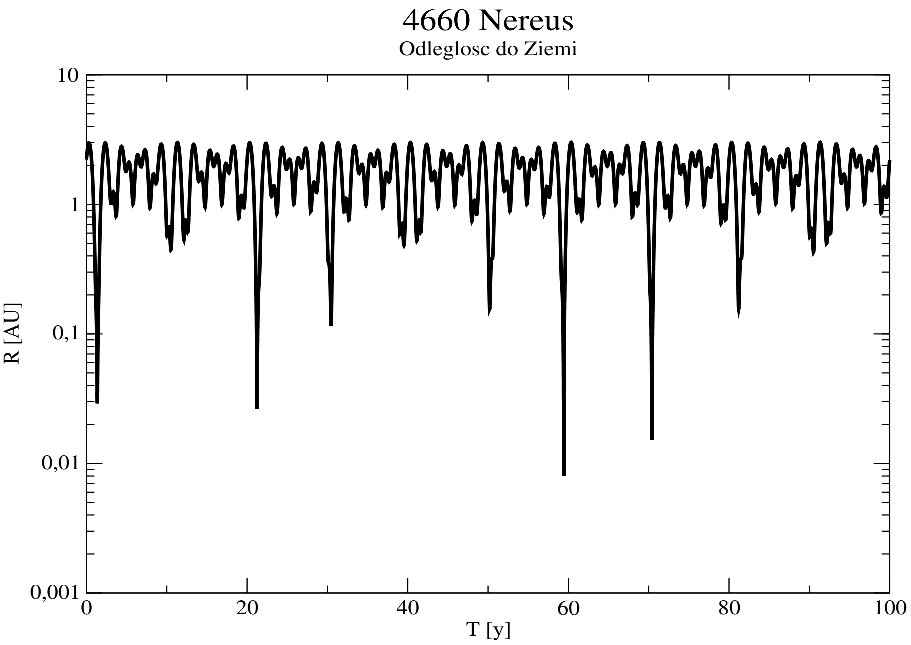
Rysunek 3.4: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 4581 Asclepius przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



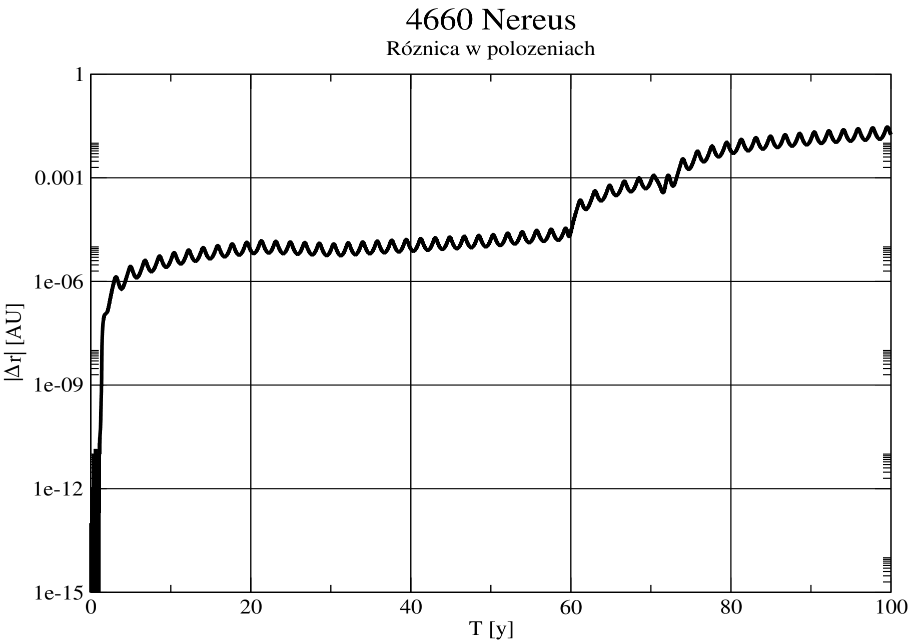
Rysunek 3.5: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 4581 Asclepius na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



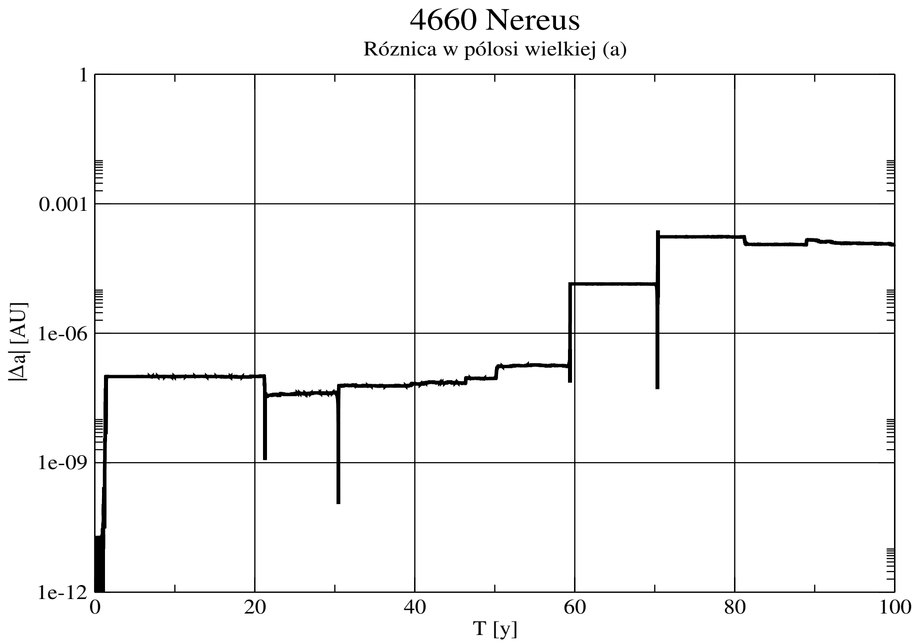
Rysunek 3.6: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 4581 Asclepius.



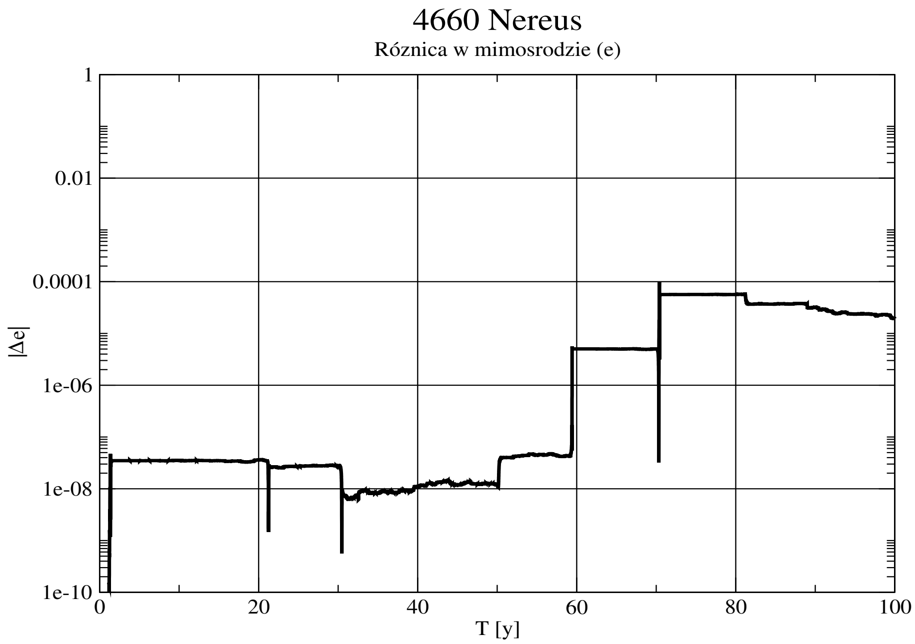
Rysunek 3.7: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 4660 Nereus.



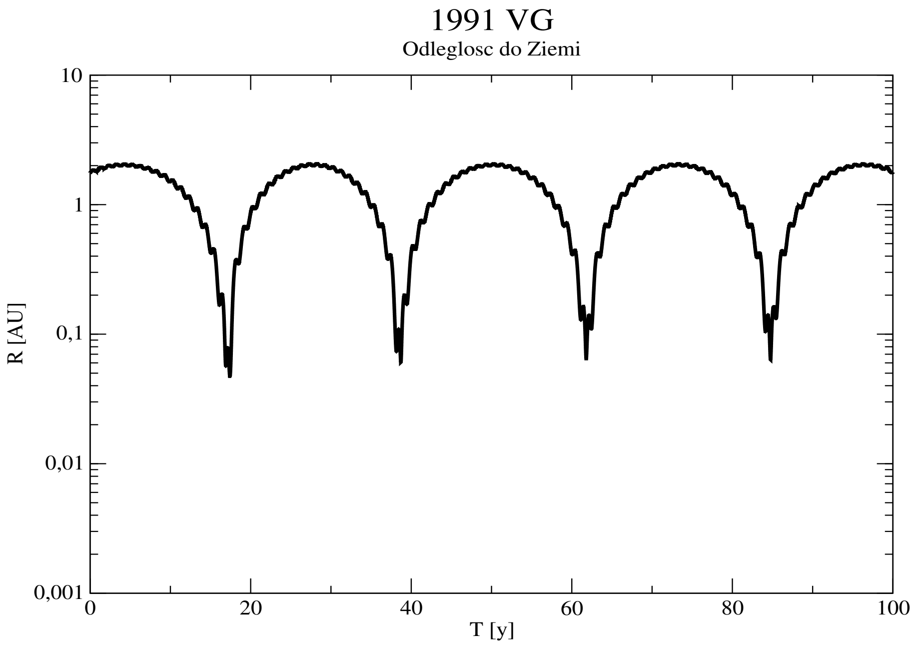
Rysunek 3.8: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 4660 Nereus przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



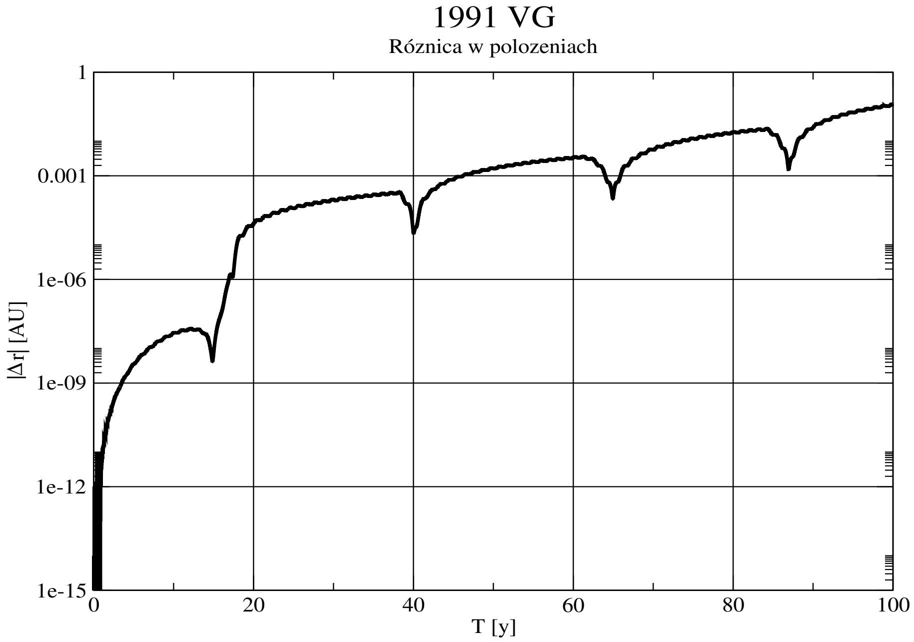
Rysunek 3.9: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 4660 Nereus na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



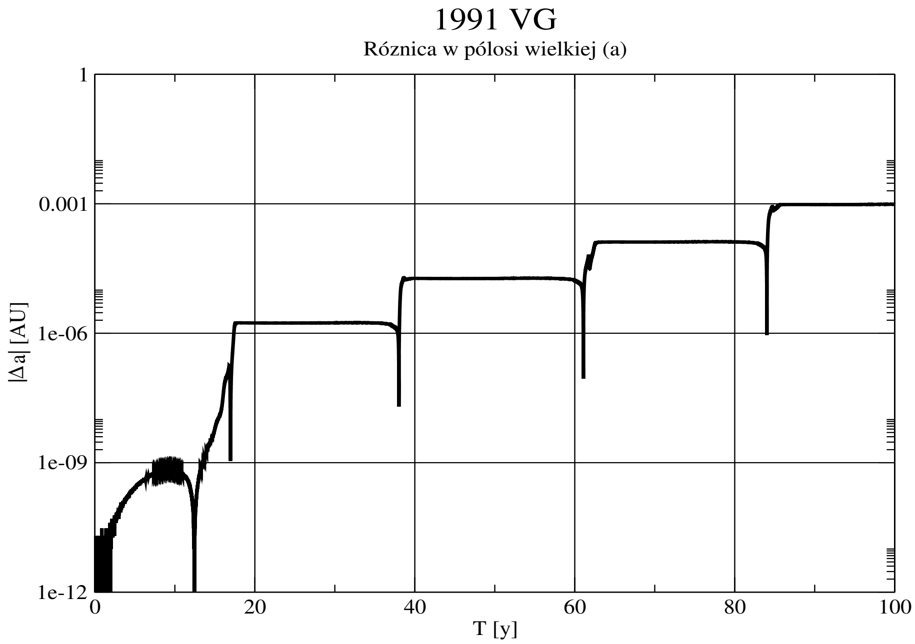
Rysunek 3.10: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 4660 Nereus.



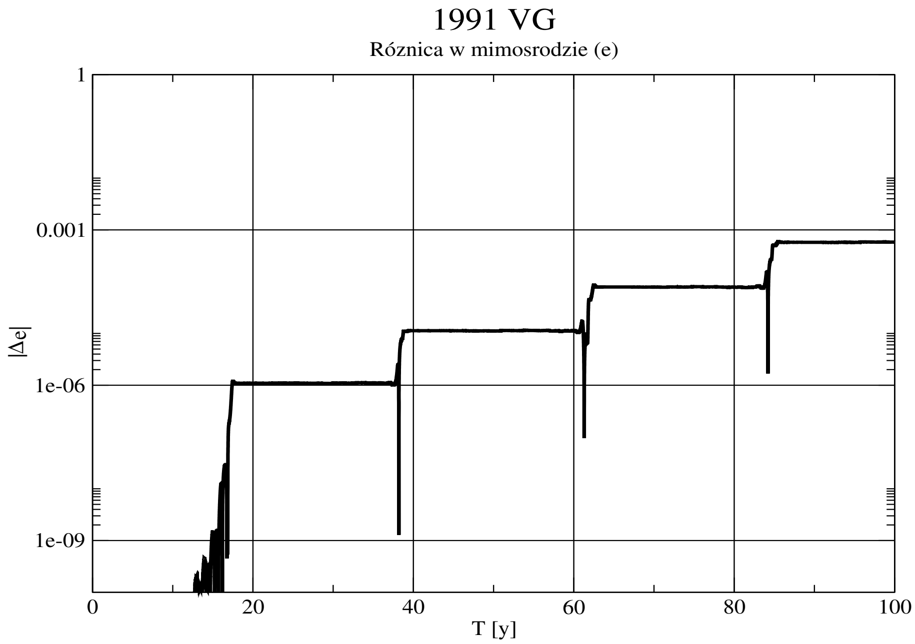
Rysunek 3.11: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 1991 VG.



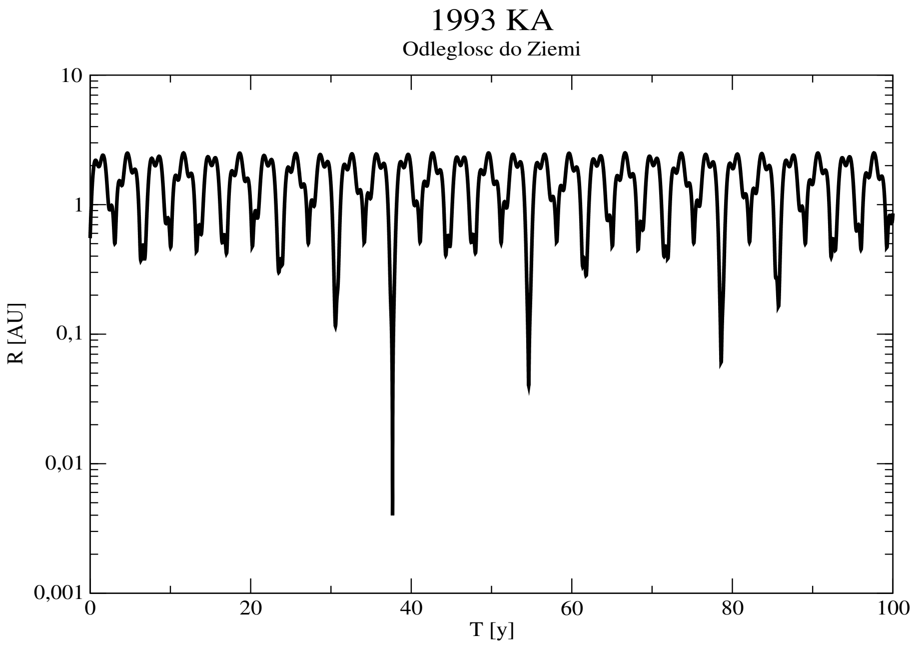
Rysunek 3.12: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1991 VG przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



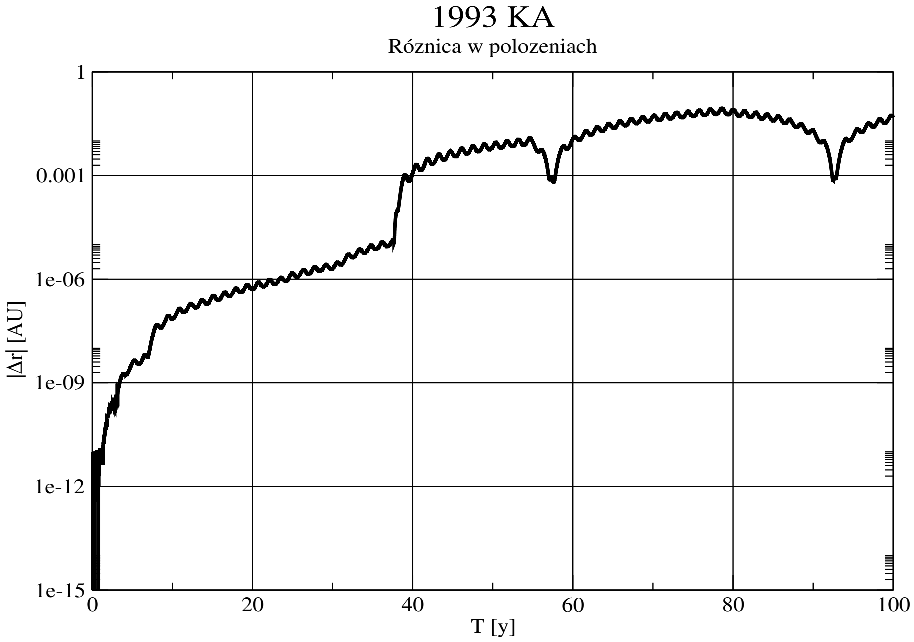
Rysunek 3.13: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1991 VG na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



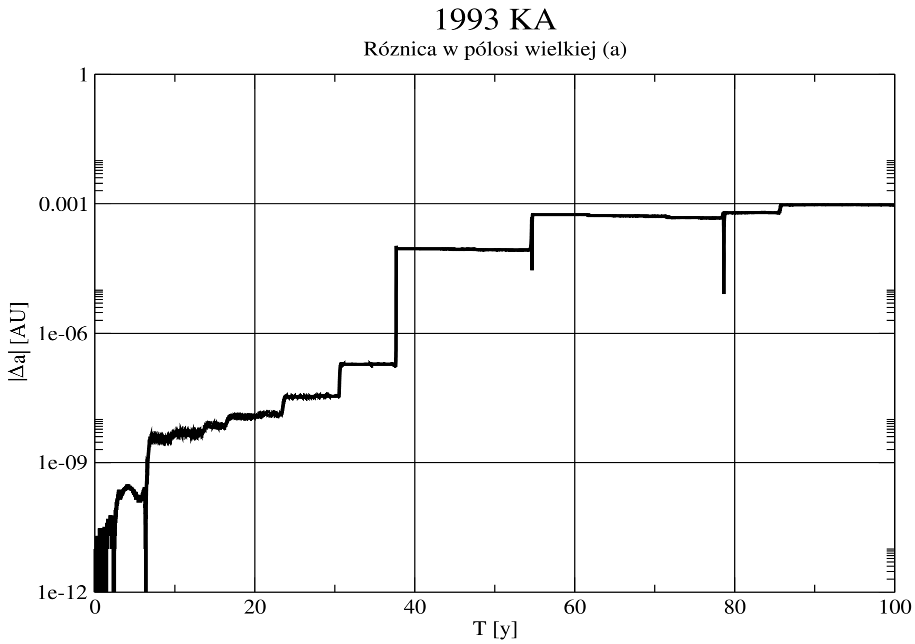
Rysunek 3.14: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 1991 VG.



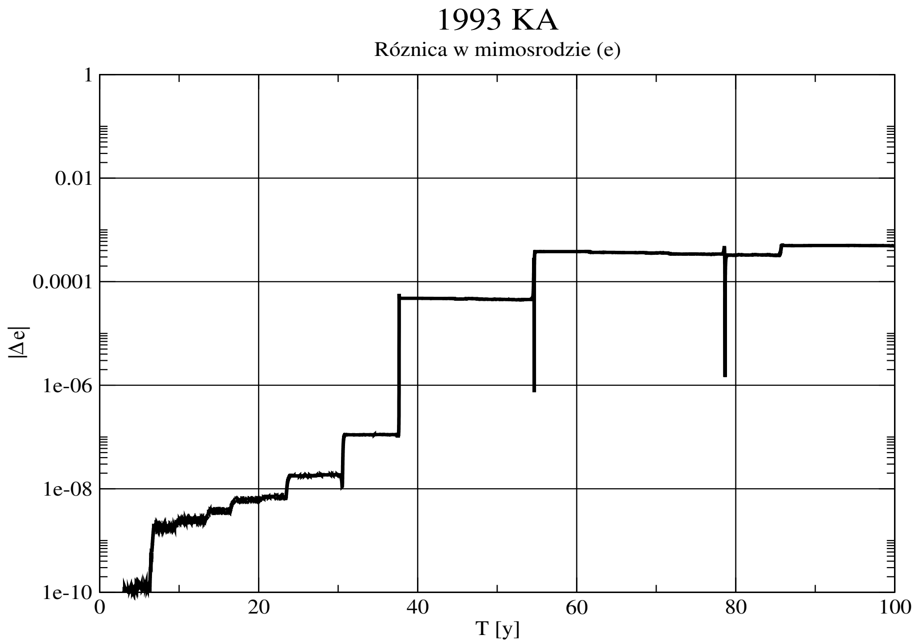
Rysunek 3.15: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 1993 KA.



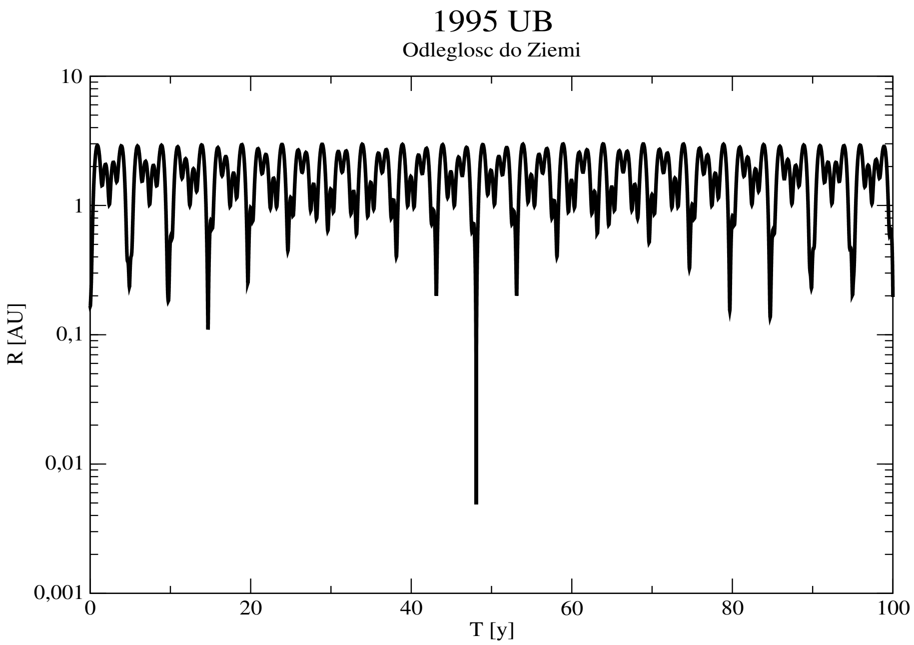
Rysunek 3.16: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1993 KA przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



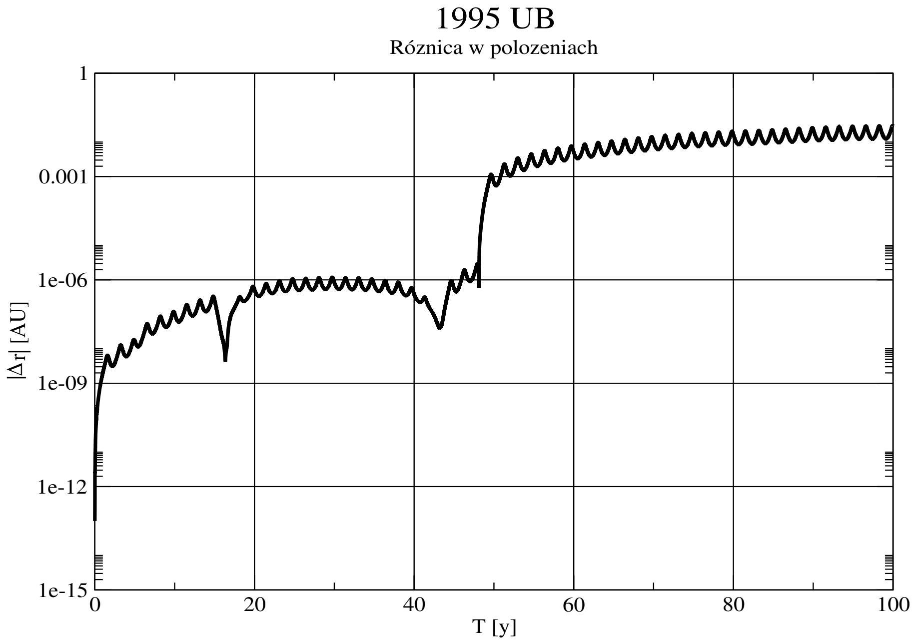
Rysunek 3.17: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1993 KA na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



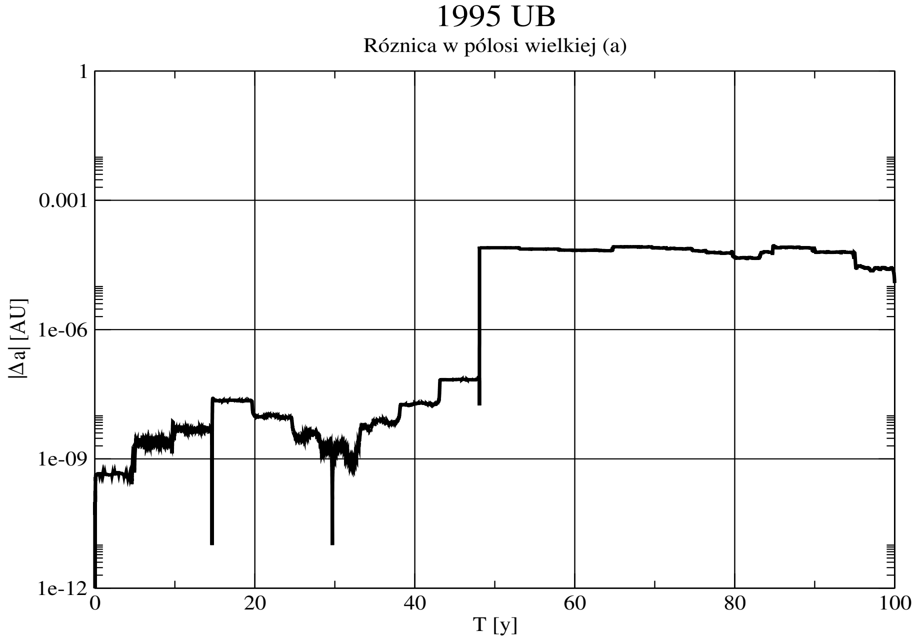
Rysunek 3.18: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 1993 KA.



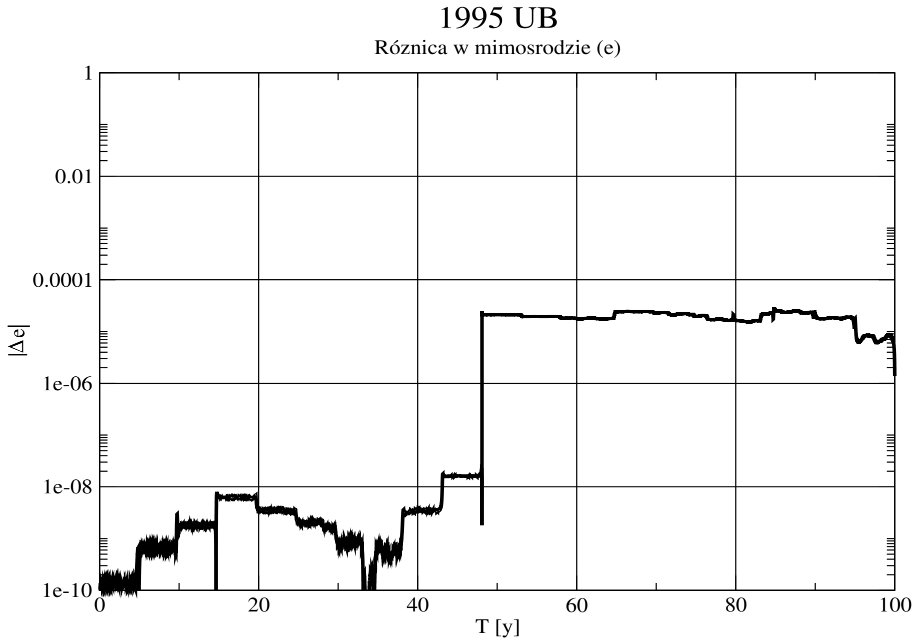
Rysunek 3.19: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 1995 UB.



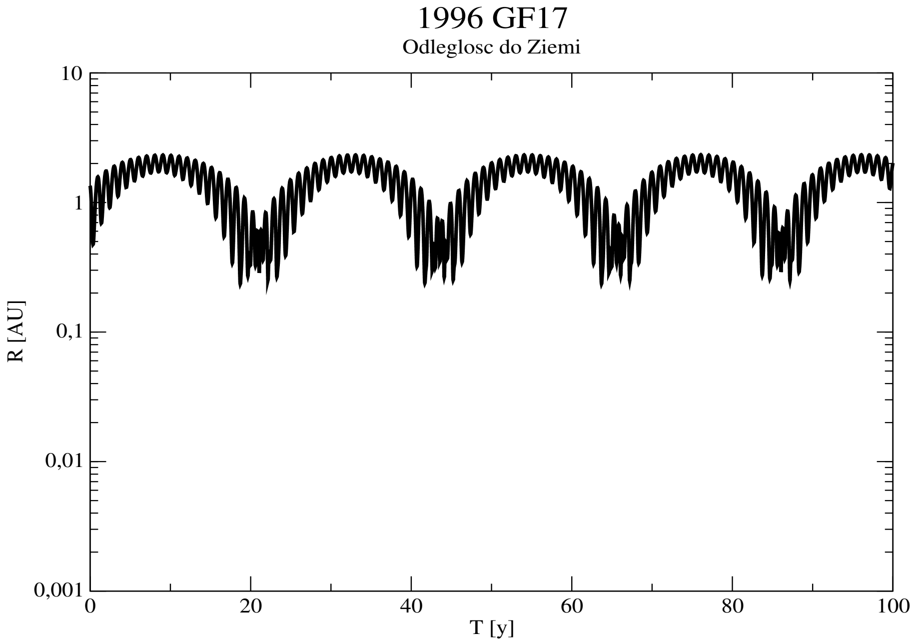
Rysunek 3.20: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1995 UB przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



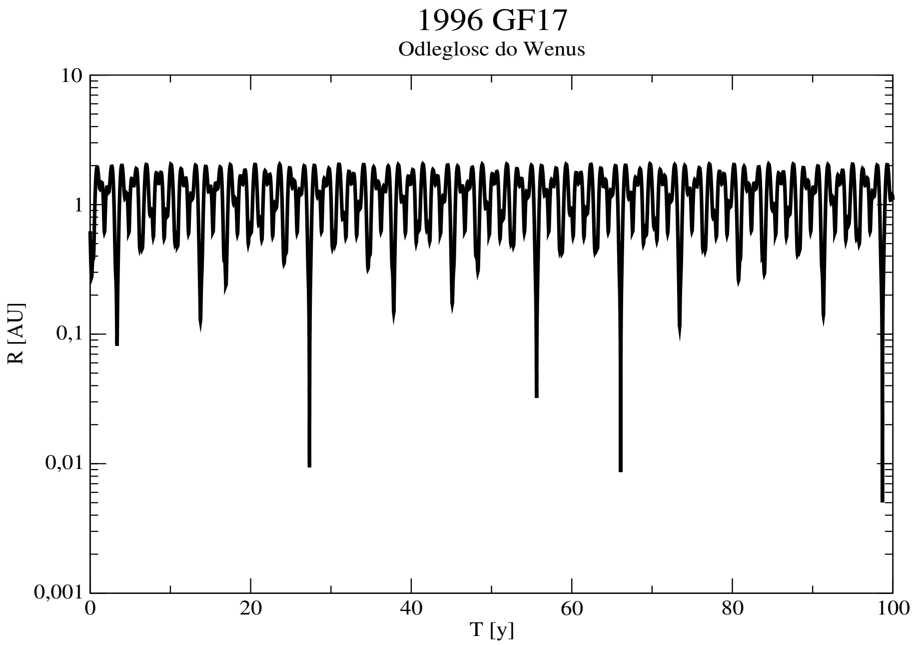
Rysunek 3.21: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1995 UB na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



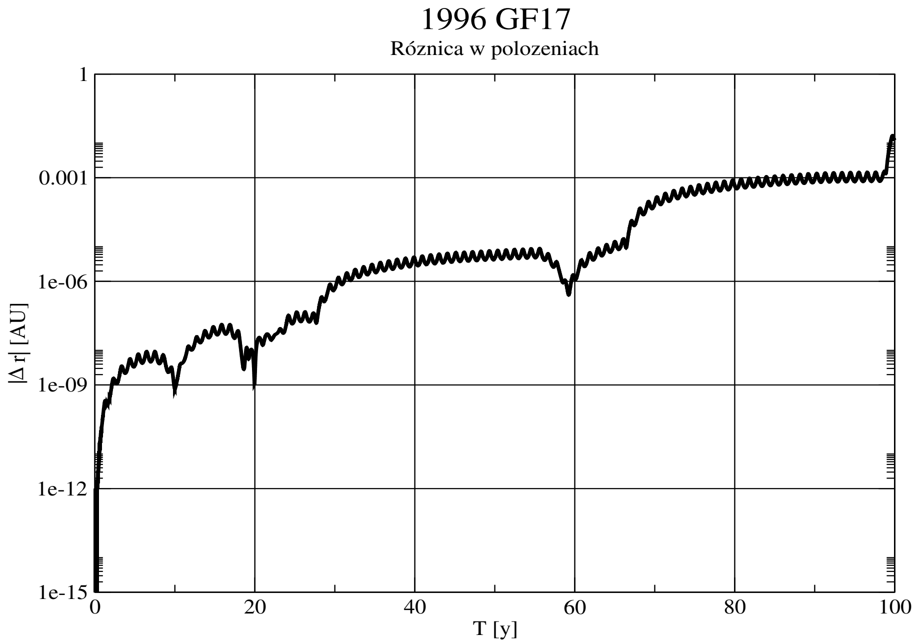
Rysunek 3.22: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 1995 UB.



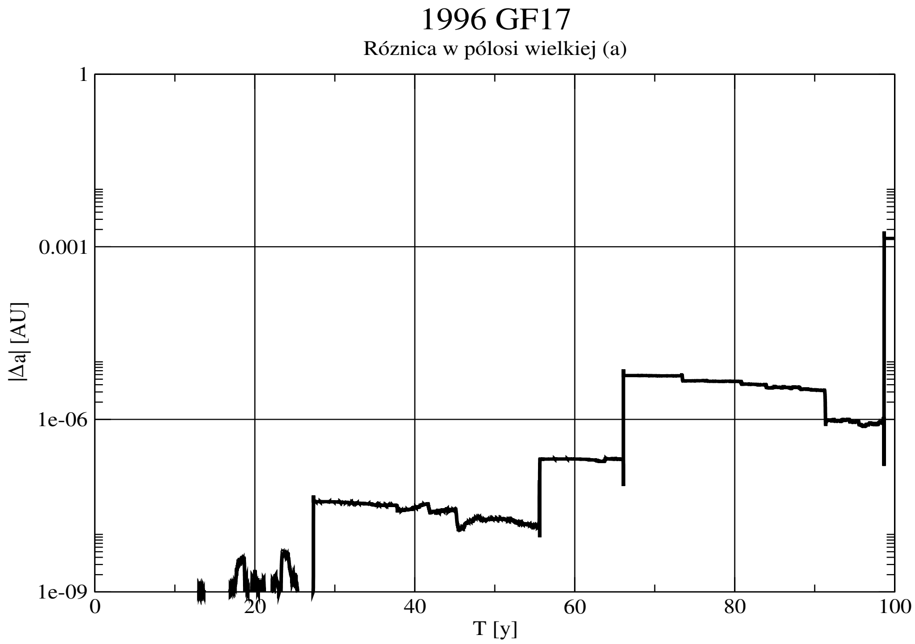
Rysunek 3.23: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 1996 GF17.



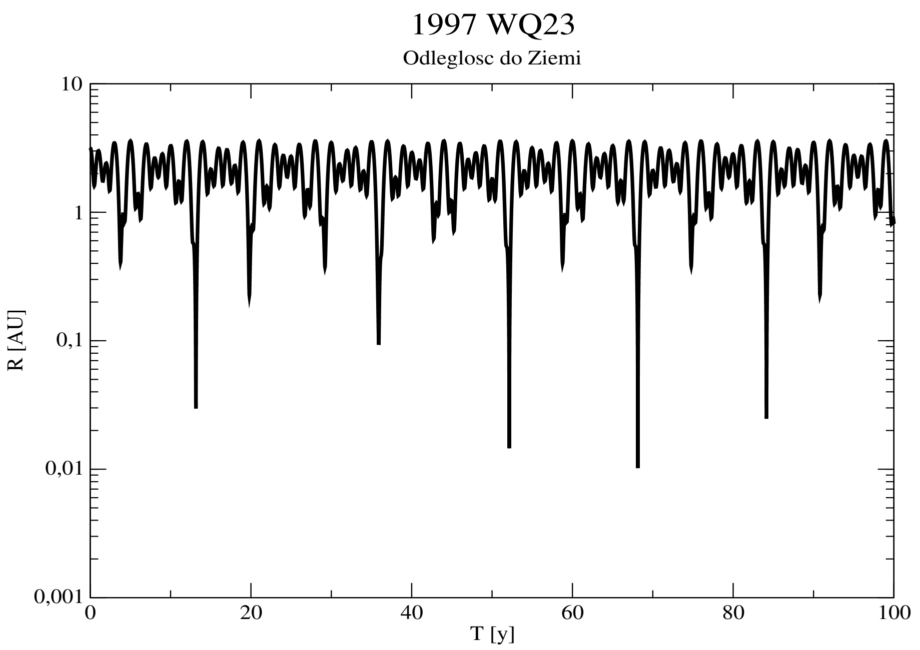
Rysunek 3.24: Zbliżenia do Wenus (krzywa odległości) planetoidy 1996 GF17.



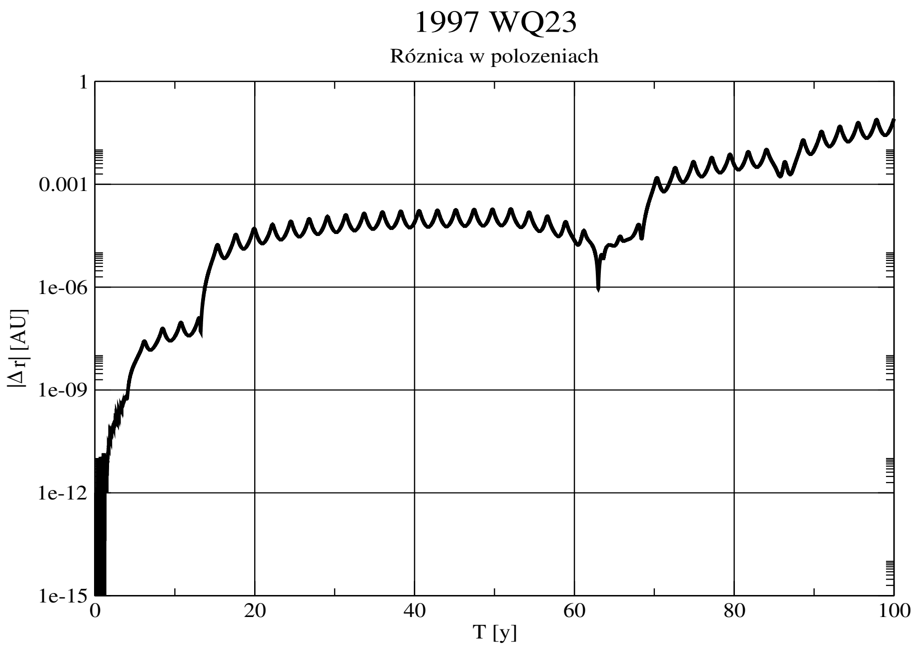
Rysunek 3.25: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach planetki 1996 GF17 na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



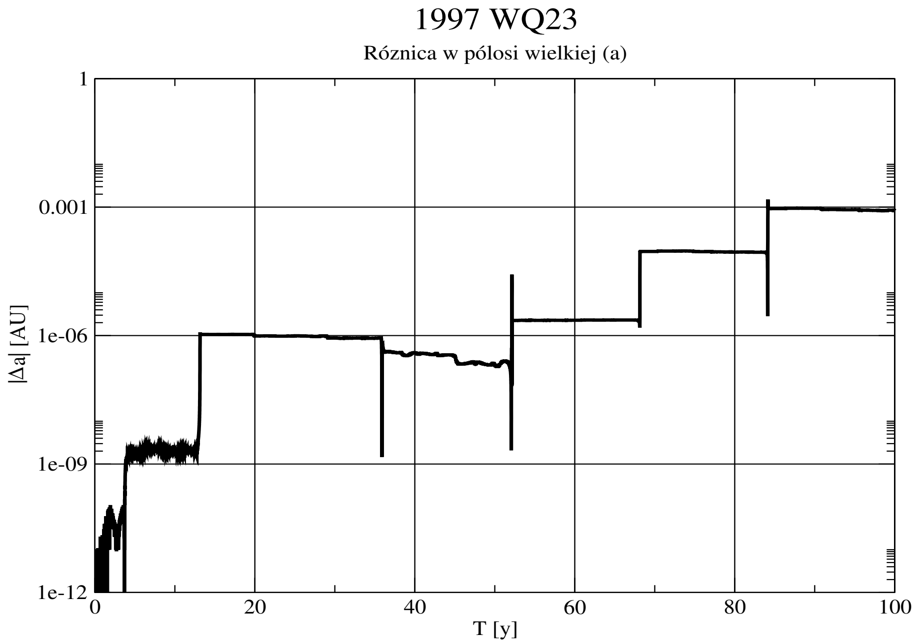
Rysunek 3.26: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1996 GF17.



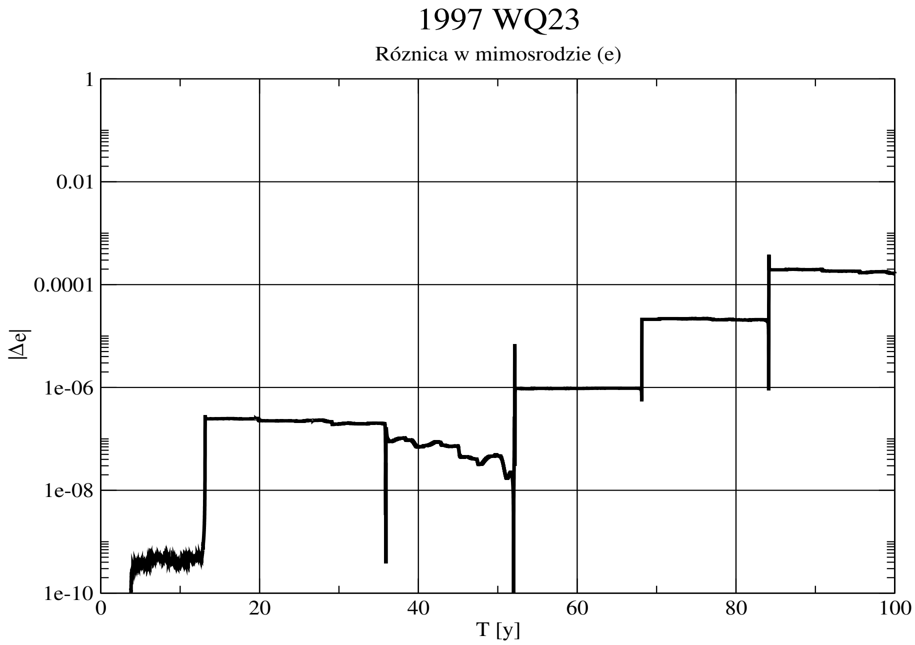
Rysunek 3.27: Zbliżenia do Ziemi (krzywa odległości) planetoidy 1997 WQ23



Rysunek 3.28: Absolutna różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1997 WQ23 przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i MZK.



Rysunek 3.29: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1997 WQ23 na skutek zastosowania różnych modeli dynamicznych układu Ziemia–Księżyc (MB i MZK).



Rysunek 3.30: Absolutne różnice w mimośrodzie ($|\Delta e|$) planetki 1997 WQ23.

3.5 Wnioski

Zbliżenia do Ziemi siedmiu wybranych obiektów klasy NEA zachodzą z niewielkimi prędkościami względnymi (maksymalnie 12.35 km/s) oraz w niewielkich odległościach od Ziemi ($0.00381 \div 0.06465$ AU) i od Księżyca ($0.00288 \div 0.0631$ AU). Odległości te są porównywalnego rzędu, co średnia odległość Ziemia–Księżyc: $EMU \simeq 0.00257$ AU. Większość planetoid NEA mija Ziemię z większymi prędkościami względnymi, więc omawiany efekt jest zauważalny tylko dla ich małej podpopulacji. Dyskusja związku prędkości względnej małego ciała kolidującego z Ziemią a udziałem perturbacji księżycowych w odchyleniu jego trajektorii została szerzej omówiona przez Domingos (2000). Zaprezentowane tam wyniki symulacji numerycznych oraz rozważań opartych o uproszczony model geometryczny zjawiska wskazują na największe znaczenie perturbacji od Księżyca dla prędkości względnych zbliżenia $1 \div 5$ km/s. Rezultaty te są w częściowej zgodności z wynikami zaprezentowanymi wyżej, chociaż w większości dotyczą one nieco innego problemu (udział Księżyca w potencjalnej kolizji planetoidy z Ziemią). Przy odległościach rzędu kilku jednostek EMU w czasie minimalnego zbliżenia i prędkościach względnych rzędu kilku km/s wybór odpowiedniego modelu dynamicznego staje się bardzo istotny.

Prezentowane różnice zgadzają się co do rzędu wielkości z opublikowanymi przez Todorovic–Juchniewicz (1985) maksymalnymi oszacowaniami wartości $|\vec{\Delta r}|$. Wyniki potwierdzają też fakt, że użycie modelu MZK zamiast MB może owocować znacznymi różnicami w wynikach w przedziałach czasu 10 – 100 lat.

Z kolei dla większości planetoid NEA, wprowadzenie rozdzielonego Księżyca nie jest konieczne. Jeśli planetka nie zbliża się do Ziemi na odległości rzędu kilku jednostek EMU, używanie modelu MZK tylko niepotrzebnie wydłuża i komplikuje obliczenia. W tym wypadku model MB powinien w zupełności wystarczyć. Ponieważ ruch małych ciał typu NEA często ma charakter trudno przewidywalny, należy liczyć się z ryzykiem wystąpienia przypadków szczególnych.

Z drugiej strony, model MB z pewnością nie będzie użyteczny we współczesnych badaniach zagrożenia Ziemi przez kolizję z planetoidą ani w planowaniu precyzyjnych efemeryd do celów misji kosmicznych. Zastosowania te wymagają znacznie dokładniejszego przewidywania trajektorii małych ciał.

Przy wyborze odpowiedniego modelu dynamicznego do zagadnienia ruchu planetoidy NEA należy zatem zwrócić uwagę, czy w jej ruchu zachodzą zbliżenia do Ziemi i Księżyca na odległości porównywalne z jednostką EMU i na prędkość względną tych zbliżeń. W skrajnych przypadkach, jak było np. dla planetoidy 1996 GF17, ważną rolę mogą także odegrać ciasne zbliżenia małego ciała do pobliskiej planety, jak Wenus (albo Mars). Całkowanie równań ruchu sąsiednich planet jest dodatkowo uwarunkowane obecnością rozdzielonej Ziemi i Księżyca. Dlatego z pozoru nieznaczna różnica w położeniach planety Wenus może powodować zmiany w wynikach badań dynamiki NEA.

Używanie modelu najbardziej zbliżonego do rzeczywistości, w którym uwzględniany jest wpływ Księżyca może być w szczególnych przypadkach kluczowe znaczenie. Powyżej zaprezentowane wyniki potwierdzają fakt, że oddziaływanie grawitacyjne Księżyca może znacząco wpłynąć na orbitę planetoidy – o ile zajdzie ciasne zbliżenie z małą prędkością względną. Dlatego precyzyjne procedury przewidywania trajektorii planetoid NEA nie powinny zaniedbywać obecności Księżyca ze względu na możliwość wystąpienia takich szczególnych przypadków.

Rozdział 4

Perturbacje od największych planetoid w ruchu obiektów NEA

4.1 Wprowadzenie

Problem uwzględniania w modelach dynamicznych Układu Słonecznego planetoid o największych masach nie jest nowy. Zapotrzebowanie na efemerydy planetarne o dużej dokładności pojawiło się w związku z misjami kosmicznymi. Pomiary przeprowadzone przez misje marsjańskie, takie jak Viking 1,2 i Pathfinder potrzebowały precyzyjnej efemerydy Marsa. Na poziomie dokładności, jaki był wymagany dla Marsa (rzędu metrów), perturbacje od małych planet mają istotne znaczenie (Standish i Hellings, 1989). W efemerydzie JPL DE200 (Standish, 1990) zostały uwzględnione trzy największe planetoidy: Ceres, Pallas i Vesta. Jednak opracowanie wyników pomiarów misji marsjańskich z zadowalającą dokładnością stało się możliwe dopiero po uwzględnieniu perturbacji od 300 planetek w efemerydach JPL DE403 i późniejszych. Przykładowo, aby otrzymać pozycję Marsa z dokładnością na poziomie metrów, należy uwzględnić perturbacje od pobliskich małych ciał o masach większych, niż $10^{-11} M_{\odot}$, przy czym masy większych planetoid powinny być znane na tym samym poziomie dokładności (Krasinsky et al., 2001). Problem dokładnego wyznaczenia mas największych planetoid jest więc bardzo ważny z punktu widzenia potrzeby opracowania precyzyjnych efemeryd wewnętrznych planet układu (Hilton, 2003).

Biorąc pod uwagę dużą liczbę i różnorodność nowo odkrytych orbit NEA, warto zauważyć, że niektóre z nich mają aphelia położone poza orbitą Marsa. Orbity o odpowiednio dużych mimośrodach sięgają zatem do strefy pasa głównego. W związku z tym planetoidy NEA o najbardziej ekscentrycznych orbitach mogą być zaburzane przez najbardziej masywne planetoidy. W przypadku ciasnego zbliżenia do dużej planetoidy obiekt NEA może znacznie zmienić swoją trajektorię. Największa planetoida - Ceres, ma ok. 15.7 razy mniejszą masę, niż Pluton i ok. 78.6 razy mniejszą, niż Księżyc. Szacuje się, że jej masa stanowi 30 – 40% masy materii w pasie głównym. Kilkukrotnie mniejsze są masy Pallas i Vesty. Masa czwartej największej planetki, Hygiei jest w niemal dziesięciokrotnie mniejsza.

Perturbacje od największych planetoid nie zawsze uwzględnia się w badaniach dynamiki NEA. Dodanie tego czynnika do modelu dynamicznego może spowodować, że otrzymamy różniące się położenia, prędkości i elementy orbitalne badanego ciała.

Różnice te można oszacować ilościowo poprzez zastosowanie dwóch modeli dynamicznych dla tego samego zagadnienia (ruchu orbitalnego NEA) i porównać wyniki. Analiza wyników takiego porównania jest zamieszczona w bieżącym rozdziale pracy.

Dzięki mierzalności omówionych perturbacji, od dawna wyznacza się masy planetoid, sukcesywnie poprawiając model Układu Słonecznego. Co prawda rozszerzenie listy obecnych 300 obiektów nie zwiększy już znacząco dokładności efemerydy JPL dla planet, ale wiele z używanych mas jest wciąż wyznaczona ze zbyt małą dokładnością. Obecnie tylko około 30 planetoid ma masy wyznaczone dynamicznie, tzn. poprzez oszacowanie efektów perturbacyjnych przy zbliżeniach do innych ciał. Bardzo precyzyjnego dynamicznego wyznaczenia mas planetoid (433) Eros i (253) Mathilde dokonano dzięki misji kosmicznej NEAR (Yeomans, 1998, 1999).

Inne masy zostały wyznaczone metodami astrofizycznymi, przez określenie rozmiarów i gęstości planetoid. Masy największych planetoid są wyznaczane przede wszystkim dynamicznie ze względu na ich prawdopodobną niejednorodną gęstość i skład chemiczny. Oszacowania średniej gęstości na postawie klasyfikacji spektralnej okazują się w tych przypadkach zbyt mało dokładne (Krasinsky, 2001).

Orbity czterech największych planetoid: (1) Ceres, (2) Pallas (4) Vesta i (10) Hygiea leżą w pasie głównym pomiędzy orbitami Jowisza i Marsa. Najbliżej orbity Marsa znajduje się peryhelium orbity Pallas ($q_V \simeq 2.136 AU$), najdalej od Słońca oddala się Hygiea ($Q_H \simeq 3.513 AU$). Niektóre planetoidy zbliżające się do Ziemi mogą więc potencjalnie spotykać się w swym ruchu z Ceres, Pallas, Vestą bądź Hygieią (patrz Rys. 1.6 na str. 12).

Aktualne zestawienie ostatnio wyznaczonych mas tych planetoid oraz dyskusję ich dokładności zawiera praca Hiltona (2003) oraz opracowanie Krasinsky et al. (2001). Prace te zawierają także szczegółowy rys historyczny zagadnienia wyznaczania mas planetoid. W Tab. 4.1 podano wybrane wyniki wyznaczeń mas czterech największych planetoid wraz ze źródłami bibliograficznymi.

W obliczeniach do niniejszej pracy zaadaptowano na podstawie prac Michalaka (2000, 2001) następujące wartości mas: $M_C = 4.70 \cdot 10^{-10} M_\odot$, $M_P = 1.20 \cdot 10^{-10} M_\odot$, $M_V = 1.36 \cdot 10^{-10} M_\odot$, $M_H = 5.6 \cdot 10^{-11} M_\odot$. Masa Hygiei ($M_H$) jest wyznaczona z małą dokładnością – pozostałe znane wyznaczenia mieszczą się w interwale $2.1 \div 6.3 \cdot 10^{-11} M_\odot$.

Tablica 4.1: Ważniejsze wyniki wyznaczeń mas czterech największych planetek w ciągu ostatniego dziesięciolecia.

Planetoida	Masa	Źródło
(1) Ceres	$4.80 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Sitarski i Todorovic-Juchniewicz, 1992
	$4.39 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Hilton, 1999
	$4.70 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Michalak, 2000
(2) Pallas	$1.59 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Hilton, 1999
	$1.20 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Michalak, 2000
(4) Vesta	$1.40 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Sitarski i Todorovic-Juchniewicz, 1992
	$1.69 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Hilton, 1999
	$1.36 \cdot 10^{-10} M_\odot$	Michalak, 2000
(10) Hygiea	$5.6 \cdot 10^{-11} M_\odot$	Michalak, 2001

Uzasadnieniem wyboru tych planetoid jest fakt, że ich masy stanowią łącznie ponad połowę masy całego pasa głównego. Dlatego są one głównym czynnikiem zaburzającym ruch innych ciał w obszarze między orbitami Jowisza i Marsa. Jak wspomniano wcześniej, Ceres, Pallas i Vesta były jako pierwsze dodatkowo uwzględniane w precyzyjnych efemerydach planet (Standish, 1990). Wyjątkowo w niniejszej pracy została potraktowana planetka Hygiea, która jest wyraźnie mniejsza od pozostałych. Została dobrana do modelu dodatkowo w celach porównawczych. Nie zdecydowano się na użycie w modelu większej ilości obiektów ze względu na ich małe masy, które w większości przypadków zostały wyznaczone z dużymi błędami.

4.2 Model dynamiczny i metoda

4.2.1 Wybór odpowiedniego modelu i metody całkowania numerycznego

W celu oszacowania perturbacji od czterech największych planetoid porównano obliczenia wykonane za pomocą dwóch modeli: opisanym w rozdziale 3 modelem MB (wszystkie planety Układu Słonecznego bez wydzielonego Księżyca) oraz modelem nazwanym BIG4[1] – zawierający ciała modelu MB z Ceres, Pallas, Vestą i Hygieią jako dodatkowymi ciałami zaburzającymi.

Całkowanie numeryczne wykonano różnymi metodami, ale prezentowane są tylko wyniki otrzymane metodą RA15. Wystąpiły problemy z zastosowaniem metod RMVS3 i Hybrid ze względu na pewne własności zagadnienia – zbliżenia małych ciał do niewielkich mas na odległości o wiele dalsze, niż promień Hilla. Metody te w takim wypadku działają dokładnie jak metoda

[1] Jest to analogia do często spotykanego w literaturze skrótu BIG3 dotyczącego Ceres, Pallas i Vesty

MVS (bez regularyzacji, ze stałym krokiem całkowania), co powoduje ryzyko stopniowej kumulacji błędów.

4.2.2 Dane startowe

Podobnie, jak w poprzednim przypadku, elementy orbit planetoid zostały zaadoptowane z *Lowell Observatory Database*. Tym razem poddano wstępnej selekcji orbity 1333 planetoid NEA (epoka oskulacji: JD 2452000.5; 2001-04-01). Aby zmniejszyć czasochłonność obliczeń, liczbę tę zmniejszono. Pominięto orbity planetek, dla których zbyt mała odległość aphelium Q uniemożliwia zbliżenia do Ceres, Pallas, Vesty lub Hygiei na odległość mniejszą niż $0.1AU$. Po zastosowaniu tego „geometrycznego" kryterium pozostawiono 651 ciał będących potencjalnymi kandydatami na obiekty spotykające się z czterema największymi planetkami.

Elementy orbitalne czterech dużych planetoid pobrano również z tego samego źródła, natomiast położenia, prędkości oraz masy planet z efemerydy JPL DE405/406 (Standish, 1998).

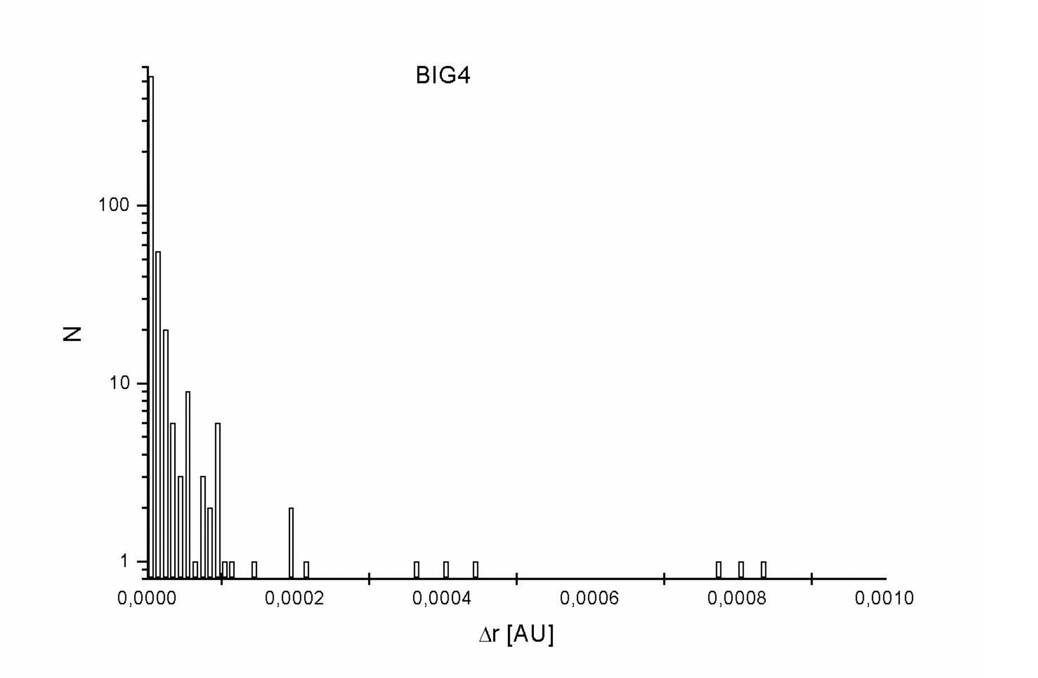
4.3 Selekcja obiektów zaburzanych przez masywne planetoidy

Początkowo poddano analizie ruch orbitalny 651 planetoid, które z geometrycznego punktu widzenia mogłyby się zbliżać na niewielkie odległości zarówno do Ziemi, jak i do strefy, w której występują największe planetoidy. Podobnie, jak w poprzednim przypadku rozpoczęto od całkowania ich ruchu na przedziale 100 lat i obserwacji różnicy w położeniach powstałej przy zastosowaniu dwóch modeli zaburzeń – BIG4 i MB. Aby dodatkowo nie komplikować zagadnienia i rozgraniczyć problemy studiowane w niniejszej pracy w tych obliczeniach nie uwzględniano rozdzielonego Księżyca (modelu MZK).

Kolejnym etapem była selekcja interesujących przypadków orbit, a więc planetek, dla których różnica w położeniach $|\vec{\Delta r}| = |\vec{r}_{MB} - \vec{r}_{BIG4}|$ była największa. Analogicznie, jak w poprzednim rozdziale $\vec{r}_{MB}$ jest położeniem ciała uzyskanym za pomocą modelu MB. $\vec{r}_{BIG4}$ jest położeniem ciała uzyskanym za pomocą modelu BIG4. Zaledwie 13 planetoid miało wartość $|\vec{\Delta r}| > 10^{-4}AU$ po 100 latach, a tylko jedna z nich odnotowała $|\vec{\Delta r}| > 10^{-3}AU$. Elementy orbitalne tych ciał zostały zamieszczone w Tab. 4.2. Wartości $|\vec{\Delta r}|$ dla pozostałych ciał testowych są zestawione w formie histogramu (Rys. 4.1).

Podobnie, jak w przypadku badania problemu Księżyca (rozdział poprzedni) poświęcono więcej uwagi wybranym 13 ciałom, analizując ich zbliżenia do Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei, a także do planet.

Przeanalizowano również propagację wartości $|\vec{\Delta r}|$ w czasie i jej związek z ciasnymi zbliżeniami. Prześledzone zostały także zmiany w elementach



Rysunek 4.1: Histogram wartości $|\vec{\Delta r}|$ dla 651 planetoid po 100 latach. Wartość $|\vec{\Delta r}|$ ze względu na skalę ograniczono do zakresu $0 \div 10^{-4} AU$.

orbitalnych. Różnice w półosi wielkiej i mimośrodzie zostały odpowiednio zdefiniowane jako: $|\Delta a| = |a_{MB} - a_{BIG4}|$, $|\Delta e| = |e_{MB} - e_{BIG4}|$.

4.4 Wyniki

4.4.1 Zbliżenia

Dla 13 ciał testowych o największych odchyleniach w położeniach ($|\vec{\Delta r}|$) nie zanotowano bardzo ciasnych zbliżeń do dużych planetek. Osobno w Tab. 4.3 zostały zamieszczone wyłącznie zbliżenia do Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei. W tabeli tej pokazane są także zbliżenia, jakie zachodzą pomiędzy dużymi planetoidami, np. zbliżenia Hygiei do Ceres i Pallas na odległości ok. 0.020 i $0.025 AU$.

Bardziej szczegółowa lista zbliżeń 13 obiektów do dużych planetoid i do planet jest zamieszczona w Tab. 4.4 i jej kontynuacjach. Zbliżeń wybranych planetoid na odległość bliższą, niż $0.1 AU$ jest zaledwie kilka. Ich dokładniejszy przebieg i konsekwencje możemy prześledzić dokładnie na str. 79 – 90 (Rys. 4.2 – 4.25).

Wszystkie dane zbliżeń zawarte w tabelach dotyczą symulacji z udziałem modelu BIG4, jako najbardziej zbliżone do rzeczywistości.

Tablica 4.2: Elementy orbitalne 13 wyselekcjonowanych „ciał testowych" (epoka oskulacji = 2452000.5 JD).

Obiekt	M	ω	Ω	i	e	a
1990 BG	359.406719	135.744457	110.474172	36.398842	0.56991274	1.48596550
1991 BA	115.758282	72.500496	118.592584	2.089212	0.66472375	2.09169835
1994 ES1	20.197210	279.092735	352.899348	0.918377	0.59460726	1.42542075
1994 VH8	303.058198	313.438992	38.435811	3.619910	0.47989868	1.73841536
1994 XD	288.276677	247.913584	97.521641	4.337493	0.72869054	2.35668811
1997 QK1	279.505692	2.522676	307.145057	2.885333	0.64154977	2.79423802
1997 UR	330.475214	200.209581	214.099708	2.263015	0.31200993	1.45864402
1997 WQ23	193.105355	296.232030	56.098026	2.452498	0.49430029	1.73617460
1997 XF11	59.897733	102.475743	214.116164	4.095322	0.48355876	1.44179339
1999 MM	277.261791	268.462040	111.261651	4.764151	0.61055622	1.62369379
2000 VN2	39.569071	32.439719	76.588908	14.649533	0.44080489	1.97491371
2000 WG63	44.806277	185.443166	243.498390	9.193425	0.47475852	1.90965958
2001 DZ76	2.857033	38.049705	152.157227	5.736945	0.60661232	2.34601870

4.4.2 Analiza ruchu wybranych planetoid

Podchodząc indywidualnie do każdego badanego ciała wyniki można zinterpretować następująco:

1990 BG

Otrzymana trajektoria obiektu 1990 BG wykazuje różnicę w położeniach równą ok. $|\vec{\Delta r}| = 4 \cdot 10^{-4} AU$ po 100 latach. Odpowiada to mniej więcej 60000 km. Jest to różnica istotna np. z punktu widzenia dokładności, jaka jest wymagana przy przewidywaniu przyszłych zbliżeń lub kolizji małych ciał z planetami.

Róznica ta nie jest skorelowana ze zbliżeniami do planetek. W ciągu najbliższych 100 lat występuje tylko jedno zbliżenie do Pallas, w odległości ponad $0.15 AU$. Istotny wpływ na wartość $|\vec{\Delta r}|$ mogą tu mieć zbliżenia do Marsa i Wenus (Tab. 4.4). Położenia tych planet mogą być w niewielkim stopniu uzależnione od zmian dokonanych w modelu dynamicznym.

1991 BA

Planetoida 1991 BA wykazuje różnicę podobnego rzędu, również bez bezpośredniego wpływu zbliżeń do planetoid - jedynie dwa zbliżenia do Pallas i Ceres w relatywnie dużych odległościach.

1994 ES1 i 1994 VH8

W ruchu planetki 1994 ES1 dominują liczne zbliżenia do Wenus, Ziemi i Marsa i nie spotyka się ona z żadną z dużych planetoid. Pomimo tego odnotowuje ona wartość $|\vec{\Delta r}| = 8.32 \cdot 10^{-4} AU$, co odpowiada różnicy ponad $120000 km$ (po 100 latach). Podobnie jest w przypadku 1994 VH8, zbliżającej się głównie do Ziemi i Marsa.

1994 XD

Obiekt 1994 XD zbliża się do Ceres na odległość ok. $0.25 AU$, następnie następuje seria zbliżeń do Wenus i do Ziemi. Różnica w położeniach po 100 latach oscyluje w granicach $|\vec{\Delta r}| = 10^{-4} \div 10^{-3} AU$ (Rys. 4.3). Różnicę tę można również tłumaczyć pośrednim wpływem zmiany modelu, ponieważ korelacja pomiędzy zbliżeniami do Ceres (Rys. 4.2), a zmianami w półosi wielkiej i mimośrodzie (Rys. 4.4 i 4.5) jest niewielka. Skoki w wartościach $|\Delta a|$ i $|\Delta e|$ są raczej związane ze zbliżeniami do planet. Kumulacja błędu jest jednak znaczna i pomijając perturbacje od dużych planetoid powinniśmy się liczyć z różnicą rzędu $10^5 \div 10^6$ kilometrów w położeniach po 80–100 latach.

1997 QK1 i 1997 UR

Dla planetoid 1997 QK1 (jedno zbliżenie do Ceres na odległość ok. $0.12 AU$) oraz 1997 UR (tylko zbliżenia do planet) końcowe wartości $|\vec{\Delta r}|$ wynosiły odpowiednio $7.71 \cdot 10^{-4} AU$ i $1.94 \cdot 10^{-4} AU$.

1997 WQ23

Planetoida 1997 WQ23 zbliża się dwa razy do Vesty (patrz Tab. 4.4 i Rys. 4.6), a także wielokrotnie do Ziemi i do Marsa. Korelacja wartości $|\vec{\Delta r}|$ jest praktycznie niezauważalna (Rys. 4.7). Zmiany w elementach orbitalnych są związane przede wszystkim ze zbliżeniami do Ziemi, poza jednym niewielkim skokiem w $|\Delta e|$, widocznym na Rys. 4.9 i odpowiadającym momentowi pierwszego zbliżenia 1997 WQ23 do Vesty.

1997 XF11

1997 XF11 zbliża się bardzo często do planet wewnętrznych, w szczególności do Wenus i Ziemi. Dla użytych danych początkowych nie odnotowano zbliżeń do masywnych planetoid dla tego obiektu w ciągu najbliższego stulecia. Jednak przewidywanie jego trajektorii jest silnie uzależnione od modelu dynamicznego – różnica w położeniach $|\vec{\Delta r}|$ jest po 100 latach podobnego rzędu, jak większości omówionych powyżej małych ciał – $2.17 \cdot 10^{-4} AU$.

1999 MM

1999 MM to przykład planetoidy z bardzo długą listą zbliżeń do planet, a także Ceres, Pallas i Vesty (Tab. 4.4). Spośród zbliżeń z Pallas i Vestą, najbliższe zachodzą w odległościach 0.028 i 0.072 AU. (Rys. 4.10). Zbliżenia te są skorelowane w czasie z małymi skokami w półosi wielkiej i mimośrodzie (Rys. 4.12 i 4.13).

2000 VN2

Planetka 2000 VN2 spotyka się z Ceres, Vestą i Ziemią, jednak najbliżej mija Vestę – w odległościach około 0.013 i $0.026 AU$. Związek tych zbliżeń daje się zaobserwować na Rys. 4.14 – 4.17. Zbliżenie do Vesty na odległość $\sim 0.013 AU$ zaburza półoś wielką 2000 VN2 o wartość rzędu dziesiątek kilometrów, co jest wartością małą, ale wpływającą na przewidywanie trajektorii tego ciała w dłuższym okresie czasu.

2000 WG63

Interesującym przykładem okazała się planetoida 2000 WG63. Jej częste spotkania z Ceres i jedno z Hygieią w początkowym okresie wyraźnie wpływają na jej ruch. Przy jednoczesnym braku silnych perturbacji od planet i ciasnych zbliżeń do nich w ciągu najbliższych 60 lat zaburzenia te stają się zauważalne. Relacje między zbliżeniami do Ceres i Hygiei a skokami w wartościach $|\vec{\Delta r}|$, $|\Delta a|$ i $|\Delta e|$ są zobrazowane na Rys. 4.19 – 4.21. Ograniczając się do pierwszych 20 lat, podczas których zachodzi wyłącznie jedno zbliżenie z Ceres w odległości ok. $0.086 AU$ możemy zaobserwować, jak błąd w położeniach rośnie w ciągu kilku lat od zbliżenia do setek kilometrów – Rys. 4.23; towarzyszy temu również skokowa zmiana półosi wielkiej i mimośrodu (Rys. 4.24). Przyczyną tych różnic jest obecność Ceres jako dodatkowego źródła zaburzeń.

2001 DZ76

Planetka 2001 DZ76 spotyka się wyłącznie z Ziemią – są to 4 zbliżenia w ciągu 100 lat, z czego 3 na odległości bliższej, niż 0.01 AU. Pomimo braku bezpośrednich zaburzeń od dużych planetoid poprzez zbliżenia, uwzględnienie ich spowodowało różnicę w pozycji tego ciała wynoszącą $|\vec{\Delta r}| = 1.13 \cdot 10^{-4} AU$, a więc niemal $17000 km$.

Tablica 4.3: Zbliżenia wybranych planetoid do Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei. Początek całkowania: $T_0 = 2452000.5$ JD.

CERES				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2005	1	17.58341	1994 XD	0.25608169
2010	4	19.40117	2000 WG63	0.08563724
2023	6	7.35383	1999 MM	0.21056366
2024	8	17.31939	2000 VN2	0.19382980
2028	8	29.56748	2000 WG63	0.05634280
2038	4	8.51437	2000 VN2	0.12897036
2047	1	6.75411	2000 WG63	0.17648423
2051	12	14.37233	2000 VN2	0.18989250
2056	6	26.00167	**HYGIEA**	0.02583060
2058	11	28.48146	1997 QK1	0.11608672
2063	1	13.66827	1991 BA	0.25802826
2064	11	30.98661	1999 MM	0.19071417
2065	5	13.81434	2000 WG63	0.29743554
2081	11	23.85795	**VESTA**	0.19339069
PALLAS				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2046	9	26.54638	**VESTA**	0.10744593
2058	9	2.10890	1991 BA	0.12696996
2063	3	4.89546	**HYGIEA**	0.02012178
2077	12	30.25706	1990 BG	0.15489614
2078	12	23.08850	1999 MM	0.02822085
VESTA				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2018	3	13.29273	2000 VN2	0.01259090
2028	4	6.13977	1997 WQ23	0.10875634
2046	9	26.54638	**PALLAS**	0.10744593
2065	4	23.28787	1999 MM	0.14460180
2065	5	20.71999	2000 VN2	0.02579004
2071	11	3.61256	1997 WQ23	0.13509472
2079	11	4.52485	1999 MM	0.07214254
2081	11	23.85795	**CERES**	0.19339069
2094	5	11.43950	1999 MM	0.16284015
2097	7	5.05418	1999 MM	0.11978312
HYGIEA				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2033	10	4.24384	2000 WG63	0.11008591
2056	6	26.00167	**CERES**	0.02583060
2063	3	4.89546	**PALLAS**	0.02012178

Tablica 4.4: Zestawienie zbliżeń 13 wybranych planetoid do Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei oraz do planet (planetoidy 1990 BG, 1991 BA, 1994 ES1). Początek całkowania: $T_0 = 2452000.5$ JD.

1990 BG				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2009	12	22.39859	MARS	0.04999107
2028	6	26.41316	WENUS	0.02872405
2058	11	13.66341	MARS	0.11688967
2059	4	3.86288	WENUS	0.04138429
2077	12	30.25706	**PALLAS**	0.15489614
2091	11	9.30616	WENUS	0.00718145
1991 BA				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2006	6	13.61546	ZIEMIA	0.07610456
2009	6	23.70189	ZIEMIA	0.07023181
2015	6	2.39319	WENUS	0.02189325
2048	8	25.33934	WENUS	0.00453386
2058	9	2.10890	**PALLAS**	0.12696996
2063	1	13.66827	**CERES**	0.25802826
2073	1	23.72640	MARS	0.10705537
2088	1	15.22465	WENUS	0.04329281
2091	1	4.86548	WENUS	0.07855364
2100	1	20.03140	ZIEMIA	0.03827337
1994 ES1				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2006	3	9.47418	WENUS	0.08624749
2011	3	21.89348	ZIEMIA	0.10868098
2013	5	6.84663	MARS	0.07146937
2019	7	8.32530	MARS	0.08541068
2019	12	9.85185	WENUS	0.05257684
2035	2	12.15547	WENUS	0.03822060
2038	9	25.07501	ZIEMIA	0.14248799
2048	11	12.27826	WENUS	0.04041520
2049	1	30.14981	MARS	0.10611079
2055	4	2.19530	MARS	0.05751367
2055	9	30.24874	ZIEMIA	0.06380630
2064	1	15.88736	WENUS	0.05693723
2072	10	2.96628	ZIEMIA	0.00503995
2077	10	11.80560	WENUS	0.04045484
2089	9	30.31196	ZIEMIA	0.05860128
2090	12	20.84993	MARS	0.11592833
2092	12	4.13867	WENUS	0.10616425
2099	9	24.40272	WENUS	0.07411794

Tablica 4.5: Kontynuacja Tab. 4.4 ze str. 74 (obiekty 1994 VH8, 1994 XD, 1997 QK1,1997 UR).

1994 VH8				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2017	7	16.25998	ZIEMIA	0.10910482
2033	8	20.72151	ZIEMIA	0.10199420
2049	10	22.02280	ZIEMIA	0.04133615
2056	12	5.77911	MARS	0.05561763
2065	11	3.28128	ZIEMIA	0.03652746
2088	7	31.01803	ZIEMIA	0.06761301
1994 XD				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2005	1	17.58341	**CERES**	0.25608169
2005	6	20.21272	ZIEMIA	0.11173300
2012	11	30.73252	ZIEMIA	0.03979454
2020	1	20.05748	WENUS	0.02219490
2052	6	10.34523	ZIEMIA	0.03668256
2052	7	21.64032	WENUS	0.09847828
2059	11	24.42671	ZIEMIA	0.10834629
2070	6	20.05418	ZIEMIA	0.09862348
2077	11	14.86644	WENUS	0.01592448
2077	12	9.63188	ZIEMIA	0.18403244
2081	5	20.42968	WENUS	0.12354785
1997 QK1				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2025	8	20.59559	ZIEMIA	0.01997714
2039	7	14.38557	ZIEMIA	0.01677499
2053	6	23.41082	ZIEMIA	0.13873787
2058	11	28.48146	**CERES**	0.11608672
2067	8	25.85190	ZIEMIA	0.03812256
2067	10	23.65169	MARS	0.10994453
2086	9	3.18247	ZIEMIA	0.14691052
1997 UR				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2034	11	23.04871	ZIEMIA	0.02673920
2048	9	19.54103	MARS	0.11374084
2057	11	10.20264	ZIEMIA	0.01804006
2072	7	1.75187	MARS	0.10421918
2078	10	22.15215	MARS	0.11554064
2080	11	1.18757	ZIEMIA	0.02326144
2100	9	21.54384	MARS	0.13665166

Tablica 4.6: Kontynuacja Tab. 4.4 ze str. 74 (obiekty 1997 WQ23 i 1997 XF11).

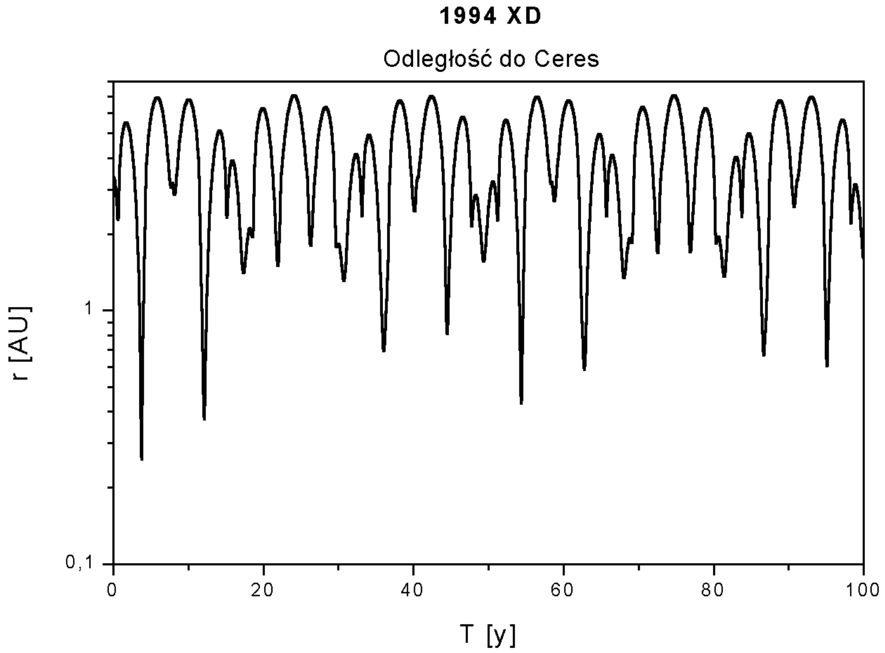
1997 WQ23				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2008	11	15.71325	MARS	0.11813611
2011	10	19.40015	MARS	0.04752645
2013	11	7.26914	ZIEMIA	0.02951775
2028	4	6.13977	**VESTA**	0.10875634
2036	8	8.20084	ZIEMIA	0.09296012
2052	11	3.19200	ZIEMIA	0.01437328
2061	7	31.31458	MARS	0.13116245
2068	11	4.59421	ZIEMIA	0.00975678
2071	11	3.61256	**VESTA**	0.13509472
2084	11	6.46615	ZIEMIA	0.01812327
1997 XF11				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2002	9	6.23061	WENUS	0.08949937
2002	10	30.79523	ZIEMIA	0.06365694
2011	9	7.49121	MARS	0.11876176
2016	6	10.49582	ZIEMIA	0.17995707
2021	9	17.09549	WENUS	0.09323366
2028	10	26.28159	ZIEMIA	0.00624086
2035	6	8.92330	ZIEMIA	0.17496650
2038	12	23.57001	WENUS	0.08923338
2040	11	4.64010	ZIEMIA	0.15320536
2047	7	14.25035	WENUS	0.13358677
2053	1	23.64013	MARS	0.12333477
2078	2	16.23231	MARS	0.10106760
2078	5	10.91765	ZIEMIA	0.12193110
2080	4	6.48560	WENUS	0.11178661
2083	10	9.76775	ZIEMIA	0.15442677
2088	10	8.59418	WENUS	0.08922289
2090	5	19.63682	ZIEMIA	0.03741060
2095	10	26.97127	ZIEMIA	0.01249638

Tablica 4.7: Kontynuacja Tab. 4.4 ze str. 74 (obiekty 1999 MM oraz 2000 VN2).

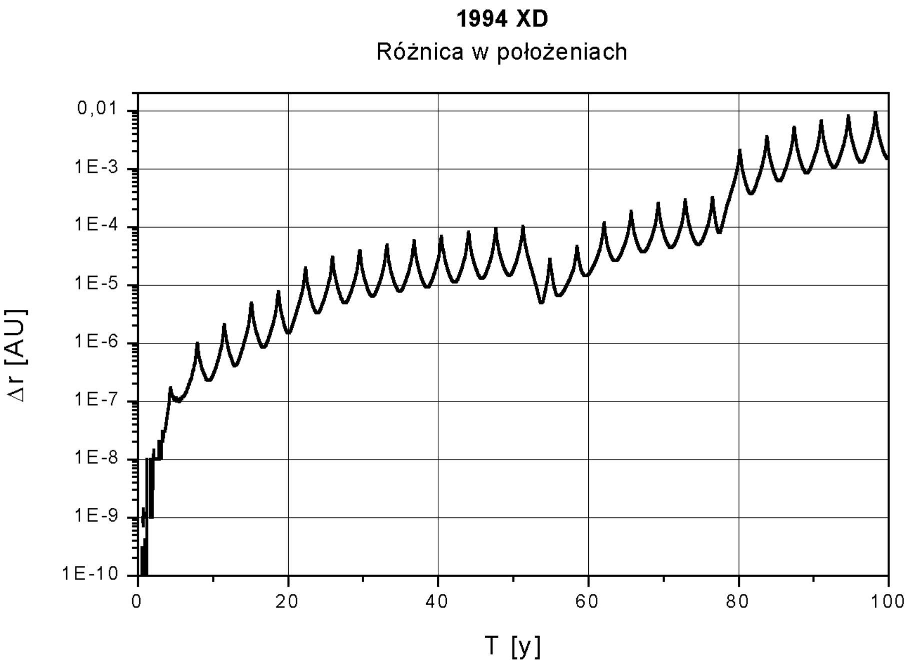
1999 MM				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2001	6	12.43173	MARS	0.14347735
2005	10	26.67083	WENUS	0.06129598
2005	12	27.34897	ZIEMIA	0.14658570
2012	2	19.37548	WENUS	0.12849554
2023	6	7.35383	**CERES**	0.21056366
2028	8	9.79274	WENUS	0.08577707
2030	7	29.84552	ZIEMIA	0.19563222
2037	1	16.42253	ZIEMIA	0.18091546
2049	9	6.37696	MARS	0.13527000
2051	6	8.22021	WENUS	0.08550444
2059	7	22.66143	ZIEMIA	0.13280326
2064	11	30.98661	**CERES**	0.19071417
2065	4	23.28787	**VESTA**	0.14460180
2066	1	14.06904	ZIEMIA	0.12144230
2067	11	29.46572	WENUS	0.07170643
2070	5	19.45771	MARS	0.06511609
2074	3	29.63491	WENUS	0.03592913
2078	12	23.08850	**PALLAS**	0.02822085
2079	11	4.52485	**VESTA**	0.07214254
2088	7	13.81378	ZIEMIA	0.02070633
2090	9	9.04387	WENUS	0.00483325
2091	1	29.61612	MARS	0.03633483
2094	5	11.43950	**VESTA**	0.16284015
2094	12	21.87038	ZIEMIA	0.19849687
2096	11	10.43409	WENUS	0.04708443
2097	1	15.09803	ZIEMIA	0.13872560
2097	7	5.05418	**VESTA**	0.11978312
2000 VN2				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2018	3	13.29273	**VESTA**	0.01259090
2024	8	17.31939	**CERES**	0.19382980
2036	12	21.95263	ZIEMIA	0.15762306
2038	4	8.51437	**CERES**	0.12897036
2051	12	14.37233	**CERES**	0.18989250
2061	12	20.05162	ZIEMIA	0.15891405
2065	5	20.71999	**VESTA**	0.02579004

Tablica 4.8: Kontynuacja Tab. 4.4 ze str. 74 dla obiektów 2000 WG63 i 2001 DZ76.

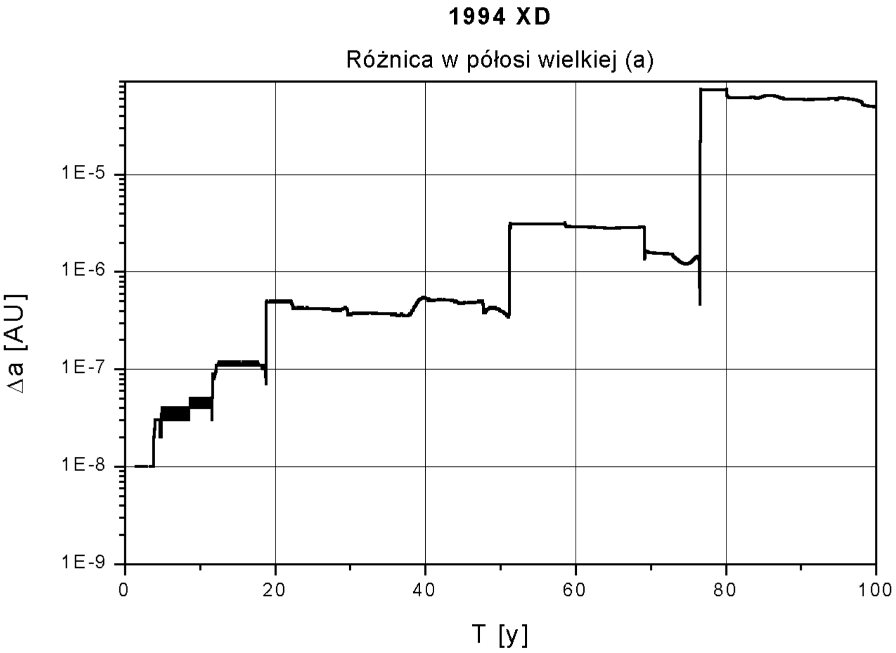
2000 WG63				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2010	4	19.40117	**CERES**	0.08563724
2028	8	29.56748	**CERES**	0.05634280
2033	10	4.24384	**HYGIEA**	0.11008591
2047	1	6.75411	**CERES**	0.17648423
2065	5	13.81434	**CERES**	0.29743554
2066	11	25.21674	ZIEMIA	0.01833090
2095	11	2.77530	ZIEMIA	0.13951151
2001 DZ76				
Moment zbliżenia			Obiekt	Odległość zbliżenia [AU]
2026	5	24.32880	ZIEMIA	0.14325508
2044	5	7.39762	ZIEMIA	0.09700936
2062	2	18.34154	ZIEMIA	0.02995645
2087	5	16.89935	ZIEMIA	0.09971091



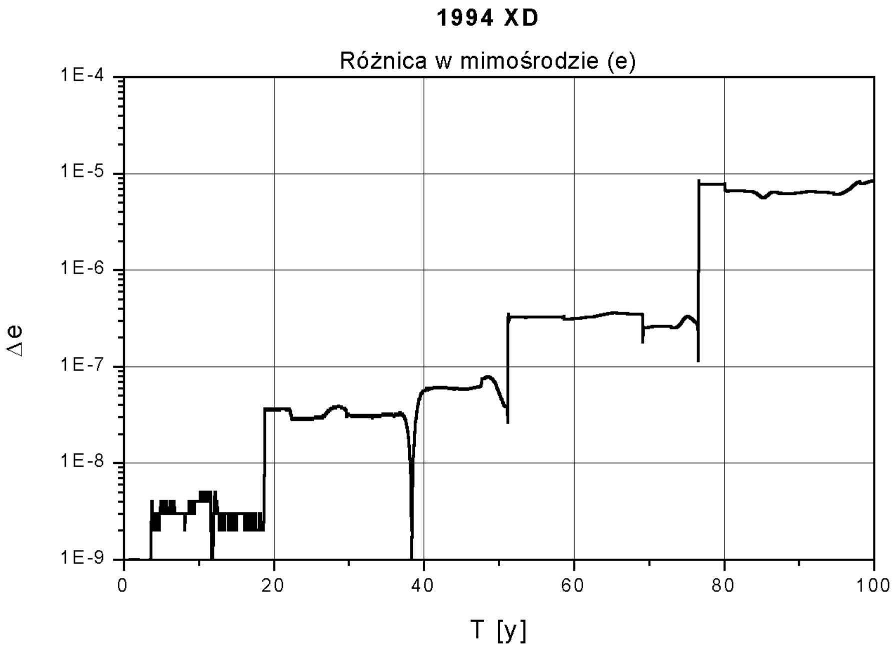
Rysunek 4.2: Zbliżenia do Ceres ciała 1994 XD.



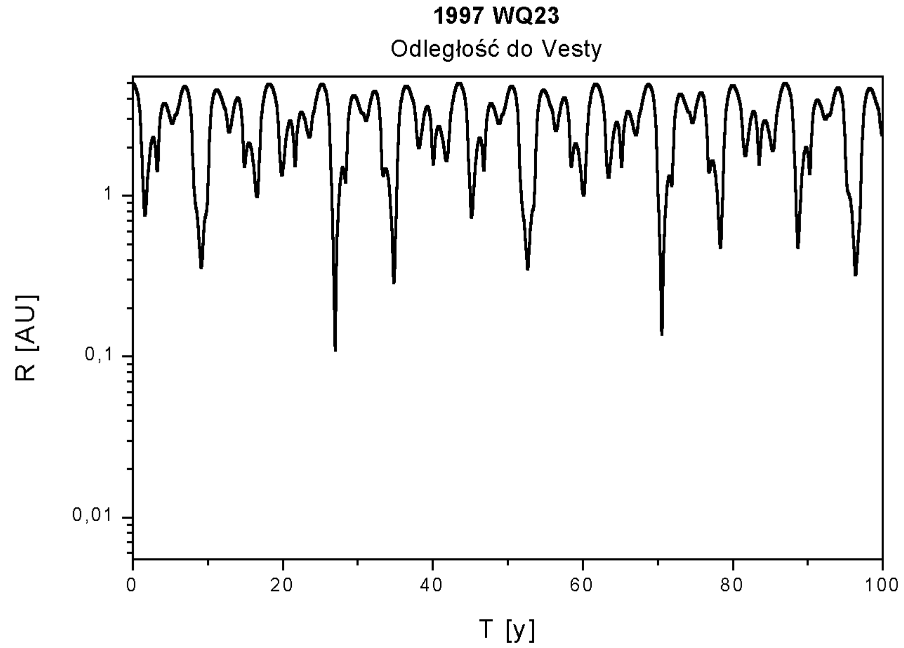
Rysunek 4.3: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1994 XD przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4.



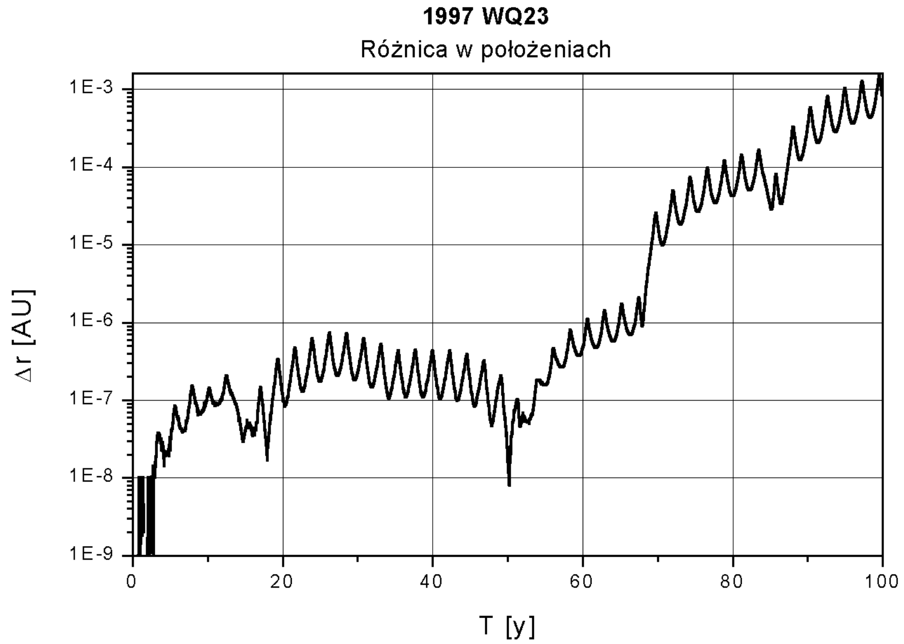
Rysunek 4.4: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1994 XD na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4.



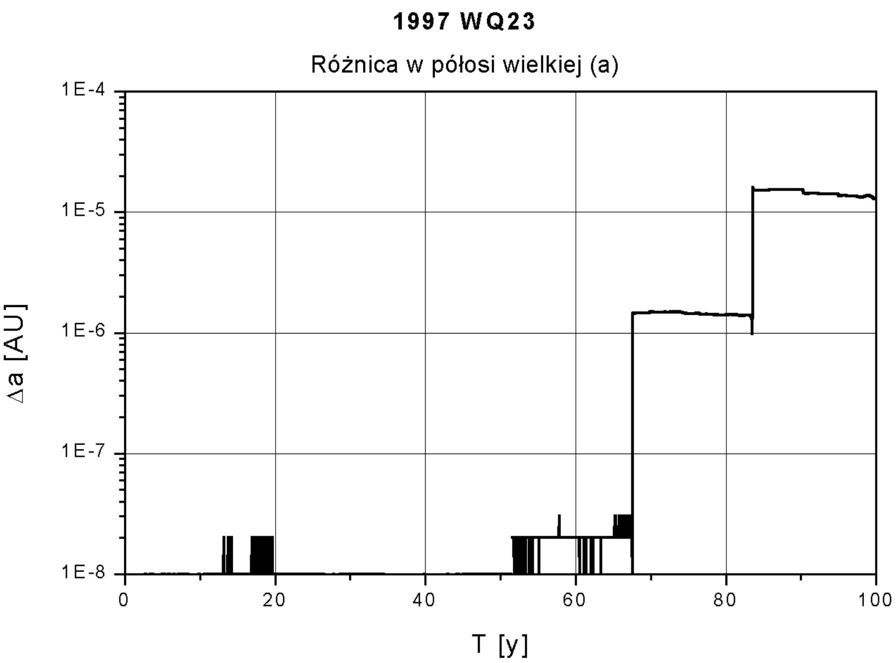
Rysunek 4.5: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 1994 XD.



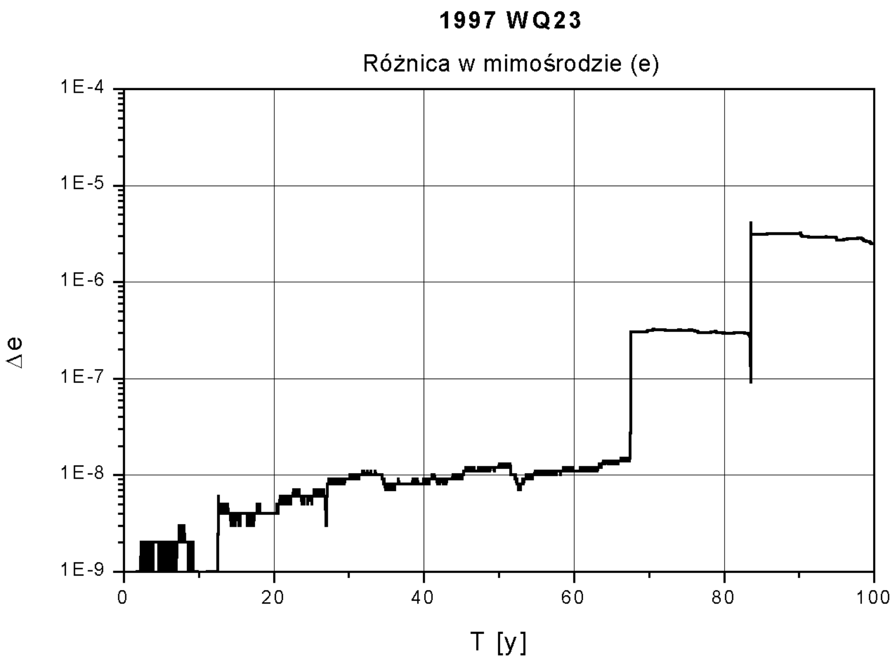
Rysunek 4.6: Zbliżenia do Vesty ciała 1997 WQ23.



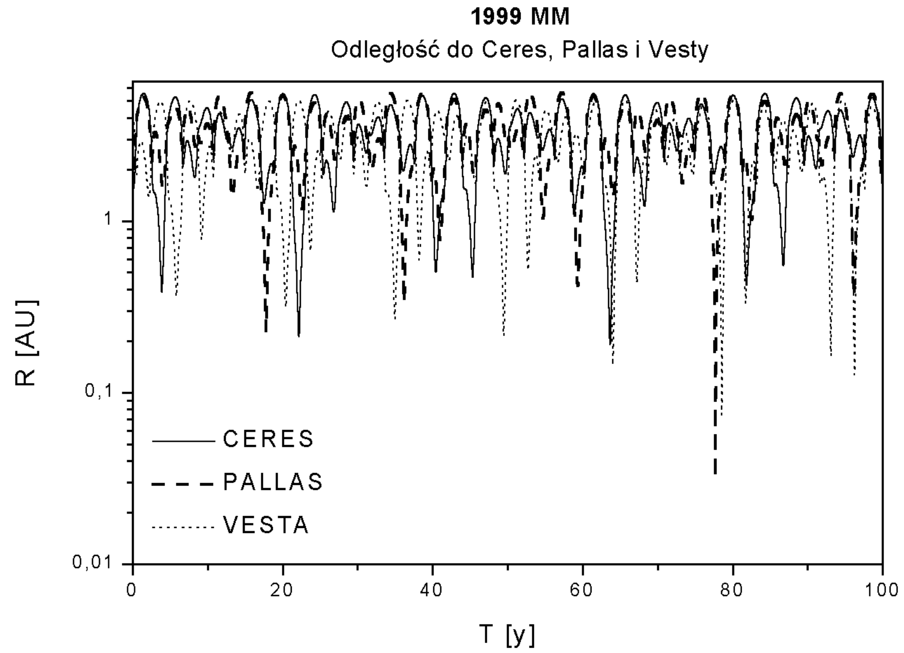
Rysunek 4.7: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1997 WQ23 przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4.



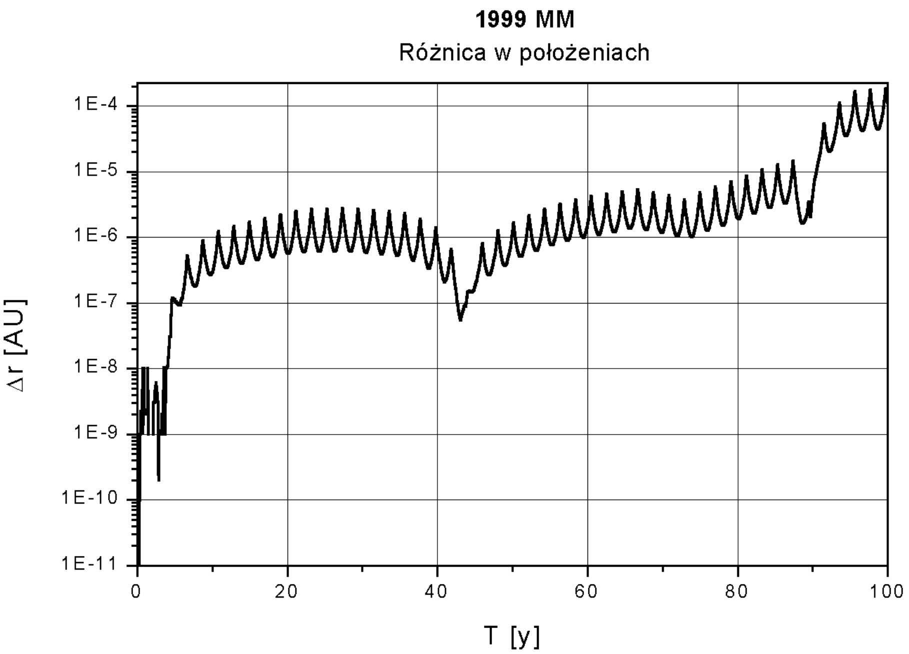
Rysunek 4.8: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1997 WQ23 na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4.



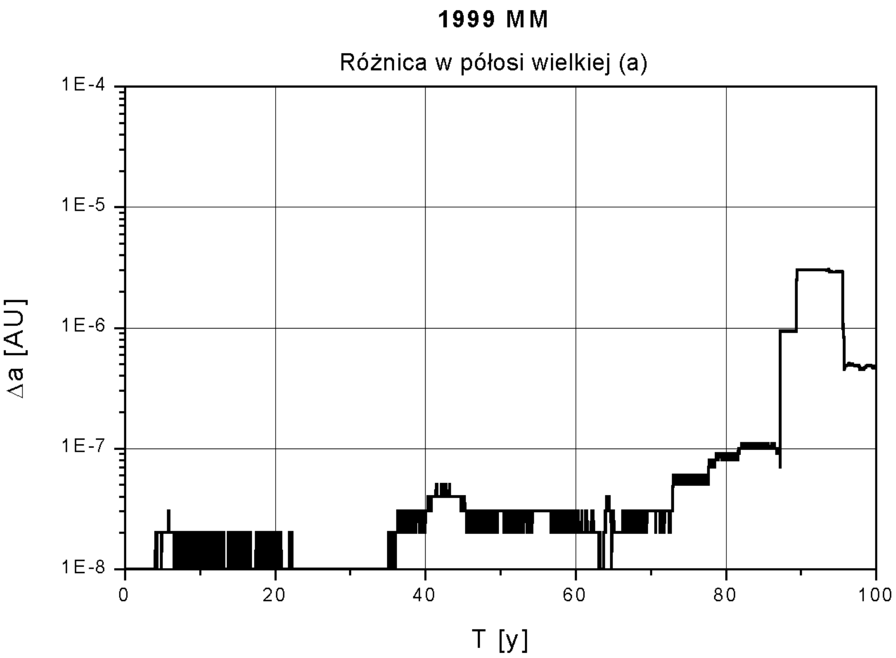
Rysunek 4.9: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 1997 WQ23.



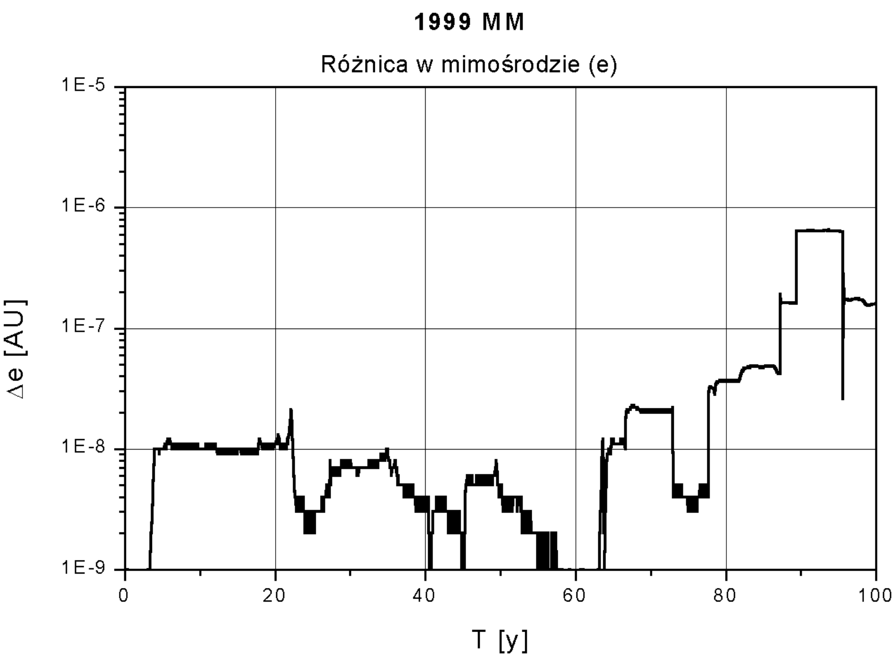
Rysunek 4.10: Zbliżenia do Ceres, Pallas oraz Vesty ciała 1999 MM.



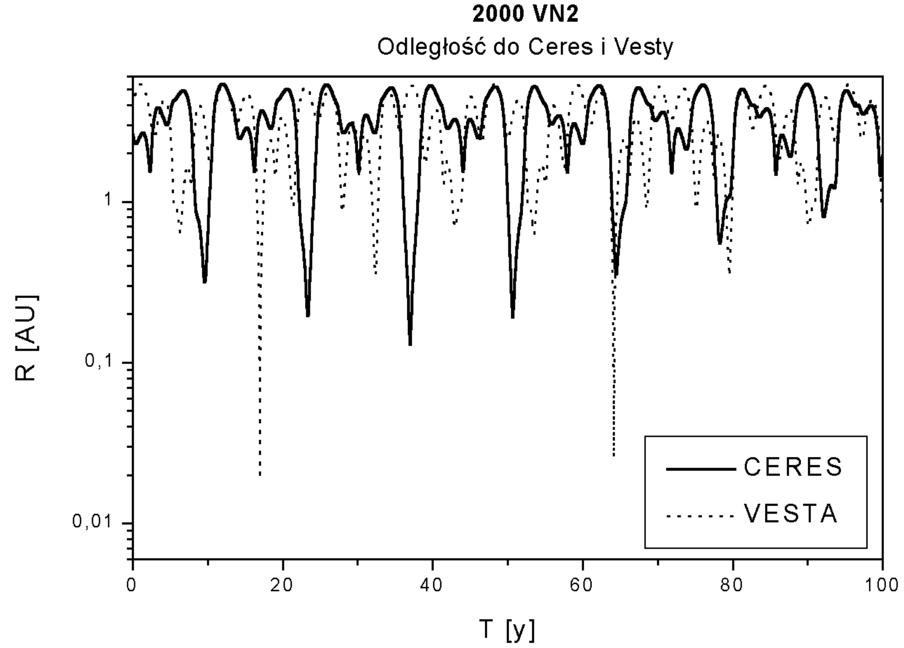
Rysunek 4.11: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 1999 MM przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4.



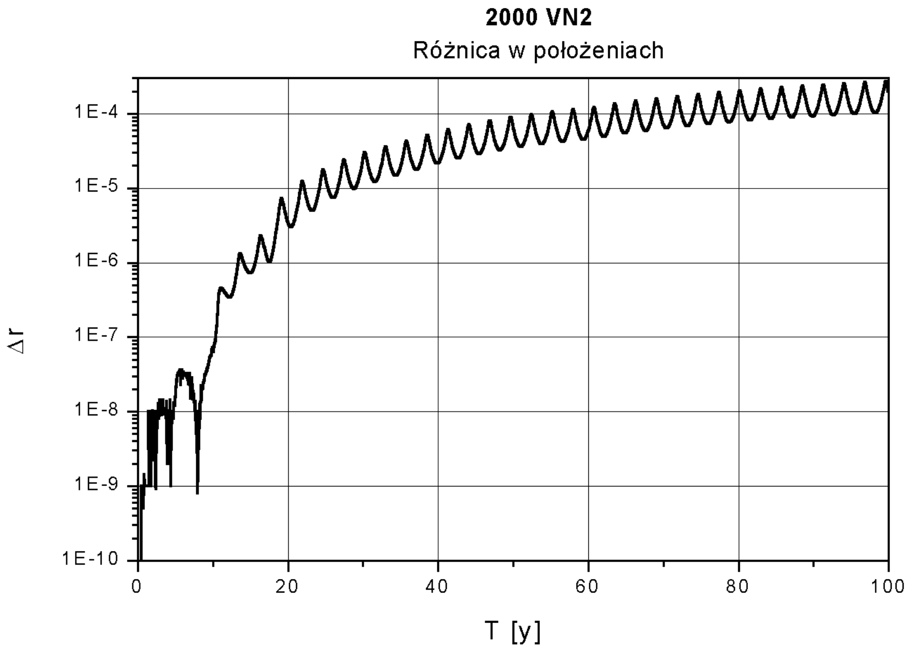
Rysunek 4.12: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 1999 MM na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4.



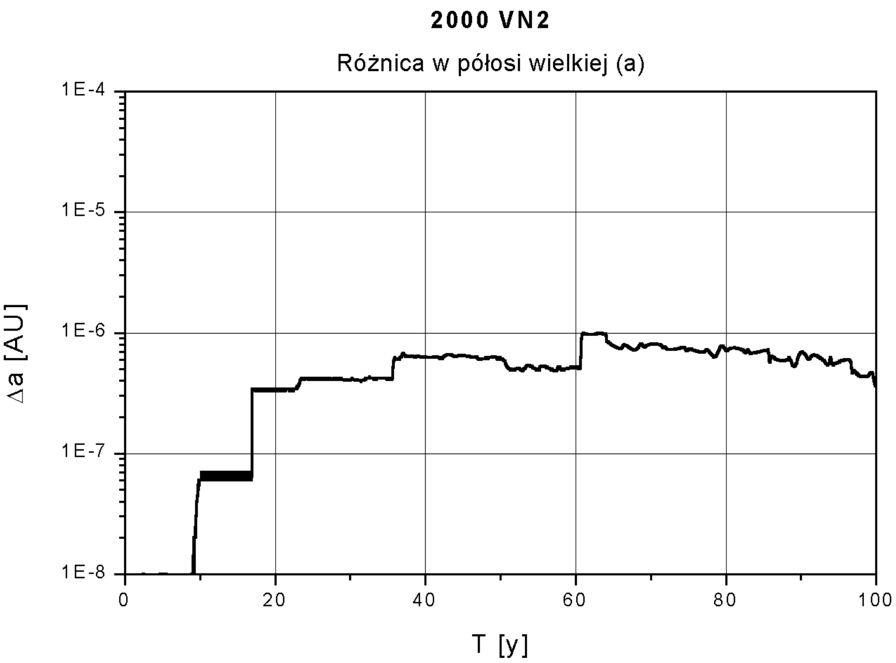
Rysunek 4.13: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 1999 MM.



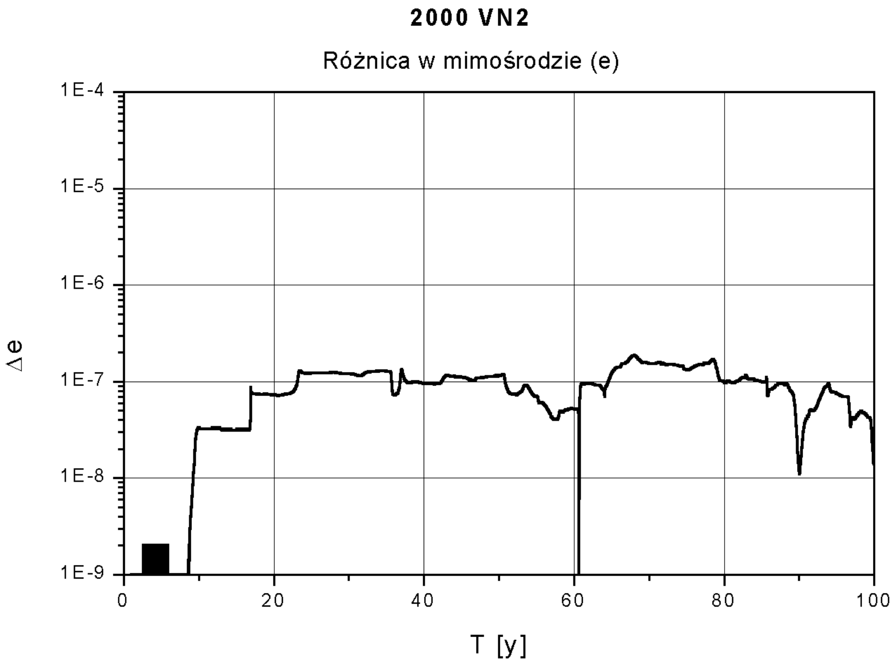
Rysunek 4.14: Zbliżenia do Ceres i Vesty ciała 2000 VN2.



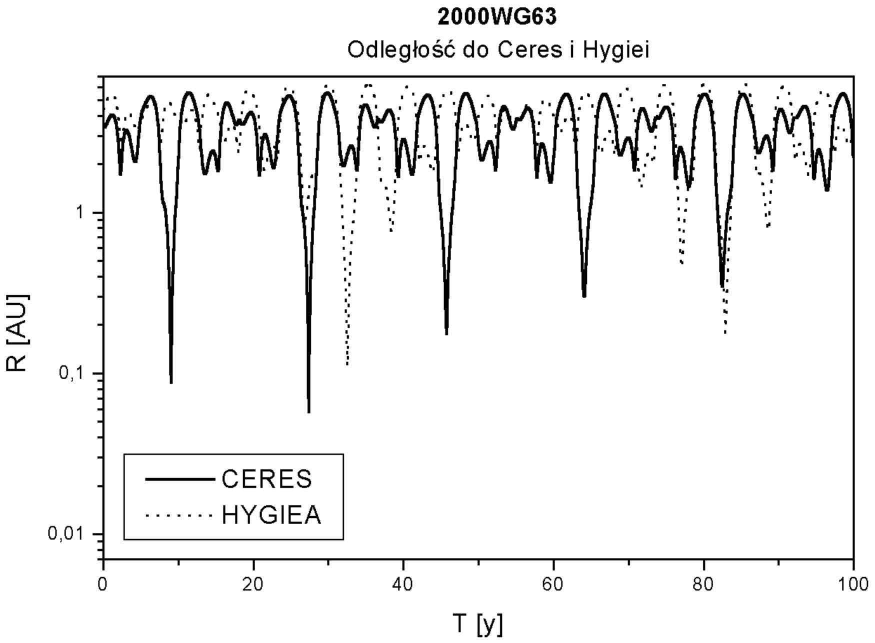
Rysunek 4.15: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 2000 VN2 przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4.



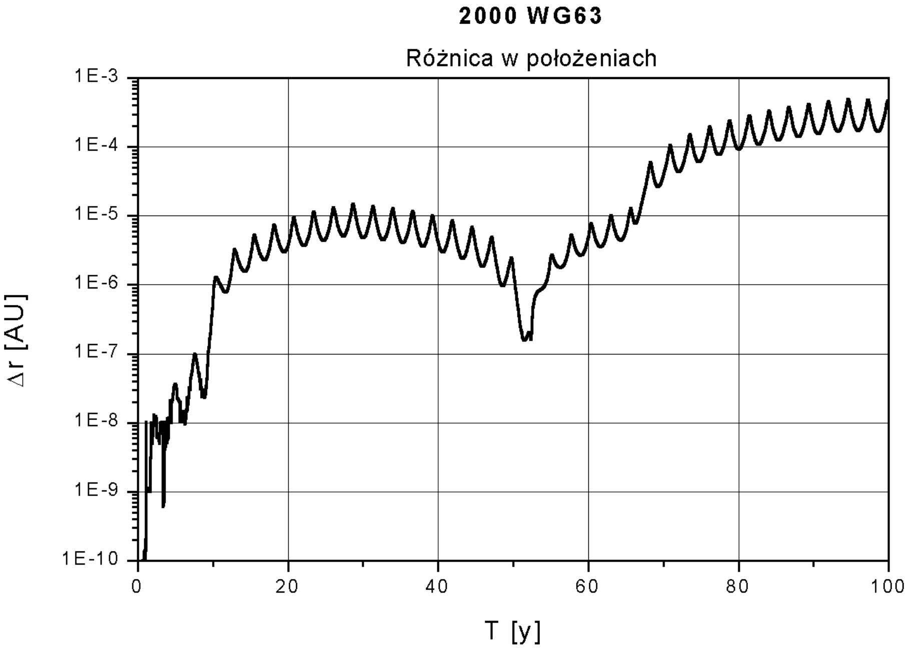
Rysunek 4.16: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 2000 VN2 na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4.



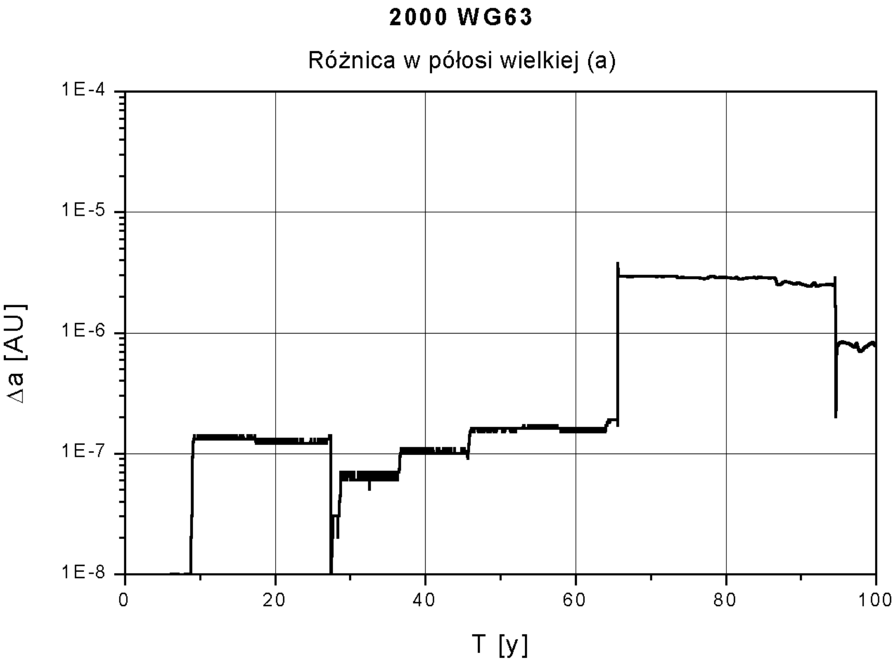
Rysunek 4.17: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 2000 VN2.



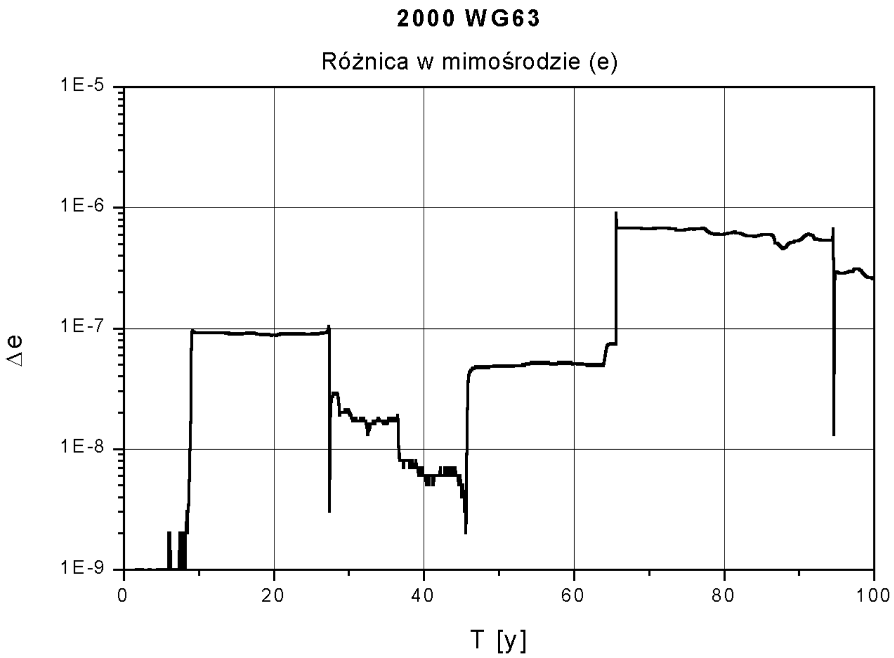
Rysunek 4.18: Zbliżenia do Ceres i Hygiei ciała 2000 WG63.



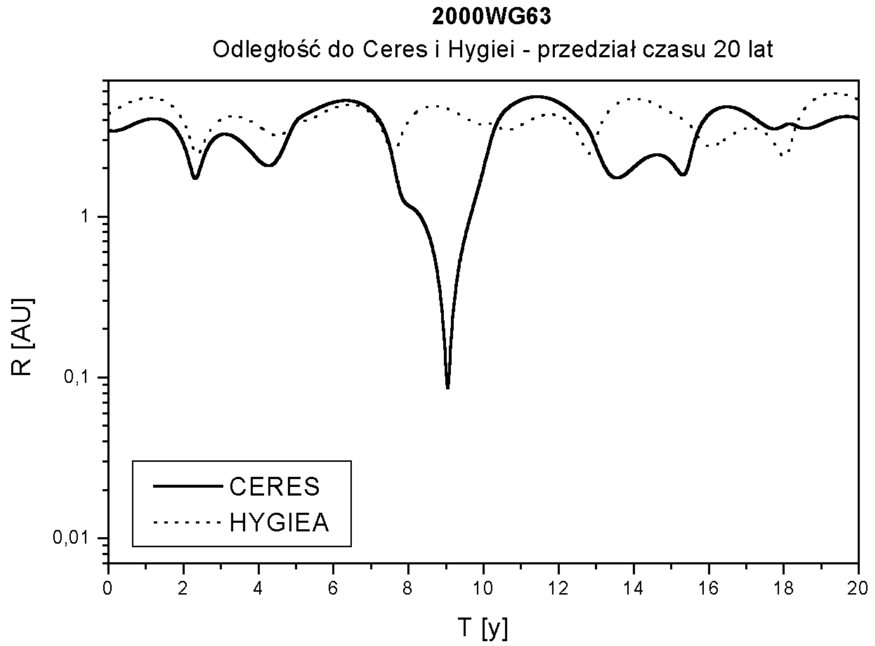
Rysunek 4.19: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała 2000 WG63 przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4.



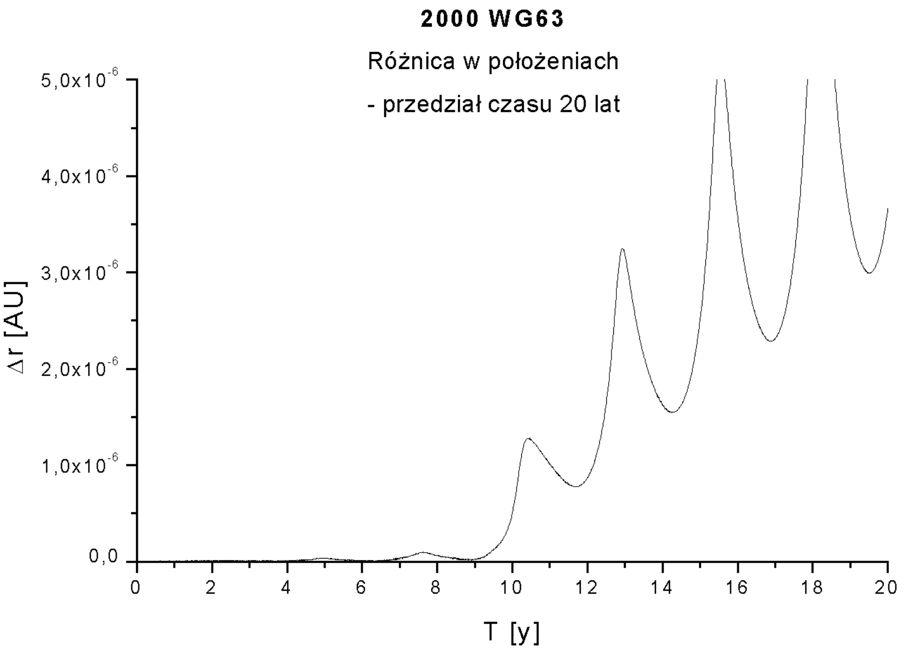
Rysunek 4.20: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\Delta a|$) planetki 2000 WG63 na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4.



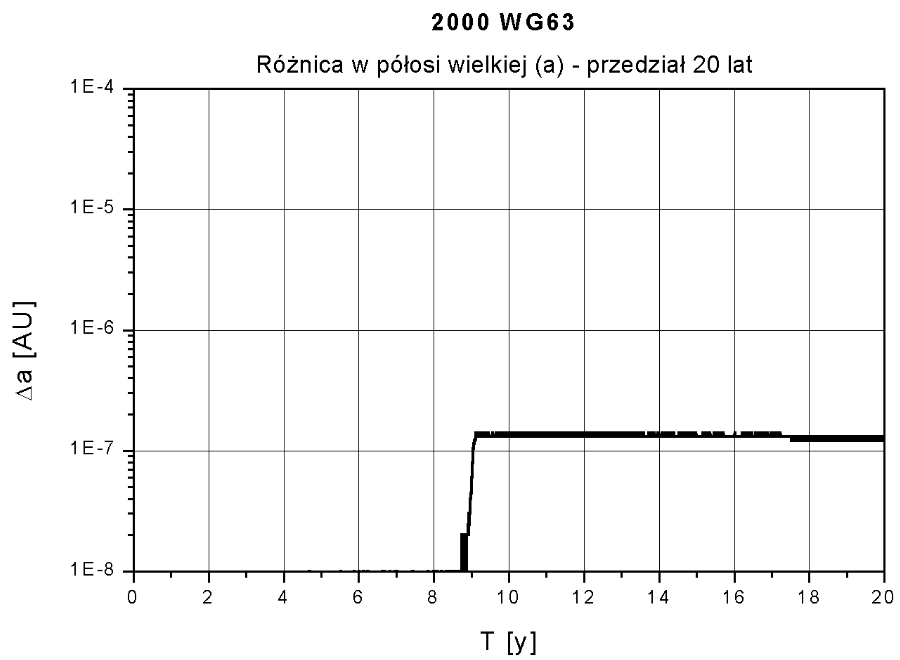
Rysunek 4.21: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 2000 WG63.



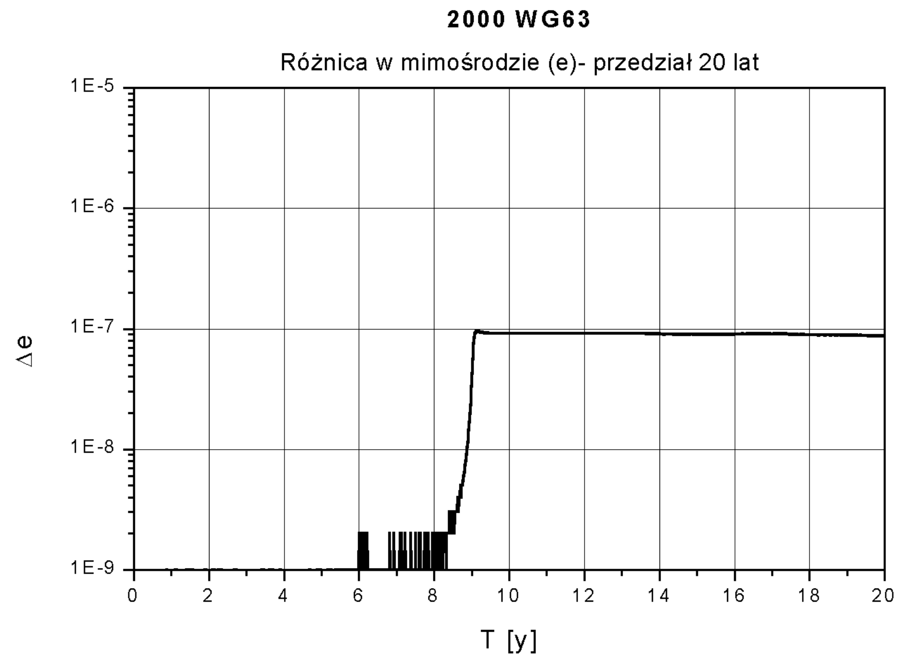
Rysunek 4.22: Krzywa odległości do Ceres i Hygiei - pierwsze 20 lat całkowania obiektu 2000 WG63.



Rysunek 4.23: Różnica $|\vec{\Delta r}|$ w położeniach ciała przy zastosowaniu modeli dynamicznych MB i BIG4 - pierwsze 20 lat całkowania obiektu 2000 WG63.



Rysunek 4.24: Absolutne różnice w otrzymanej półosi wielkiej ($|\vec{\Delta a}|$) planetki 2000 WG63 na skutek zastosowania modeli dynamicznych MB i BIG4 - przedział 20 lat całkowania.



Rysunek 4.25: Absolutne różnice w mimośrodzie planetki 2000 WG63 - przedział 20 lat całkowania.

4.5 Wnioski

Różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi przy użyciu modeli dynamicznych MB i BIG4 dla planetoid zbliżających się do Ziemi okazały się trudne do wykrycia i oszacowania. Obecność dodatkowych czterech ciał zaburzających rzadko zmienia trajektorie w sposób znaczący w skali czasu 100 lat.

Planetoidy NEA rzadko zbliżają się do Ceres, Pallas, Vesty czy Hygiei. Jeśli już takie zbliżenia następują, nie zachodzą w strefie Hilla tych planetoid i nie mają charakteru takiego, jak zbliżenia planetoid do planet. Perturbacje od dużych planetoid nie dokonują również wielkich zmian w elementach orbit NEA. Jednak z punktu widzenia wymagań stawianych współczesnej astrometrii, misjom kosmicznym i przewidywaniom kolizji planetoid z Ziemią, perturbacje te mogą być istotne w tych zastosowaniach. Dla misji kosmicznych, w których przewidziane jest lądowanie albo kontrolowana kolizja z małym ciałem (np. STARDUST, ROSETTA, DEEP IMPACT) błąd rzędu metrów jest w zasadzie niedopuszczalny. W przypadku przewidywania przyszłych kolizji małych ciał z planetami błędy na poziomie tysięcy kilometrów są również nieakceptowalne. Zastosowanie modelu dynamicznego pozbawionego największych planetoid stwarza ryzyko wystąpienia takich błędów.

Uwaga ta dotyczy jednak przypadków szczególnych, których znaleziono bardzo niewiele. Dla większości obiektów NEA efekty te będą zapewne na poziomie zbliżonym do błędów obserwacyjnych. Dla planetoid, których orbity mają tak małą odległość aphelium, że nie zbliżają sie nawet do Marsa nie warto stosować modelu BIG4.

Wprowadzenie do modelu dodatkowych zaburzeń grawitacyjnych od czterech dużych planetoid bardzo rzadko zmienia otrzymane położenia o wartości większe, niż dziesiątki tysięcy kilometrów w okresie czasu 100 lat. Świadczy o tym zaledwie 13 obiektów wyłonionych z populacji 651 NEA, dla których różnice wynosiły więcej, niż $10^{-4} AU$. Jest to rząd wielkości odpowiadający średnicy Ziemi, taka dokładność wyznaczenia pozycji ciała na orbicie może więc być ważna przy przewidywaniu kolizji z planetami. Z punktu widzenia analizy ewolucji i statystycznych badań dużej populacji planetoid NEA, zaburzenia od masywnych planetoid nie mają tak istotnego znaczenia, jak np. omówiona wcześniej obecność Księżyca.

Rozdział 5

Rola modelu dynamicznego w określaniu stabilności orbit

5.1 Orbity chaotyczne – wprowadzenie

Przy badaniu ewolucji jakiegokolwiek układu dynamicznego istotną rolę ma określenie jego stabilności. Pojęcie chaosu można najkrócej zdefiniować jako wykładniczą wrażliwość układu na niewielkie zaburzenie warunków początkowych. Trajektorie ciał naszego układu planetarnego często wykazują takie właściwości i mówimy wtedy o orbitach chaotycznych. W układach chaotycznych nie jest możliwe długookresowe prognozowanie ich zachowania. W przypadku orbity chaotycznej dynamiczna przyszłość ciała niebieskiego jest trudna do przewidzenia. Istnieją rozmaite metody jakościowe i ilościowe wykrywania chaosu w zagadnieniach mechaniki, opierające się na badaniu ewolucji ciał niebieskich (Knezević, 2000). Powszechną i podstawową metodą ilościową jest określenie chaotyczności orbity w sensie Lapunowa[1], które pozwala na oszacowanie tempa rozbieżności nieznacznie różniących się trajektorii. Posiadając tę informację, możemy w przybliżeniu oszacować, na ile dokładne mogą być wyniki symulacji numerycznych ruchu orbitalnego na długich okresach czasu.

Jest to szczególnie interesujące w przypadku obiektów NEA, bo w związku z licznymi ciasnymi zbliżeniami do planet wewnętrznych ich orbity są mało stabilne. W pracy badane są obiekty, które zbliżają się do układu Ziemia-Księżyc i dużych planetoid na niewielkie odległości i dlatego można się spodziewać wpływu tych dodatkowych perturbacji na stabilność ich orbit. Dodatkowo, wybór modelu dynamicznego z dodatkowymi siłami zaburzającymi może potencjalnie zmienić oszacowania stabilności wybranych orbit, a więc doprowadzić do innych konkluzji. Podobnie może się stać w przypadku ba-

[1]W literaturze istnieje bardzo duża rozbieżność na temat transkrypcji nazwiska Lapunow, dlatego w pracy zdecydowano się na używanie popularnej spolszczonej formy (wyjątkowo, przy cytowaniu skrótów anglojęzycznych – *Lyapunov).*

dania wiekowych zmian w elementach orbity, np. przy określaniu tempa precesji linii apsyd i węzłów, a więc w zagadnieniach rezonansów wiekowych. W niniejszym rozdziale przedstawionych jest kilka przykładów, które mogą wskazywać na możliwość wpływu wybranego modelu na otrzymane wyniki dotyczące chaosu.

5.2 Wykładniki Lapunowa – metody obliczeniowe

Uproszczona idea wyznaczenia wykładnika Lapunowa polega na rozseparowaniu dwóch trajektorii o niewielką wartość wektora $|\vec{d_0}|$, zbadania ruchu w interwale czasu $< t_0, t >$ i określenia końcowej separacji $|\vec{d}|$ (Rys. 5.1). Jeżeli wartość γ^2 jest większa od zera, oznacza to, ze trajektorie „rozbiegają się wykładniczo" w tempie określonym przez ten współczynnik, zgodnie ze wzorem

$$|\vec{d}| = |\vec{d_0}| \cdot e^{\gamma(t-t_0)}, \tag{5.1}$$

z czego wynika, że wykładnik Lapunowa γ wynosi

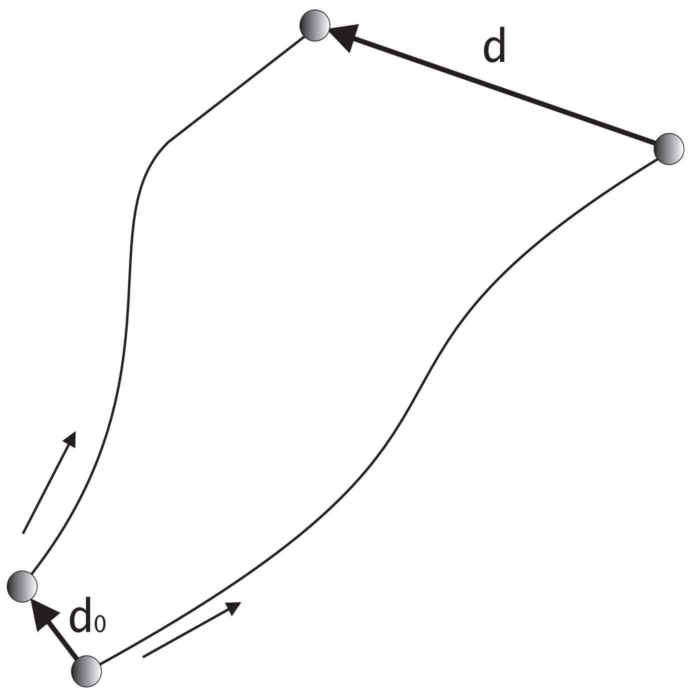
$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(|\vec{\mathrm{d}}|/|\vec{\mathrm{d}_0}|)}{(t-t_0)}. \tag{5.2}$$

Często definiuje się również czas Lapunowa LT (*Lyapunov Time*), który jest odwrotnością wykładnika Lapunowa. Większa wartość czasu Lapunowa (mniejszy wykładnik) oznacza stabilniejszą trajektorię. Po upływie czasu Lapunowa separacja między bliskimi trajektoriami rośnie e-krotnie.

Wykładnik Lapunowa jest wielkością asymptotyczną zdefiniowaną dla $t \to \infty$. W niniejszej pracy tym terminem określone są wyniki wyznaczenia estymatorów wykładnika Lapunowa, które określone są w oparciu o wyniki całkowania numerycznego na skończonym interwale czasu. Należy pamiętać, że estymatory LCE i odpowiadające im czasy Lapunowa są dosyć przybliżonym oszacowaniem. Chaotyczne własności ruchu orbitalnego zmieniają się niekiedy w bardzo długich skalach czasu, kiedy ciało w ruchu orbitalnym napotyka na obszary bardziej lub mniej stabilne.

W przypadku ruchu orbitalnego mamy do czynienia z układem wielowymiarowym, opisanym przez 6 parametrów, którymi mogą być położenia i prędkości albo równoważne im elementy orbitalne. Ponieważ kierunek rozbieżności wektora $\vec{d_0}$ nie jest znany z góry, należy badać ruch wzdłuż całej trajektorii na małych interwałach czasu (Rys. 5.2). Procedura iteracyjnego wyznaczania największego wykładnika Lapunowa dla orbity wygląda następująco (Sprott, 1998):

[2]Spotyka się równoważny skrót LCE – *Lyapunov Characteristical Exponent*



Rysunek 5.1: Bezposrednie wyznaczanie wielkości LCE (γ).

1. Definiujemy wektor separacji $\vec{d_0}$ w 6-wymiarowej przestrzeni położeń i prędkości lub elementów. Optymalnym wyborem dla $|\vec{d_0}|$ jest wartość ok. 1000 razy większa od założonej precyzji obliczeń. Następnie dokonujemy separacji dwóch trajektorii o wartość wektora $\vec{d_0}$.

2. Całkujemy równania ruchu na małym interwale czasu Δt i obliczamy końcowe składowe wektora separacji w 6 wymiarach.

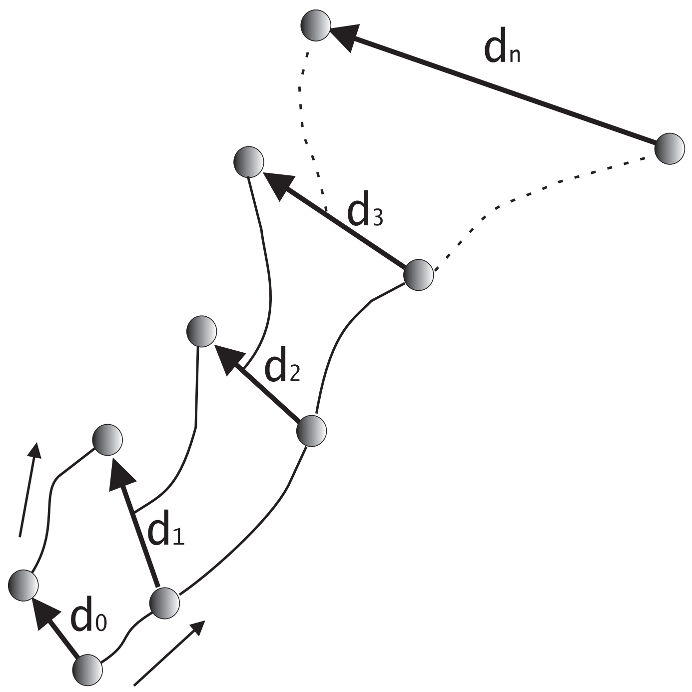
3. Obliczamy i-ty składnik sumy, która posłuży do wyznaczenia wykładnika Lapunowa:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(|\vec{\mathrm{d_i}}|/|\vec{\mathrm{d_0}}|)}{n\Delta t}. \tag{5.3}$$

4. Dokonujemy renormalizacji wektora separacji (skrócenia z zachowaniem kierunku) wzdłuż jego długości do wartości $|d_0|$.

5. Wracamy do punktu 2 i powtarzamy procedurę, z każdym razem obliczając składniki sumy z punktu 3, aż do osiągnięcia ewentualnej zbieżności.

Omówiona procedura jest w zasadzie śledzeniem dwóch orbit z wyznaczaniem średniego tempa ich „rozbiegania". Zbieżność wyników pozwalającą na



Rysunek 5.2: Wyznaczanie wielkości LCE (γ) metodą renormalizacji.

wyznaczenie γ z dokładnością rzędu 2-3 cyfr znaczących zazwyczaj można osiągnąć (wg Sprotta) po kilku tysiącach iteracji. Oczywiście jest to uzależnione od konkretnych właściwości układu. W przypadkach omówionych poniżej udało się określić średnie tempo ekspansji bliskich trajektorii w czasie ok. 100 000 lat.

Obserwując zależność cząstkowych wartości LCE od czasu na wykresie o skalach logarytmicznych, można zauważyć różnicę między trajektoriami regularnymi a chaotycznymi (Murray, Dermott, 1999). Dla orbity regularnej wykres będzie miał nachylenie ujemne, natomiast dla chaotycznej wartości będą się stabilizować (zbiegać) na pewnym poziomie.

Wyznaczanie estymatorów wykładników Lapunowa jest metodą czasochłonną, ale pozwalającą na ilościowe badanie chaosu. Zaprezentowana metoda jest przykładem podstawowym i względnie łatwym w zastosowaniu numerycznym.

5.3 Model układu Ziemia-Księżyc a oszacowanie stabilności orbit wybranych planetoid.

5.3.1 Dane i metody obliczeniowe

Przy omawianiu zastosowania różnych modeli dynamicznych perturbacji w ruchu małych ciał bardzo istotne jest określenie stabilności ich orbit. Stabilność tę można określić za pomocą wspomnianych wyżej metod, obliczając wykładniki i czasy Lapunowa dla badanych planetoid. Ponieważ praca omawia przypadki szczególne orbit NEA, należy spodziewać się niewielkiej stabilności omówionych „ciał testowych". Planetoidy NEA mają w wielu przypadkach czasy Lapunowa rzędu dziesiątek lat (Whipple, 1995). W praktyce to oznacza, że nawet niewielki błąd w wyznaczeniu ich orbity przy badaniu ich ewolucji będzie się podwajał po czasie rzędu dziesiątek lat.

W celu zbadania wpływu użytego modelu na wyniki zastosowano metodę wyznaczania wykładników Lapunowa wspomnianą wyżej metodą renormalizacji. Zastosowano ją do 26 planetoid NEA, dla których wpływ perturbacji księżycowych był najbardziej istotny (Tab. 5.1). Orbity pierwszych siedmiu z nich były omawiane dokładniej w rozdziale 3 (Tab. 3.1 na str. 45). Dołączono do nich dla porównania 19 dodatkowych planetek typu Apolla, Amora i Ateny, dla których wpływ Księżyca był nieco mniejszy (ale najistotniejszy dla wybranej grupy). Następnie obliczono czasy Lapunowa z zastosowaniem modelu MB i MZK.

5.3.2 Wyniki

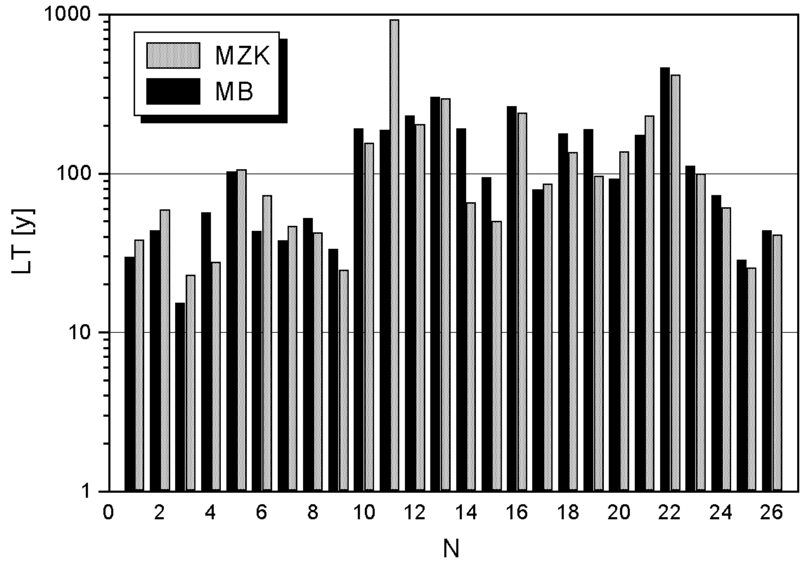
Czasy Lapunowa dla 26 wybranych orbit określone za pomocą dwóch modeli dynamicznych są przedstawione w Tab. 5.2 oraz na Rys. 5.3. Ponieważ czasy Lapunowa są oszacowaniem bardzo przybliżonym, większość z otrzymanych wyników można interpretować jako równoważne. Oznacza to, że zastosowanie modelu MZK zamiast MB zasadniczo nie zmienia naszych wyobrażeń o stabilności badanej orbity. Tak się dzieje w przypadku orbit planetoid: 1995 UB, 3122 Florence, 1994 LY czy też 1995 LA, dla których różnice w czasach Lapunowa nie przekraczają kilku procent. Pomimo, że zaburzenia od podwójnego układu Ziemia - Księżyc odgrywają w ich ruchu istotną rolę, nie mają one żadnego wpływu na jego stabilność. Największą różnicę w czasach Lapunowa odnotował obiekt 1943 Anteros, w którego przypadku dla modelu MZK oszacowano czas Lapunowa jako 4.9-krotnie dłuższy (w oparciu o skończony przedział czasu 10^5 lat). Chwilowe wartości LCE obliczone w obydwóch przypadkach dla tej planetoidy obrazują Rys. 5.4 i 5.5. Przy zastosowaniu modelu MB wartości LCE szybciej stabilizują się na pewnym poziomie, co można zinterpretować jako bardziej chaotyczne zachowanie badanej trajektorii. Dlatego wartość oszacowana wartość LT jest mniejsza (wskazuje na

Tablica 5.1: Elementy orbitalne 26 wybranych „ciał testowych” (epoka oskulacji = 2451800.5). Pierwsze 7 planetoid zostało zamieszczone wcześniej w Tab. 3.1 jako najbardziej „wrażliwe” na zastosowanie modelu MZK. Liniami poziomymi zostały rozdzielone ciała z grup Apollo, Amora i Ateny.

Obiekt	M	ω	Ω	i	e	a
4581 Asclepius	101.215427	255.084739	180.521441	4.909830	0.35681206	1.02180089
4660 Nereus	95.234694	157.922770	314.752034	1.423832	0.36024680	1.48963990
1991 VG	132.707601	24.530938	73.965448	1.445878	0.04913300	1.02691827
1993 KA	87.918172	341.940491	235.877686	6.044502	0.19761648	1.25541684
1995 UB	15.457011	112.305279	204.276409	8.971842	0.41204103	1.40022604
1996 GF17	288.211569	344.528498	29.698983	17.153012	0.29564015	1.02809749
1997WQ23	106.918550	296.238442	56.094954	2.452544	0.49442120	1.73605995
1997 XF11	306.037278	102.472173	214.116699	4.095382	0.48356139	1.44178644
1998 KY26	212.571599	209.167862	84.452829	1.481157	0.20147964	1.23195728
1999 AN10	293.808101	268.292864	314.508257	39.931170	0.56217142	1.45869958
1943 Anteros	359.730780	338.233148	246.431439	8.705398	0.25603801	1.43009639
2061 Anza	259.101582	156.421310	207.787609	3.766109	0.53666768	2.26585546
3122 Florence	273.485204	27.591314	336.211607	22.172158	0.42257044	1.76884029
1985 WA	38.254474	351.153960	43.653306	9.803336	0.60698519	2.83133079
1993 BD3	241.985593	168.604349	313.882710	0.884247	0.37307807	1.62952920
1994 LY	105.474443	202.655506	141.219774	17.781569	0.44420146	1.89647027
1995 LA	249.414212	17.478268	247.771648	8.699697	0.52042192	2.12504151
1996 MQ	44.121661	28.471178	262.908082	3.476484	0.57132465	2.40181502
1998 KJ17	296.910315	163.973049	76.100347	9.157153	0.48374014	1.98681828
1998 MX5	150.643549	55.698717	266.611479	9.707346	0.61153773	2.91745761
1999 RJ33	242.429725	27.210965	343.226757	18.505500	0.18860085	1.25378820
1999 VG22	90.570138	222.469976	271.500536	2.852951	0.32974179	1.64692366
2000 CK59	128.856570	341.091691	139.430174	5.689946	0.31254518	1.47918436
2340 Hathor	6.372981	39.814022	211.629521	5.850352	0.45001337	0.84374811
1989 UQ	5.721623	14.925192	178.420051	1.291061	0.26466592	0.91481407
2000 BM19	125.236260	247.254828	70.751879	6.891492	0.35840944	0.74127403

Tablica 5.2: Czasy Lapunowa planetek NEA (w latach) uzyskane z użyciem modelu MB (LT_{MB}) oraz modelu MZK (LT_{MZK}). W związku z brakiem wyraźnej zbieżności wartości LCE dla planetoidy 1943 Anteros (11) wynik należy zinterpretować jako $LT \geq 927.2$.

Obiekt	LT_{MB}	LT_{MZK}
1. 4581 Asclepius	29.7	38.1
2. 4660 Nereus	43.7	58.7
3. 1991 VG	15.3	22.9
4. 1993 KA	56.6	27.8
5. 1995 UB	102.6	106.2
6. 1996 GF12	43.1	72.5
7. 1997 WQ23	37.7	46.6
8. 1997 XF11	52.0	42.2
9. 1998 KY26	33.5	24.7
10. 1999 AN10	190.9	155.6
11. 1943 Anteros*	187.1	$\geq$ **927.2**
12. 2061 Anza	230.2	204.1
13. 3122 Florence	299.8	294.9
14. 1985 WA	190.3	65.6
15. 1993 BD3	94.5	49.9
16. 1994 LY	262.0	240.7
17. 1995 LA	78.8	86.2
18. 1996 MQ	176.6	135.8
19. 1998 KJ17	188.9	95.9
20. 1998 MX5	92.8	137.3
21. 1999 RJ33	173.4	229.2
22. 1999 VG22	461.9	415.2
23. 2000 CK59	110.8	99.8
24. 2340 Hathor	72.4	60.9
25. 1989 UQ	28.5	25.6
26. 2000 BM19	43.5	41.0



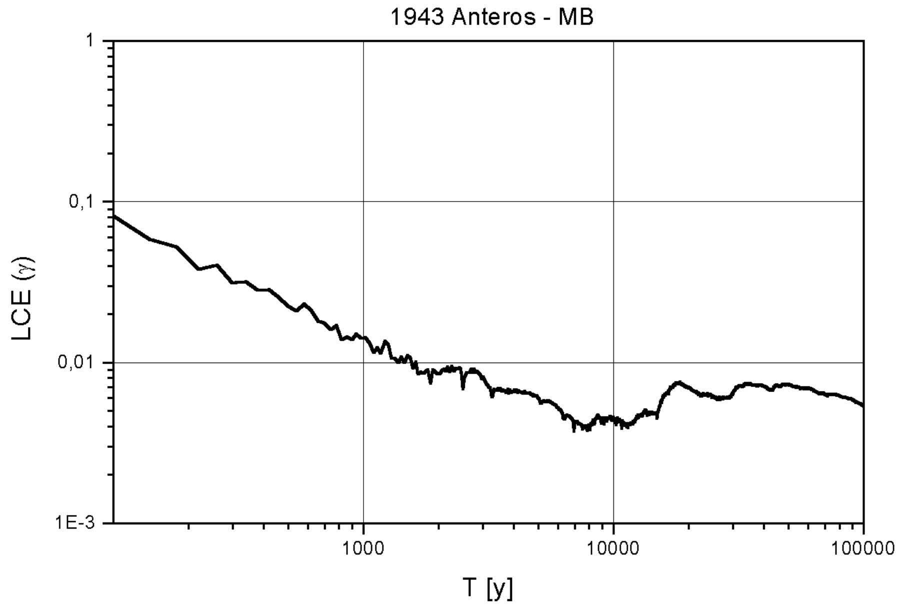
Rysunek 5.3: Wyniki wyznaczeń czasu Lapunowa (LT) metodą renormalizacji za pomocą modeli dynamicznych MB (kolor czarny) i MZK (kolor szary) dla 26 planetoid typu NEA.

mniejszą stabilność na badanym interwale czasu). Wykres chwilowych wartości LCE dla modelu MZK (Rys. 5.5) wskazuje na bardziej regularny charakter ruchu – uzyskanie ewentualnej zbieżności wymagałoby prawdopodobnie dłuższego procesu obliczeniowego. Z kolei dla orbity planetki 1985 WA otrzymano dla modelu MZK czas Lapunowa ok. trzykrotnie krótszy (Rys. 5.6 i 5.7 obrazują chwilowe wartości LCE).

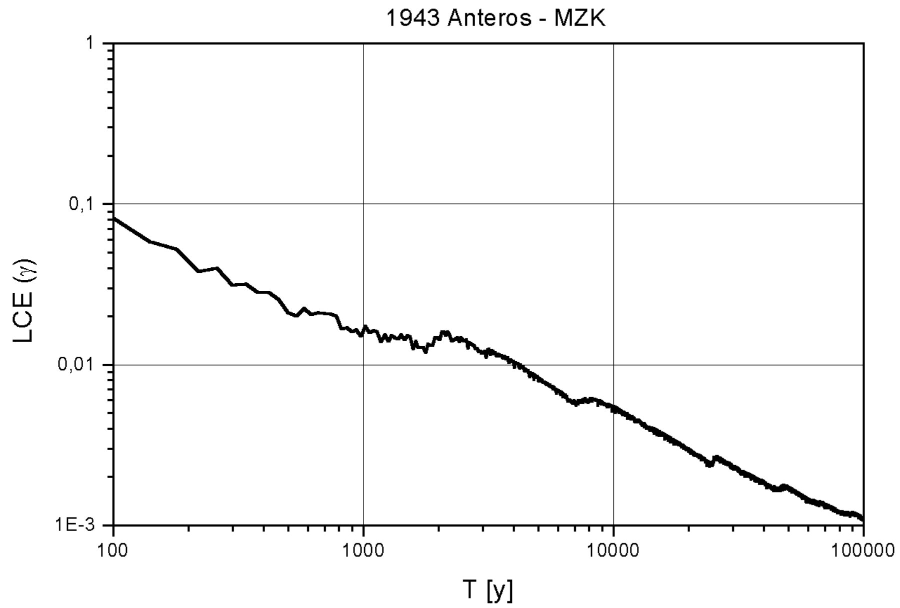
Wszystkie wyznaczone czasy Lapunowa są dosyć krótkie i są zbliżone do wartości wyznaczonych przez Whipple'a (1995). W większości przypadków są rzędu dziesiątek lat. Potwierdzony został również fakt, że orbity Aten (3 ostatnie ciała) są na ogól mniej stabilne. Czas Lapunowa jest na ogół krótszy dla orbit o małych półosiach wielkich. Uwaga ta dotyczy również orbit o dużych mimośrodach.

Interesującym przypadkiem jest obiekt 1991 VG o bardzo niestabilnej orbicie, który regularnie w swoim ruchu zbliża się do Ziemi. Każde niewielkie zaburzenie d_0 w jego trajektorii w ciągu 50 lat rośnie niemal 9-krotnie. Dlatego przewidywanie jego ruchu w skali czasu najbliższych stu lat jest bardzo utrudnione, dodatkowo niezbędne jest w nim uwzględnienie Księżyca.

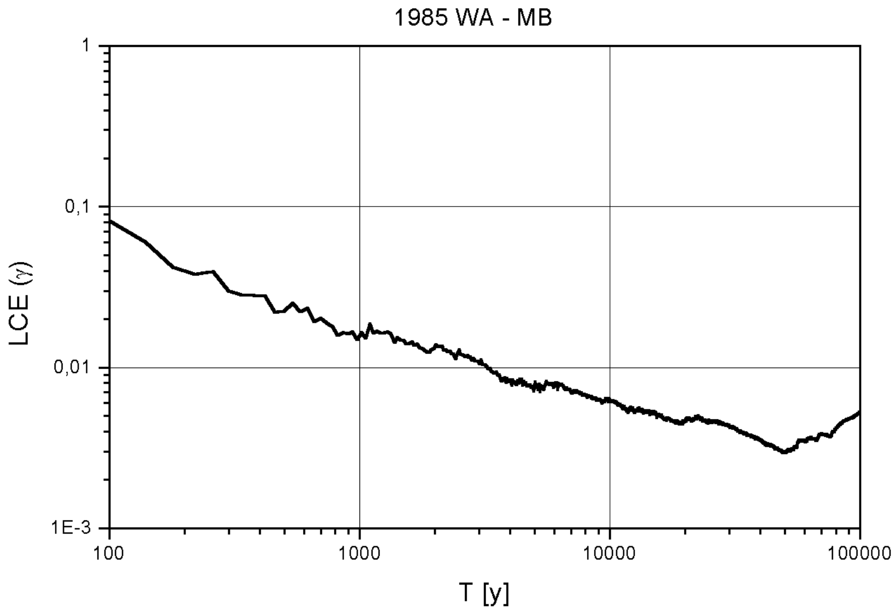
Zastosowanie modelu MZK może nieco zmienić nasze wyobrażenie o stabilności konkretnej orbity planetoidy NEA, ale nie odnotowano bardzo dużych różnic dla badanych ciał testowych. Układ Ziemia-Księżyc w zasadzie



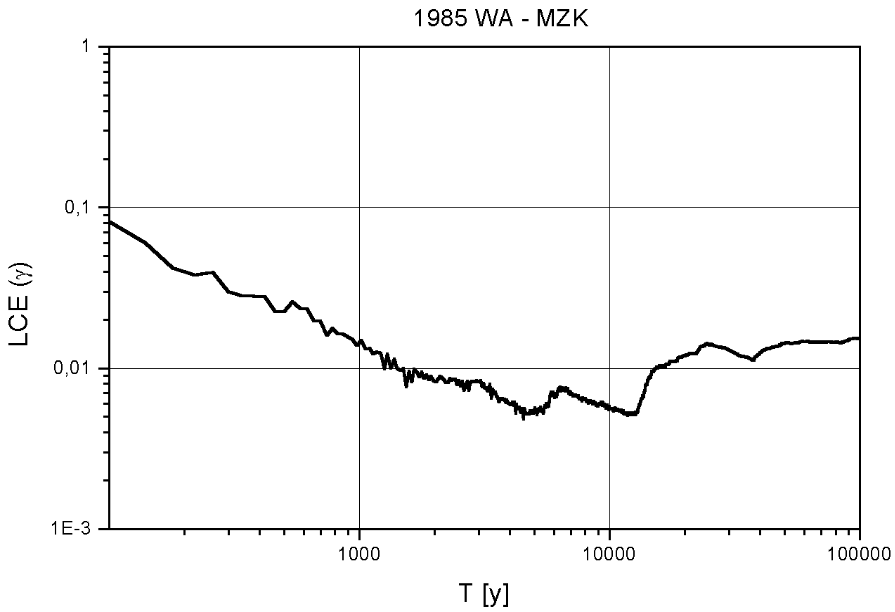
Rysunek 5.4: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1943 Anteros (model MB)



Rysunek 5.5: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1943 Anteros (model MZK)



Rysunek 5.6: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1985 WA (model MB)



Rysunek 5.7: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1985 WA (model MZK)

tylko w wyjątkowych przypadkach może wpłynąć na stabilność ruchu orbitalnego, w badanych przypadkach były to zmiany nieznaczne.

5.4 Wpływ użycia modelu zawierającego największe planetoidy na oszacowaną stabilność orbit wybranych planetek NEA.

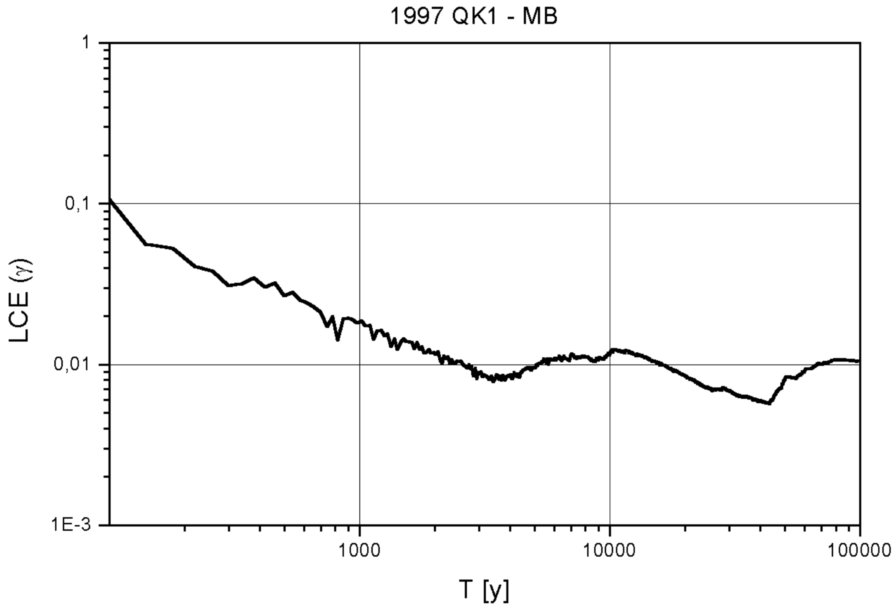
5.4.1 Dane początkowe

W obliczeniach omówionych szczegółowo w rozdziale 4 badano populację orbit 651 ciał testowych zbliżających się potencjalnie do Ziemi i największych planetoid. Wyselekcjonowano spośród nich grupę 13 ciał, dla których zaburzenia od masywnych planetoid zostały przeanalizowane dokładniej. Obiekty te zostały zestawione w Tab. 4.2 na str. 70. Te same dane początkowe zostały wykorzystane w określaniu stabilności tych planetoid. Stosując modele dynamiczne MB i BIG4 obliczono maksymalne wykładniki i czasy Lapunowa dla tych planetoid. Podobnie, jak poprzednio zrobiono to metodą renormalizacji wektora d_0.

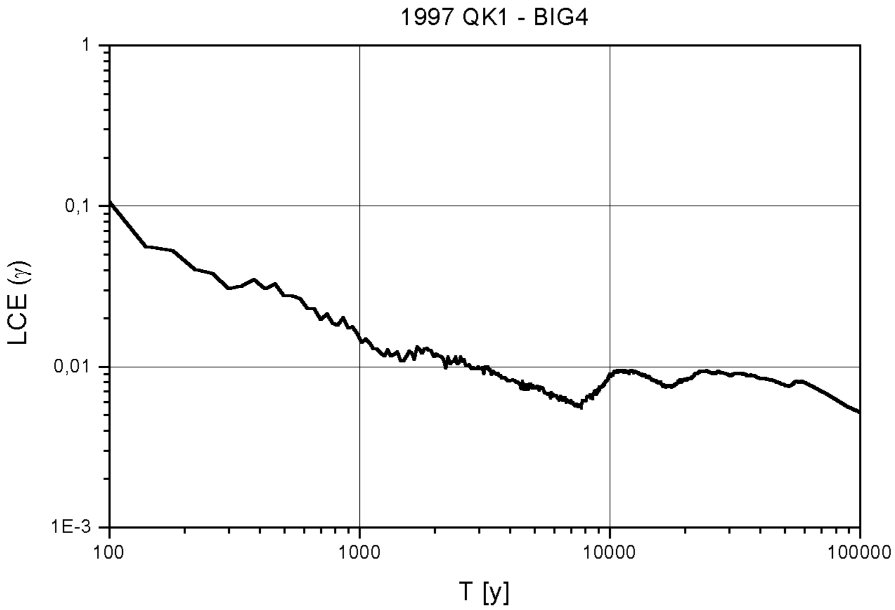
5.4.2 Wyniki

Stabilność badanych 13 orbit okazała się w większości przypadków rzędu dziesiątek lat. Najmniej stabilne okazały się orbity planetek 1991 BA , 1994 ES1 i 1997 WQ23 (czasy Lapunowa około 30–40 lat). Ponieważ perturbacje pochodzące od masywnych planetoid okazały się niewielkie, należało spodziewać się bardzo zbliżonych wyników dotyczących stabilności. W większości przypadków wyznaczone czasy Lapunowa były bardzo podobne (Tab. 5.3 i Rys. 5.12). Jedynie w przypadku orbity planetki 1997 QK1, przy włączeniu do obliczeń perturbacji od Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei otrzymany czas Lapunowa okazał się ponad dwukrotnie dłuższy. Dla obiektu 1997 WQ23 otrzymano z kolei 1.7-krotnie krótszą wartość LT. Podobnie, jak w dwóch przypadkach z poprzedniego podrozdziału, zachowanie (zbieganie się w czasie) chwilowych wartości wykładników Lapunowa jest uzależnione od użytego modelu (Rys. 5.8, 5.9 i odpowiednio Rys. 5.10, 5.11).

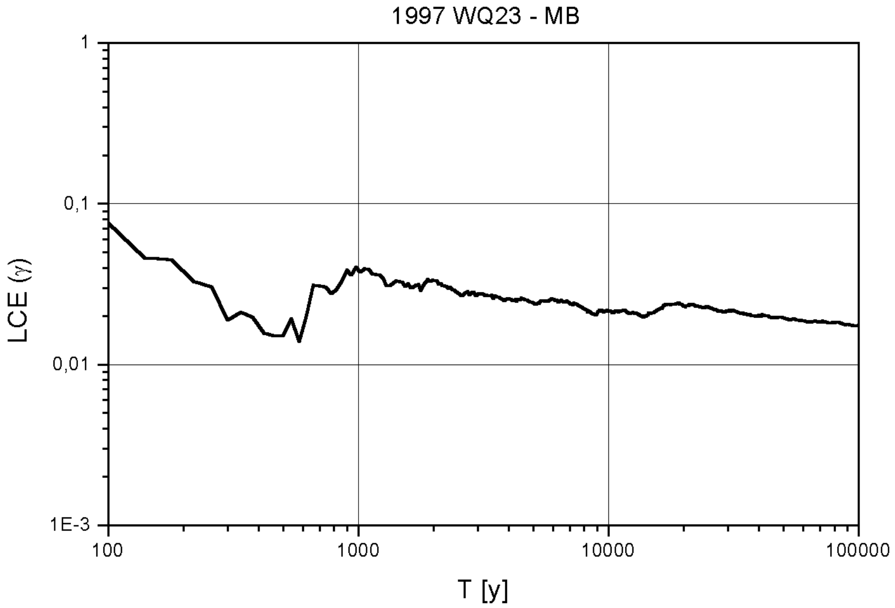
Również w przypadku obiektu 2000 VN2 otrzymano nieco różniącą się wartość LT – należy nadmienić, że była to orbita najbardziej stabilna z badanych. Podczas wyznaczania czasu Lapunowa dla tej orbity odnotowano bardzo wiele zbliżeń do czterech dużych planetoid, w szczególności do Ceres. Regularnie powtarzające się zbliżenia są mierzalnym czynnikiem zmieniającym stabilność orbity. Oprócz zbliżeń nie udało się wykryć innych czynników związanych z masywnymi planetoidami, mogących wpłynąć na stabilność badanych orbit. Nie zauważono wpływu rezonansów w ruchu średnim z dużymi



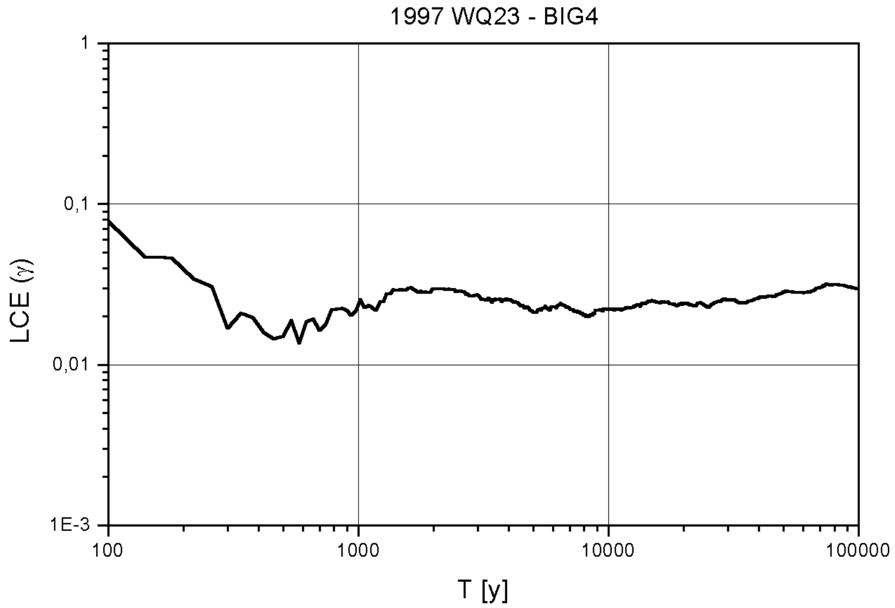
Rysunek 5.8: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1997 QK1 (model MB)



Rysunek 5.9: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1997 QK1 (model BIG4)



Rysunek 5.10: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1997 WQ23 (model MB)



Rysunek 5.11: Zbieżność wykładników Lapunowa dla planetki 1997 WQ23 (model BIG4)

Tablica 5.3: Czasy Lapunowa planetek NEA (w latach) uzyskane z użyciem modelu BIG4 (LT_{BIG4}) oraz modelu MB (LT_{MB}).

Obiekt	LT_{BIG4}	LT_{MB}
1. 1990 BG	98.4	107.1
2. 1991 BA	33.2	39.3
3. 1994 ES1	36.6	28.1
4. 1994 VH8	50.5	79.5
5. 1994 XD	67.5	77.9
6. 1997 QK1	192.9	95.5
7. 1997 UR	53.0	52.5
8. 1997 WQ23	33.9	57.3
9. 1997 XF11	45.8	46.1
10. 1999 MM	44.9	40.8
11. 2000 VN2	1041.4	782.9
12. 2000 WG63	282.3	256.2
13. 2001 DZ76	75.7	60.6

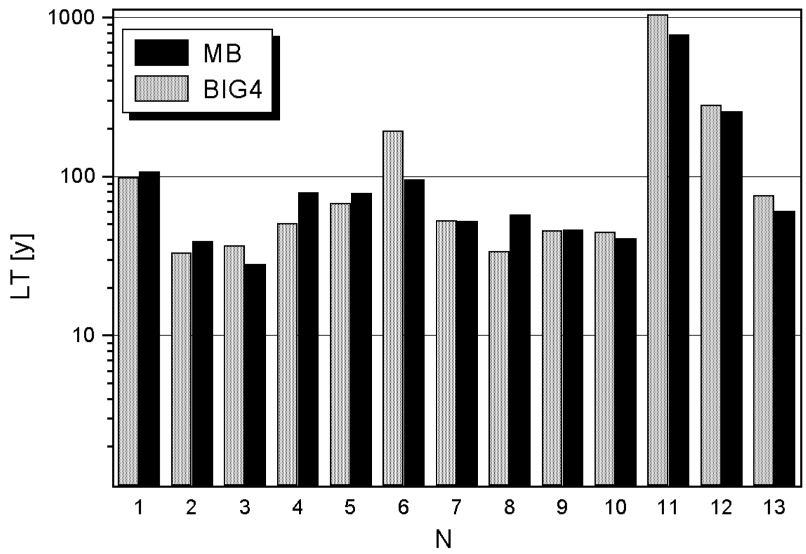
planetkami, który mógłby ewentualnie decydować o stabilności ruchu. Istotną rolę odegrały zbliżenia oraz rola pośrednich perturbacji – oddziaływania dodatkowych czynników zaburzających na orbitę Marsa, do którego zbliżały się niektóre z badanych ciał.

Obecność Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei niewiele zmienia w jakościowym obrazie stabilności wybranych planetoid NEA. Jest ona istotna w przypadku precyzyjnego przewidywania niektórych trajektorii, natomiast nie wpływa znacząco na wnioski dotyczące stabilności.

5.5 Wnioski

Orbity planetoid-ciał testowych, które zostały szczegółowo przeanalizowane w pracy są w ogólności mało stabilne. Większość z nich ma czasy Lapunowa ok. kilkudziesięciu lat. Dlatego prognozowanie przyszłego ruchu takich obiektów napotyka na trudności i jest obarczone dużym błędem. Większość oszacowań dotyczących parametrów ich przyszłych zbliżeń do planet należy traktować z dużą ostrożnością w związku z lawinową propagacją niewielkich błędów początkowych. Wiele z nich zostało odkrytych niedawno i z powodu niewielkiej ilości obserwacji orbity są wyznaczone z gorszą dokładnością. W pracy są one traktowane wyłącznie jako dane, zaadoptowane do testów zastosowania modeli dynamicznych (ciała testowe).

Komplikacja modelu dynamicznego, a więc uwzględnianie perturbacji od



Rysunek 5.12: Wyniki wyznaczeń czasu Lapunowa (LT) metodą renormalizacji za pomocą modeli dynamicznych MB (kolor czarny) i BIG4 (kolor szary) dla 13 planetoid typu NEA.

rozdzielonego Księżyca lub dodanie do modelu największych planetoid nie zmienia znacząco wyników oszacowań stabilności. W większości przypadków wartości LCE zbiegały się do pewnych wartości na badanym przedziale czasu (100 tysięcy lat) i przy zmianie modelu dynamicznego osiągano porównywalne rezultaty. Jako porównywalne można w przypadku takich obliczeń uważać wyniki zgodne co do rzędu wielkości dla otrzymanego czasu Lapunowa. Wyjątkami są zademonstrowane przykłady planetek: 1943 Anteros, 1985 WA, 1997 QK1 i 1997 WQ23.

Generalnie, wpływ Księżyca zmienił otrzymane wyniki nieco bardziej, niż cztery duże planetoidy. Stało się tak tylko w kilku jednostkowych przypadkach. Wyniki otrzymane w poprzednich rozdziałach zostały w pewien sposób potwierdzone – perturbacje od rozdzielonego układu Ziemia-Księżyc mają większy wpływ na ruch planetoid NEA, niż cztery największe planetoidy.

Badanie chaosu jako jakościowej cechy ruchu orbitalnego również wymaga przemyślanego wyboru modelu zaburzeń występujących w zagadnieniu. Badane efekty zaburzające ruch mają czasem charakter regularny (np. poprzez cykliczne zbliżenia), a więc mogą wpływać na oszacowanie stabilności orbit.

Rozdział 6

Podsumowanie i wnioski końcowe

Badania przeprowadzone w niniejszej pracy skoncentrowały się na problemie wyboru właściwej metody numerycznej i odpowiednio skonstruowanego modelu dynamicznego Układu Słonecznego w badaniach dynamiki planetoid zbliżających się do Ziemi (NEA). Skupiono się przede wszystkim na przeanalizowaniu takich orbit planetoid, które sprawiają pewne problemy dla metod numerycznych oraz takich, dla których decyzja o użytym modelu zaburzeń staje się istotna.

Przedstawione w rozdziale 2 testy metod numerycznych potwierdziły fakt, że nowoczesne metody działające przy wsparciu algorytmów symplektycznych nie mają znaczącej przewagi szybkości i dokładności nad klasycznymi metodami zmiennokrokowymi w badanych zagadnieniach. Ruch orbitalny małego ciała układu, w którym zachodzą ciasne zbliżenia do planet wciąż sprawia problemy współczesnej mechanice nieba. Przykładem mogą być planetoidy zbliżające się do Ziemi na bardzo małe odległości – np. 1993 KA, 1997 XF11 czy 1999 AN10. Dla tych orbit niektóre metody numeryczne okazały się bardziej zawodne w dokładności. Najlepsze w testach okazały się metody RMVS3 i RA15, dlatego wyniki otrzymane za ich pomocą potraktowano w pracy jako najbardziej wiarygodne.

Analiza zastosowania modelu dynamicznego z rozdzieloną Ziemią i Księżycem (MZK), zamieszczona w rozdziale 3 pracy pozwoliła na znalezienie szczególnych przypadków orbit NEA. Spośród 1083 planetoid wydzielono 26 obiektów, dla których perturbacje od wydzielonego Księżyca wpływają znacząco na ich dynamikę i opisano szczegółowo 7 najciekawszych przypadków. Kryterium wyboru stanowiła opisana w pracy wartość odchyleń w położeniach $|\vec{\Delta r}|$ po 100 latach całkowania równań ruchu, która dla 13 planetek typu Apollo i Ateny przekroczyła wartość $10^{-2}AU$ (w tym dla siedmiu ponad $10^{-1}AU$), a dla 13 planetek grupy Amora zawarła się w przedziale $10^{-4} - 10^{-2}AU$. Znaczący wpływ modelu MZK dotyczy zatem bardzo niewielkiego odsetka populacji NEA i dotyczy on przede wszystkim planetek grupy Apollo, które odnotowują zbliżenia w odległościach porównywalnych z separacją układu Ziemia-Księżyc, zachodzące ze względnymi prędkościami ok. 10 km/s lub mniejszymi. Przy wyznaczaniu trajektorii tych obiektów należy bezwzględnie stosować model zaburzeń MZK.

W rozdziale 4 testowano zastosowanie modelu układu z czterema największymi planetoidami (BIG4). Wychodząc z założenia, że mogą one zaburzać ruch planetoid NEA na orbitach silnie ekscentrycznych, sięgających do pasa głównego, wydzielono z populacji 1333 planetoid 651 obiektów o orbitach z odpowiednio dużym mimośrodem. Opisano 13 najciekawszych przypadków orbit, które mogą być perturbowane przez duże planetoidy. Wartość $|\vec{\Delta r}|$ po 100 latach dla tych przypadków wynosiła niewiele ponad $10^{-4}AU$. Odpowiada to błędowi w położeniach ciała rzędu średnicy Ziemi w ciągu stu lat. Świadczy to o niewielkim efekcie zaburzającym ze strony największych planetoid. Ponadto nie odnotowano ciasnych zbliżeń planetoid NEA do Ceres, Pallas, Vesty i Hygiei ani wyraźnej korelacji wartości $|\vec{\Delta r}|$ ze zbliżeniami poza przypadkiem planetoidy 2000 WG63. Zaburzenia od dużych planetoid można więc uznać za względnie słabe. Ale jeśli poziom dokładności w położeniach musi sprostać wymaganiom misji kosmicznych lub precyzyjnym efemerydom planet wewnętrznych, model uwzględniający duże planetki okazuje się niezbędny.

Rozdział 5 poświęcony został analizie stabilności orbit planetoid NEA. Chaos i ilościowe metody jego określania są ściśle związane z problemami selekcji modeli dynamicznych. Obliczone czasy Lapunowa planetoid „wrażliwych" na subtelne zaburzenia są rzędu dziesiątek lat i wskazują na bardzo małą stabilność badanych orbit.

Badając chaos pod względem ilościowym, możemy osiągnąć różniące się rezultaty stosując różne modele zaburzeń. W przypadku badanych czasów Lapunowa nie odnotowano znaczącego wpływu modelu MZK. Istotnym wyjątkiem były planetki 1943 Anteros i 1985 WA, dla których zbieżność cząstkowych wartości γ przebiegała w odmienny sposób dla modeli MB i MZK. Analogiczna sytuacja powstała, gdy określano wartości LT dla planetek 1997 QK1 i 1997 WQ23 przy porównawczym zastosowaniu modeli MB i BIG4.

Subtelne efekty grawitacyjne badane w pracy powinny na stałe „zagościć" w precyzyjnych modelach dynamicznych Układu Słonecznego. Dotyczy to w szczególności badań ewolucji orbitalnej planetoid NEA. Badając dużą populację tych obiektów udało się natrafić na jednostkowe przykłady orbit, dla których perturbacje od rozdzielonego Księżyca lub największych planetoid mają istotne znaczenie, zatem powinny być w określonych warunkach uwzględniane. W tych przypadkach, efekty te mają wpływ zarówno na dokładność krótkookresowego przewidywania trajektorii, jak i jakościowe, długookresowe cechy ruchu (np. stabilność).

Literatura

[1] Bulirsch, R. , Stoer, J. : 1966, „Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods", *Numerische Mathematik* **8**, 1-13.

[2] Chambers, J. E. : 1999, „A Hybrid Symplectic Integrator that Permits Close Encounters between Massive Bodies", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **304**, 793-799.

[3] Domingos, R. C. : 2000, (po portugalsku) *Atuacao da Lua no Processo Colisional de Corpos Celestes com a Terra / The Contribution of the Moon to the Collisional Process of Celestial Bodies with Earth*, *praca magisterska*, Fac. de Engenharia, Guaratingueta, Brasil.

[4] Duncan, M. J. , Levison H. F. , Lee M. : 1998, „A Multiple Timestep Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters", *Astronomical Journal* **116**, 2067.

[5] Dvorak, R. , Pilat-Lohinger, E. : 1999, „On the dynamical evolution of the Atens and the Apollos", *Planetary and Space Science* **47**, 665-677.

[6] Everhart, E. : 1974, „Implicit Single-sequence Methods for Integrating Orbits", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **10**, 35-55.

[7] Everhart, E. : 1985, „An Efficient Integrator that uses Gauss-Radau Spacings" w: *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, A. Carusi, G. B. Valsecchi eds. , 185-202.

[8] Gladman, B., Michel, P., Froeschle, Ch. : 2000, „The Near-Earth Object Population", *Icarus* **146**, 176-189.

[9] Hill, G. W. : 1878, „Researches in the lunar theory", *Am. J. Math.* **1**, 5-29.

[10] Hilton, J. L. : 1999, „U. S. Naval Observatory ephemerides of the largest asteroids", *Astronomical Journal* **117**, 1077-1086.

[11] Hilton, J. L. : 2003, „Asteroid Masses and Densities", w: *Asteroids III*, University of Arizona Press, 103-112, w druku.

[12] Kankiewicz, P. : 2001, „Moon-Earth Separation Problem in the Dynamics of Near Earth Asteroids", w: *Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies, Proceedings of U.S.–European Celestial Mechanics Workshop, Poznań, Poland, 2000*, H. Prętka-Ziomek, E. Wnuk, P. Seidelmann, D. Richardson eds. , 331-332.

[13] Kankiewicz, P. : 2002, „Earth-Moon Separation Problem in the Motion of Near Earth Asteroids", *Earth, Moon and Planets* **91**, 43-51.

[14] Knezević, Z. : 2000, „Chaos in the motion of asteroids", w: *Proceedings of the Symposium Contemporary Mathematics*, N. Bokan Ed. , 269-285.

[15] Krasinsky, G. A., Pitjeva E. V., Vasilyev M. V., Yagudina E. I., 2001: *Estimating Masses of Asteroids*, Russian Academy of Sciences, Institute of Applied Astronomy **139**, St. Petersburg.

[16] Michalak, G : 2000, „Determination of asteroid masses. I (1) Ceres, (2) Pallas and (4) Vesta", *Astronomy and Astrophysics* **360**, 363-374.

[17] Michalak, G : 2001, „Determination of asteroid masses. II (6) Hebe, (10) Hygiea, (15) Eunomia, (52) Europa, (88) Thisbe, (444) Gyptis, (511) Davida and (704) Interamnia", *Astronomy and Astrophysics* **374**, 703-711.

[18] Michel, P. , Farinella, P. , Froeschle, Ch., 1998: „Dynamics of Eros", *The Astronomical Journal* **116**, 2023-2031.

[19] Michel, P. Valsecchi, G. B. : 1997, „Numerical Experiments on the Efficiency of Second-Order Mixed-variable Symplectic Integrators for N-body Problems", *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 355-371.

[20] Milani, A. : 1999, „Dynamics of planet-crossing asteroids", w: „The Dynamics of Small Bodies in the Solar System", A. E. Roy and B. Steves eds. , 95-126.

[21] Morbidelli, A: 2002, „Modern Integrations of Solar System Dynamics", *Annual Reviews of Earth and Planetary Sciences"* **30**.

[22] Morbidelli, A. , Bottke, W. F. , Froeschle, Ch. , Michel, P. : 2003, „Origin and Evolution of Near-Earth Objects", w: *Asteroids III*, University of Arizona Press, 409-422, w druku.

[23] Murray, C. D. , Dermott, S. F. : 1999, „Solar System Dynamics", Cambridge University Press, 418-421.

[24] Press i in. : 1992, „Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 701.

[25] Roy, A. E. : 1988, *Orbital Motion*, A. Hilger, Bristol, 168.

[26] Saha, P. , Tremaine, S. : 1992, „Symplectic Integrators for Solar System Dynamics", *Astronomical Journal* **104**, 4.

[27] Sitarski, G. , Todorovic-Juchniewicz, B. : 1992, „Determination of the mass of (1) Ceres from perturbations on (203) Pompeja and (348) May", *Acta Astronomica* **42**, 139-144.

[28] Sitarski, G. : 1999, „How to Find an Impact Orbit for the Earth-Asteroid Collision", *Acta Astronomica* **49**, 421-431.

[29] Sprott, J. C. : 1998, „Numerical Calculation of Largest Lyapunov Exponent" *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford.

[30] Standish, E. M.,: 1990, *The observational basis for JPL's DE200, the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac* , *Astronomy and Astrophysics* **233**, 252-271.

[31] Standish, E. M. : 1998, „JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405", JPL IOM 312.F-98-048.

[32] Standish, E. M. , Hellings R. L. : 1989, „A determination of the masses of Ceres, Pallas and Vesta from their perturbations upon the orbit of Mars", *Icarus* **80**, 326-333.

[33] Todorovic-Juchniewicz, B. : 1985, „The Influence of Subtle Dynamical Effects on the Motion of Comets and Minor Planets", *Postępy Astronomii*, **33**, 3-4.

[34] Tsiganis, K. , Varvoglis, H. : 2000, „Chaotic evolution of (719) Albert, the recently recovered minor planet", *Astronomy and Astrophysics* **361**, 766-769.

[35] Whipple, A. : 1995, „Lyapunov Times of the Inner Asteroids", *Icarus* **115**, 347-353.

[36] Wierzbiński, S. : 1973, „Mechanika Nieba", PWN, Warszawa, 326-330

[37] Wisdom, J. , Holman, M. : 1991, „Symplectic Maps for the N-body problem", *Astronomical Journal*, **102**, 4.

[38] Yeomans, D. K. , Chodas, P. W. : 1994, „Predicting Close Approaches of Asteroids and Comets to Earth", w: *Hazards due to Comets and Asteroids*, T. Gehrels ed., Tucson and London, 241-257.

[39] Yeomans, D. K. i in. : 1998, „Estimating the mass of of asteroid 253 Mathilde from tracking data during the NEAR flyby", *Science* **278**, 2106.

[40] Yeomans, D. K. i in. : 1999, „Estimating the mass of of asteroid 433 Eros during NEAR spacecraft flyby”, *Science* **285**, 560-561.

[41] Yeomans, D. K. : 2001, „The NEO Discovery Process”. w: *International Workshop on Collaboration and Coordination Among NEO Observers and Orbital Computers*, Japan Spaceguard Association, Isobe S. and Asakura Y. eds., 1-6.

[42] Yoshida, H. : 1993, „Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56**, 27-43.

Podziękowania

Chciałbym gorąco podziękować Panu Prof. dr hab. Edwinowi Wnukowi za opiekę i wszelkie wsparcie w czasie pisania niniejszej pracy.

Gorące podziękowania za wszechstronną pomoc i wspaniałą atmosferę w pracy składam również wszystkim pracownikom Obserwatorium Astronomicznego UAM.

Dziękuję również za wsparcie finansowe ze strony Komitetu Badań Naukowych w ramach realizacji związanego z pracą projektu nr 2 P03D 020 22.

Otwarcie i sfinansowanie mojego przewodu doktorskiego zawdzięczam Doktoranckiemu Studium Fizyki UAM w Poznaniu oraz Wydziałowi Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK w Toruniu.

Chciałbym również podziękować Panu Prof. Rudolfowi Dvorakowi z Obserwatorium Uniwersytetu Wiedeńskiego za owocną współpracę i liczne dyskusje.

Dziękuję także osobom, które zechciały poświęcić swój czas na wymianę korespondencji, dyskusję i udostępnienie mi materiałów pomocnych w pisaniu pracy: Panu Dr Patrickowi Michelowi z Obserwatorium Lazurowego Wybrzeża w Nicei, Panu Prof. Haroldowi F. Levisonowi (Space Science Department, Boulder, USA), Panu Prof. Othonowi C. Winterowi (Uniwersytet w Sao Paulo, Brazylia).